Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IFP **Année 2001-02**

Devoir 1

À rendre dans la semaine du 25 février 2002

Ex 1. *Une loi discrète pathologique*

Le but de cet exercice est de construire et d'étudier une v.a. discrète ayant pour ensemble $X(\Omega)$ de valeurs possibles l'ensemble $\mathbb{D}$ des nombres *décimaux* de $[0,1[$. Un nombre décimal peut se représenter par une suite *finie* de *chiffres décimaux*. Cette représentation n'est pas unique, par exemple : $0{,}375 = 0{,}375\,0 = 0{,}375\,00 = 0{,}375\,000 = \dots$

On peut aussi l'écrire sous la forme $k10^{-n}$ avec $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Si k n'est pas divisible par 10, nous dirons que l'on a la forme réduite (pour l'exemple précédent, $k = 375$ et $n = 3$). On notera $\mathbb{D}_n$ l'ensemble des décimaux de $[0,1[$ ayant le niveau de résolution n, c'est-à-dire de forme réduite $k10^{-n}$ (on posera $\mathbb{D}_0 = \{0\}$).

Nous construisons X par la procédure suivante. On dispose de deux urnes. La première contient des boules rouges et des vertes. On note p la proportion de boules rouges ($0 < p < 1$) et q celle des vertes. La deuxième urne contient 10 boules numérotées de 0 à 9. On effectue des tirages avec remise dans la première urne jusqu'à la première apparition d'une rouge. On note N le nombre (aléatoire) de tirages nécessaires. Une fois connue la valeur de N, on effectue N tirages avec remise d'une boule dans la deuxième urne. En notant Y_j le *chiffre* sorti lors du j-ème tirage dans la deuxième urne ($i \leq N$), on forme le nombre décimal :

$$X(\omega) = 0, Y_1(\omega)Y_2(\omega)\dots Y_{N(\omega)}(\omega) = \sum_{j=1}^{N(\omega)} \frac{Y_j(\omega)}{10^j}.$$

1) Quelle est la loi de N ?

2) Soit n fixé. Lorsque l'on effectue n tirages dans la deuxième urne, quelle est la probabilité d'obtenir une suite $(c_1, \dots, c_n)$ de n chiffres décimaux ($\forall i$, $c_i \in \{0, 1, \dots, 8, 9\}$) choisie à l'avance ? Que vaut $\mathbf{P}(Y_1 = c_1, Y_2 = c_2, \dots, Y_n = c_n \mid N = n)$?

3) Calculer $\mathbf{P}(X = 0{,}375)$ (attention, il y a une infinité de façons d'obtenir cette valeur !). Généraliser en calculant $P(X = d)$ pour $d \in \mathbb{D}_n$.

4) Vérifier que $\mathbb{D}$ est dénombrable en décrivant un procédé permettant de *numéroter* bijectivement les éléments de $\mathbb{D}$ par ceux de $\mathbb{N}$ (on pourrait aussi remarquer que $\mathbb{D}$ est union dénombrable des ensembles finis $\mathbb{D}_n$).

5) Montrer qu'il n'existe pas de numérotation *croissante* des éléments de $X(\Omega) = \mathbb{D}$ (i.e. vérifiant $\forall k \in \mathbb{N}$, $x_k < x_{k+1}$).

6) Calculer $\displaystyle\sum_{d\in\mathbb{D}_n} d$.

7) Comme X est une variable aléatoire discrète positive, d'ensemble de valeurs $X(\Omega)=\mathbb{D}$, son espérance $\mathbf{E}X$ existe si la série $\displaystyle\sum_{d\in\mathbb{D}} d\,\mathbf{P}(X=d)$ converge et $\mathbf{E}X$ vaut alors la somme de cette série. Vérifier que tel est bien le cas et calculer l'espérance $\mathbf{E}X$. Le résultat dépend de p. On vérifiera que dans tous les cas :

$$\frac{9}{20} < \mathbf{E}X < \frac{1}{2}.$$

Commenter ce résultat. Comment interpréter les cas limites $p=1$ et $p=0$?

8) Soit F la fonction de répartition de X : $F(x)=\mathbf{P}(X\le x)$. Montrer que F n'est constante dans aucun intervalle de $[0,1[$ (si petit soit-il). Ce n'est donc pas une fonction en escaliers.

9) Montrer que F n'est continue sur aucun intervalle de $[0,1[$ (aussi petit soit-il). Cependant F est continue en tout réel non décimal de $[0,1[$ (il y en a une infinité non dénombrable).

10) Détailler le calcul de $\mathbf{P}(X\le 0{,}375 \mid N=j)$ en distinguant les cas $j<3$ et $j\ge 3$.

11) Généraliser en montrant que :

$$\forall d\in\mathbb{D},\qquad P(X\le d\mid N=j)=\frac{[10^j d]+1}{10^j}.$$

12) Calculer $F(k/10)$ pour $0\le k\le 9$ et $F(l/100)$ pour $0\le l\le 99$.

13) Peut-on donner une formule générale pour $F(d)$, $d\in\mathbb{D}$?

Ex 2.

Soit $\Omega=\{\omega_k;\ k\in\mathbb{N}\}$ un ensemble dénombrable, $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble de toutes les parties de Ω. On considère une fonction d'ensembles μ définie sur $\mathcal{P}(\Omega)$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ (en particulier $\mu(\Omega)<+\infty$). On suppose que μ a les propriétés suivantes :

a) μ est additive : pour toutes parties *disjointes* A et B de Ω, $\mu(A\cup B)=\mu(A)+\mu(B)$.

b) $\mu(\Omega)=\sum_{k\in\mathbb{N}} p_k$, où $p_k=\mu(\{\omega_k\})$.

On se propose de montrer que μ est σ-additive. Pour cela on définit sur $\mathcal{P}(\Omega)$ une nouvelle fonction d'ensembles ν par :

$$\forall A\subset\Omega,\quad \nu(A):=\sum_{\omega_k\in A} p_k.$$

1) Montrer que ν est bien définie et σ-additive. En déduire qu'elle vérifie la propriété de continuité croissante séquentielle : si (A_n) est une suite croissante pour l'inclusion de parties de Ω, $\nu(A_n)$ converge en croissant vers $\nu(A)$, où A est l'union des A_n.

2) Montrer que pour tout $A\in\mathcal{P}(\Omega)$, $\nu(A)\le\mu(A)$. *Indication :* on pourra utiliser (après justification)

$$\mu(A)\ge\mu(A_n)=\nu(A_n),\ \text{où } A_n:=\{\omega_k\in A; k\le n\}.$$

3) En déduire que $\mu=\nu$ et conclure.