Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IFP **Année 2001-2002**

Devoir n° 2

À rendre dans la semaine du 11 mars 2002

Ex 1. *Régularité de la mesure*

Soit E un espace métrique, muni de la distance d, et de la tribu des boréliens $\mathrm{Bor}(E)$. On rappelle que la tribu des boréliens est la plus petite tribu contenant tous les ouverts de E. Soit μ une mesure sur $(E, \mathrm{Bor}(E))$. On suppose que la mesure μ est *finie*, c'est à dire $\mu(E) < +\infty$.

On se propose de montrer la propriété de régularité suivante sur la mesure μ : pour tout borélien B de $\mathrm{Bor}(E)$,

$$\mu(B) = \sup\{\mu(F);\ F \text{ fermé},\ F \subset B\}, \tag{1}$$

$$\mu(B) = \inf\{\mu(V);\ V \text{ ouvert},\ B \subset V\}. \tag{2}$$

Pour cela, on définit l'ensemble

$$\mathcal{E} := \{B \in \mathrm{Bor}(E);\ B \text{ vérifie (1) et (2)}\}.$$

1) Montrer que si $\mathcal{E}$ est une tribu et contient tous les fermés de E, alors $\mathcal{E}$ est la tribu $\mathrm{Bor}(E)$.

2) Soit $\mathcal{F}$ un ensemble de parties de E vérifiant les propriétés suivantes :

(i) $E \in \mathcal{F}$;

(ii) $A \in \mathcal{F} \Longrightarrow E \setminus A \in \mathcal{F}$;

(iii) $A, B \in \mathcal{F} \Longrightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$;

(iv) $(A_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{F}$, $(A_n)_{n\geq 1}$ croissante $\Longrightarrow \bigcup\limits_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{F}$.

Montrer l'équivalence

$$\mathcal{F} \text{ vérifie (i), (ii), (iii) et (iv)} \iff \mathcal{F} \text{ est une tribu.} \tag{3}$$

3) Utiliser (3) pour prouver que $\mathcal{E}$ est une tribu. *Indications :* Pour (iii), on pourra utiliser après l'avoir justifiée l'inclusion

$$A \cap B \subset (F \cap F') \cup (A \setminus F) \cup (B \setminus F'), \quad \text{où } F \subset A \text{ et } F' \subset B.$$

Pour (iv), soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite croissante dans $\mathcal{E}$ et $B = \bigcup_{n\geq 1} A_n$. Pour prouver que B vérifie (1) montrer d'abord pour tout $\varepsilon > 0$, l'existence d'un A_n tel que $\mu(B) \leq \mu(A_n)+\varepsilon$. Pour prouver que B vérifie (2), construire une suite (V_n) d'ouverts de E tels que pour tout $n \geq 1$,

$$A_n \subset V_n \quad \text{et} \quad \mu(V_n) \leq \mu(A_n) + \varepsilon 2^{-n}.$$

Utiliser alors après justification l'égalité

$$\bigcup_{n\geq 1} V_n = \Big(\bigcup_{n\geq 1} A_n\Big) \cup \Big(\bigcup_{n\geq 1} (V_n \setminus A_n)\Big).$$

4) On rappelle que pour tout $x \in E$, $d(x,F) = \inf\{d(x,y),\, y \in F\}$. Montrer que tout fermé F de E peut s'écrire

$$F = \bigcap_{k\in\mathbb{N}^*} \{x \in E;\, d(x,F) < \frac{1}{k}\}\,.$$

En déduire que tout fermé de E est dans $\mathcal{E}$.

5) Conclure.

6) En considérant le cas $E = \mathbb{R}$ et $\mu = \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \delta_{1/n}$, montrer qu'on ne peut pas s'affranchir de l'hypothèse « μ finie » pour vérifier (2).

Ex 2. Soit μ une mesure sur $\big(\mathbb{R}, \mathrm{Bor}(\mathbb{R})\big)$ vérifiant les deux propriétés suivantes :

(i) $\mu(]0,1]) = 1$,

(ii) μ est invariante par translations.

1) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\mu(]0,p])$.

2) Soit r un nombre rationnel de la forme p/q avec $p, q \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\mu(]0,r]) = r. \tag{4}$$

Indication : commencer par calculer $\mu(]0,1/q])$.

3) Montrer que μ est finie sur tout intervalle borné, puis que l'égalité (4) reste vraie pour $r \in \mathbb{R}_+$.

4) En déduire que pour tous réels a, b avec $a \leq b$,

$$\mu(]a,b]) = b - a.$$

Que peut-on en conclure ?

5) Trouver toutes les mesures μ sur $\big(\mathbb{R}, \mathrm{Bor}(\mathbb{R})\big)$, invariantes par translation et telles que $\mu(]0,1]) < +\infty$.