Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IFP **Année 2001-02**

Corrigé du devoir n° 2

Ex 1. *Régularité de la mesure*
Soit E un espace métrique, muni de la distance d, et de la tribu des boréliens $\mathrm{Bor}(E)$. On rappelle que la tribu des boréliens est la plus petite tribu contenant tous les ouverts de E. Soit μ une mesure sur $(E, \mathrm{Bor}(E))$. On suppose que la mesure μ est *finie*, c'est à dire $\mu(E) < +\infty$.

On se propose de montrer la propriété de régularité suivante sur la mesure μ : pour tout borélien B de $\mathrm{Bor}(E)$,

$$\mu(B) = \sup\{\mu(F);\ F\,\text{fermé},\ F \subset B\}, \tag{1}$$
$$\mu(B) = \inf\{\mu(V);\ V\,\text{ouvert},\ B \subset V\}. \tag{2}$$

Pour cela, on définit l'ensemble

$$\mathcal{E} := \{B \in \mathrm{Bor}(E);\ B \text{ vérifie (1) et (2)}\}.$$

1) Supposons que $\mathcal{E}$ est une tribu qui contient tous les fermés de E et montrons que $\mathcal{E}$ est la tribu $\mathrm{Bor}(E)$. L'inclusion $\mathcal{E} \subset \mathrm{Bor}(E)$ résultant de la définition de $\mathcal{E}$, il suffit de prouver $\mathrm{Bor}(E) \subset \mathcal{E}$. Or par hypothèse, la classe des fermés de E est incluse dans la tribu $\mathcal{E}$. Comme elle engendre $\mathrm{Bor}(E)$, on a bien $\mathrm{Bor}(E) \subset \mathcal{E}$.

2) Soit $\mathcal{F}$ un ensemble de parties de E vérifiant les propriétés suivantes :

(i) $E \in \mathcal{F}$;

(ii) $A \in \mathcal{F} \Longrightarrow E \setminus A \in \mathcal{F}$;

(iii) $A, B \in \mathcal{F} \Longrightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$;

(iv) $(A_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{F}$, $(A_n)_{n\geq 1}$ croissante $\Longrightarrow \bigcup\limits_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{F}$.

Si $\mathcal{F}$ est une tribu, les propriétés (i), (ii), (iii) et (iv) sont évidemment vérifiées. Réciproquement, si $\mathcal{F}$ vérifie les propriétés (i), (ii), (iii) et (iv), il reste à montrer que $\mathcal{F}$ est stable par réunion dénombrable pour en déduire qu'elle est une tribu. Soit $(B_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{F}$; posons pour tout $n \geq 1$, $A_n = \cup_{k=1}^{n} B_k$. La suite $(A_n)_{n\geq 1}$ est incluse dans $\mathcal{F}$ d'après (ii) et (iii) ; elle est croissante par construction et de réunion $\cup_{k=1}^{\infty} B_k$. On déduit de (iv) que $\cup_{k=1}^{\infty} B_k \in \mathcal{F}$. On a donc bien l'équivalence

$$\mathcal{F} \text{ vérifie (i), (ii), (iii) et (iv)} \iff \mathcal{F} \text{ est une tribu.} \tag{3}$$

3) Prouvons que $\mathcal{E}$ est une tribu en utilisant (3). Remarquons que (1) est trivial pour B fermé et que (2) est trivial pour B ouvert. La propriéte (i) pour $\mathcal{E}$ résulta alors du fait que E est à la fois ouvert et fermé.

Pour montrer (ii), il suffit de montrer (pourquoi ?) l'équivalence suivante pour tout borélien B :

$$B \text{ vérifie } (1) \iff B^{\mathrm{c}} \text{ vérifie } (2).$$

Or, comme $\mu(E)$ est fini, on a $\mu(B^{\mathrm{c}}) = \mu(E) - \mu(B)$ d'où

$$\begin{array}{rl} & \mu(B) = \sup\{\mu(F);\ F \text{ fermé},\ F \subset B\} \\ \iff & \mu(B^{\mathrm{c}}) = \mu(E) - \sup\{\mu(F);\ F \text{ fermé},\ F \subset B\} \\ \iff & \mu(B^{\mathrm{c}}) = \inf\{\mu(E) - \mu(F);\ F \text{ fermé},\ F \subset B\} \\ \iff & \mu(B^{\mathrm{c}}) = \inf\{\mu(F^{\mathrm{c}});\ F^{\mathrm{c}} \text{ ouvert},\ F^{\mathrm{c}} \supset B\}. \end{array}$$

Pour (iii), on utilise l'inclusion suivante pour tous boréliens A, B, F, G (F et G ne sont pas nécessairement des fermés) :

$$A \cap B \subset (F \cap G) \cup (A \setminus F) \cup (B \setminus G), \quad \text{où } F \subset A \text{ et } G \subset B. \tag{4}$$

Justification. Posons $C = A \cap B$; on a alors

$$\begin{array}{rcl} C & = & (F \cap G) \cup \big(C \setminus (F \cap G)\big) \\ & = & (F \cap G) \cup \big((C \cap (F^{\mathrm{c}} \cup G^{\mathrm{c}})\big) \\ & = & (F \cap G) \cup \big((C \cap F^{\mathrm{c}}) \cup (C \cap G^{\mathrm{c}})\big) \\ & \subset & (F \cap G) \cup \big((A \cap F^{\mathrm{c}}) \cup (B \cap G^{\mathrm{c}})\big), \end{array}$$

où l'on a utilisé $C \subset A$ et $C \subset B$ pour la dernière inclusion. Cette inclusion peut aussi se montrer de la manière suivante : soit $\omega \in A \cap B$; ou bien ω est dans $F \cap G$ ou bien il n'est pas dans l'un des ensembles F, G. S'il n'est pas dans F, comme il est dans A, il est nécessairement dans $A \setminus F$. De même, s'il n'est pas dans G, comme il est dans B, il est nécessairement dans $B \setminus G$. Ceci prouve (4).
Soient maintenant A et B appartenant à $\mathcal{E}$ et $\varepsilon > 0$. D'après (1), il existe deux fermés $F \subset A$ et $G \subset B$ tels que $\mu(A \setminus F) < \varepsilon$ et $\mu(B \setminus G) < \varepsilon$; il vient alors d'après (4)

$$\begin{array}{rcl} \mu(A \cap B) & \leq & \mu(F \cap G) + \mu(A \setminus F) + \mu(B \setminus G) \\ & \leq & \mu(H) + 2\varepsilon, \end{array}$$

où $H = F \cap G$ est un fermé inclus dans $A \cap B$. On vient de montrer que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, H \text{ fermé } \subset A \cap B, \quad \mu(H) \leq \mu(A \cap B) \leq \mu(H) + 2\varepsilon,$$

donc $A \cap B$ vérifie (1). D'après (2), il existe deux ouverts $U \supset A$ et $V \supset B$ tels que $\mu(U \setminus A) < \varepsilon$ et $\mu(V \setminus B) < \varepsilon$; il vient alors d'après (4) appliqué avec $A = U, B = V$,

$$\begin{array}{rcl} \mu(U \cap V) & \leq & \mu(A \cap B) + \mu(U \setminus A) + \mu(V \setminus B) \\ \mu(W) & \leq & \mu(A \cap B) + 2\varepsilon, \end{array}$$

où $W = U \cap V$ est un ouvert contenant $A \cap B$. On vient de montrer que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists W \text{ ouvert } \supset A \cap B, \quad \mu(A \cap B) \leq \mu(W) \leq \mu(A \cap B) + 2\varepsilon,$$

donc $A \cap B$ vérifie (2).

Pour (iv), soient $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite croissante dans $\mathcal{E}$ et $\varepsilon > 0$. Posons $B = \cup_{n\geq 1} A_n$. Comme $\lim_n \uparrow \mu(A_n) = \mu(B)$, il existe $n_0 \geq 1$ tel que $\mu(B) \leq \mu(A_{n_0}) + \varepsilon$. En appliquant (1) à A_{n_0}, on obtient un fermé $F \subset A_{n_0}$ tel que $\mu(A_{n_0}) \leq \mu(F) + \varepsilon$. Ces deux majorations combinées montrent que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists F \text{ fermé } \subset B, \quad \mu(F) \leq \mu(B) \leq \mu(F) + 2\varepsilon,$$

donc B vérifie (1). Pour prouver que B vérifie (2), ε et n étant fixés, on construit à partir de (2) un ouvert $V_n \supset A_n$ tel $\mu(V_n) \leq \mu(A_n) + \varepsilon 2^{-n}$. Remarquons de plus que

$$\bigcup_{n\geq 1} V_n = \Big(\bigcup_{n\geq 1} A_n\Big) \cup \Big(\bigcup_{n\geq 1} (V_n \setminus A_n)\Big).$$

On en déduit que $V = \cup_{n\geq 1} V_n$ est un ouvert contenant B et tel que

$$\begin{aligned} \mu(V) &\leq \mu(B) + \sum_{n\geq 1} \mu(V_n \setminus A_n) \\ &\leq \mu(B) + \varepsilon \sum_{n\geq 1} 2^{-n} \\ &\leq \mu(B) + \varepsilon, \end{aligned}$$

prouvant ainsi (2) pour B.

4) On rappelle que pour tout $x \in E$ et pour un sous-ensemble quelconque A, $d(x, A) = \inf\{d(x, y),\ y \in A\}$ et que la fermeture de A notée $\overline{A}$ coïncide avec $\{x \in E;\ d(x, A) = 0\}$. Montrons que tout fermé F de E peut s'écrire

$$F = \bigcap_{k\in\mathbb{N}^*} \{x \in E;\ d(x, F) < \frac{1}{k}\}\,.$$

L'inclusion $\subset$ est claire ; d'autre part, si x est dans l'intersection ci-dessus, alors en faisant $k \to +\infty$, on obtient $d(x, F) = 0$ ce qui implique $x \in F$ puisque F est fermé, d'où l'inclusion $\supset$.

Tout fermé F de E vérifie (1). De plus $V_k = \{x \in E;\ d(x, F) < \frac{1}{k}\}$ est un ouvert de E contenant F pour tout k et la suite (V_k) est décroissante ; on obtient alors

$$\begin{aligned} \mu(F) &= \lim_k \downarrow \mu(V_k) \\ &= \inf_k \mu(V_k) \\ &\geq \inf\{\mu(V);\ V \text{ ouvert },\ V \supset F\}, \end{aligned}$$

ce qui implique (2) pour F.

5) Finalement $\mathcal{E}$ est une tribu contenant les fermés de E et d'après 1), on déduit $\mathcal{E} = \mathrm{Bor}(E)$.

6) Dans le cas $E = \mathbb{R}$ et $\mu = \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \delta_{1/n}$, tout ouvert contenant 0 contient une infinité de $1/n$ et est donc de mesure infinie. Par contre $\mu(\{0\}) = 0$ donc on ne peut pas s'affranchir de l'hypothèse « μ finie » pour vérifier (2).

Ex 2. Soit μ une mesure sur $\big(\mathbb{R}, \mathrm{Bor}(\mathbb{R})\big)$ vérifiant les deux propriétés suivantes :

(i) $\mu(]0,1]) = 1$,

(ii) μ est invariante par translations.

1) Montrons que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\mu(]0,p]) = p$. On peut écrire

$$]0,p] = \bigcup_{k=1}^{p}]k-1,k]\,.$$

Cette union est disjointe, donc par additivité de μ,

$$\mu(]0,p]) = \sum_{k=1}^{p} \mu(]k-1,k])\,.$$

D'après l'invariance par translation,

$$\sum_{k=1}^{p} \mu(]k-1,k]) = \sum_{k=1}^{p} \mu(]0,1]) = p\,.$$

2) Soit r un nombre rationnel de la forme p/q avec $p, q \in \mathbb{N}^*$. Calculons $\mu(]0,1/q])$.

$$\begin{aligned}\mu(]0,1]) &= \sum_{k=1}^{q} \mu(](k-1)/q,\ k/q]) = \sum_{k=1}^{q} \mu(]0,\ 1/q]) \\ &= q \times \mu(]0,\ 1/q]) = 1\,.\end{aligned}$$

Donc

$$\mu(]0,1/q]) = 1/q\,.$$

Pour $p, q \in \mathbb{N}^*$, on montre de même

$$\begin{aligned}\mu(]0,p]) &= \sum_{k=1}^{q} \mu(](k-1)p/q,\ kp/q]) = \sum_{k=1}^{q} \mu(]0,\ p/q]) \\ &= q \times \mu(]0,\ p/q]) = p\,.\end{aligned}$$

Donc pour tous p, q de $\mathbb{N}^*$,

$$\mu(]0,\ p/q]) = p/q\,.$$

3) Montrons que μ est finie sur tout intervalle borné. On considère un intervalle I, borné. Il existe donc $A \in \mathbb{R}$, $A \geq 0$, tel que $I \subset [-A, A]$. On a alors $\mu(I) \leq \mu([-A, A]) =$

$\mu([A,3A])$. Or $[A,3A] \subset]0,3A]$, donc $\mu([A,3A]) \leq \mu(]0,3A]) = 3A$. Donc pour tout intervalle I borné, $\mu(I)$ est finie.

Considérons maintenant $r \in \mathbb{R}_+$. Soit (r_n) une suite décroissante de rationnels, qui converge vers r. Remarquons d'abord que d'après ce qui précède, $\mu(]0,r_1])$ est finie. Par continuité monotone séquentielle, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \mu(]0,r_n]) = \mu(]0,r]) .$$

Or pour tout n, $\mu(]0,r_n]) = r_n$, donc $\mu(]0,r]) = \lim_{n\to+\infty} r_n = r$.

4) On en déduit alors, pour tous $a,b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$,

$$\mu(]a,b]) = \mu(]0,b-a]) = b-a . \tag{5}$$

Il existe une unique mesure sur $\mathbb{R}$ vérifiant l'égalité (5), c'est la mesure de Lebesgue. Donc μ est la mesure de Lebesgue.

5) Soit μ une mesure invariante par translation, telle que $\mu(]0,1]) < +\infty$. On note $l = \mu(]0,1])$. Supposons $l > 0$. On définit une nouvelle mesure ν par

$$\forall A \in \mathrm{Bor}(\mathbb{R}),\ \nu(A) = \frac{1}{l}\mu(A) .$$

Cette nouvelle mesure ν est invariante par translation, et vérifie $\nu(]0,1]) = 1$. Donc ν est la mesure de Lebesgue, et $\mu = l\nu$ est un multiple de la mesure de Lebesgue.

Si $l = 0$, alors μ est la mesure nulle. En effet, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\mu(]-n,n]) = 2n\mu(]0,1]) = 0$. Par ailleurs, pour tous a,b de $\mathbb{R}$ tels que $a < b$, il existe n dans $\mathbb{N}$ tel que $[a,b] \subset]-n,n]$ et donc $\mu([a,b]) = 0$. On peut alors considérer μ comme un multiple de la mesure de Lebesgue. En conclusion, toutes les mesures sur $\mathbb{R}$, finies sur $]0,1]$ et invariantes par translation, sont des multiples de la mesure de Lebesgue.