Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IFP **Année 2001-2002**

Corrigé de l'examen du 4 septembre 2002

Exercice I

1) Calcul de l'intégrale $I := \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2)\,\mathrm{d}x$.

Il s'agit de l'intégrale de Riemann généralisée d'une fonction continue positive sur $\mathbb{R}$. La convergence en $+\infty$ est immédiate par comparaison avec $\exp(-x)$ dont on sait calculer une primitive : pour $x \geq 1$, $x^2 \geq x$, d'où $0 \leq \exp(-x^2) \leq \exp(-x)$; de plus

$$\int_1^b \exp(-x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-b} \xrightarrow[b\to+\infty]{} \mathrm{e}^{-1} < +\infty.$$

La convergence en $-\infty$ s'en déduit immédiatement par parité de $\exp(-x^2)$. Ainsi I est l'intégrale de Riemann généralisée absolument convergente d'une fonction continue sur $\mathbb{R}$, on peut donc aussi la considérer comme une intégrale de Lebesgue et écrire

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \exp(-x^2)\,\mathrm{d}\lambda_1(x).$$

En appliquant le corollaire du théorème de Tonelli pour les fonctions mesurables positives du type $f \otimes g$ et en rappelant que $\lambda_1 \otimes \lambda_1 = \lambda_2$,, on obtient

$$I^2 = \int_{\mathbb{R}} \exp(-x^2)\,\mathrm{d}\lambda_1(x) \int_{\mathbb{R}} \exp(-y^2)\,\mathrm{d}\lambda_1(y) = \int_{\mathbb{R}^2} \exp(-x^2)\exp(-y^2)\,\mathrm{d}\lambda_2(x,y),$$

d'où

$$I^2 = \int_{\mathbb{R}^2} \exp\bigl(-(x^2+y^2)\bigr)\,\mathrm{d}\lambda_2(x,y).$$

On calcule cette intégrale par passage en coordonnées polaires en considérant le C^1-difféomorphisme

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}_+ \times \{0\} \longrightarrow]0,+\infty[\times]0,2\pi[,$$

dont l'inverse est donné par

$$\forall (r,\theta) \in]0,+\infty[\times]0,2\pi[, \quad \varphi^{-1}(r,\theta) = (x,y) \text{ avec } \begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta. \end{cases}$$

Rappelons le calcul (bien connu) du jacobien de φ^{-1} :

$$\mathrm{Jac}(\varphi^{-1})(r,\theta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r.$$

On a alors successivement :

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_{]0,+\infty[\times]0,2\pi[} \exp(-r^2) r \,\mathrm{d}\lambda_2(r,\theta) && (1)\\ &= \int_{]0,+\infty[} \exp(-r^2) r \,\mathrm{d}\lambda_1(r) \int_{]0,2\pi[} \mathrm{d}\lambda_1(\theta) && (2)\\ &= 2\pi \int_0^{+\infty} \exp(-r^2) r \,\mathrm{d}r && (3)\\ &= \pi \int_0^{+\infty} \exp(-t) \,\mathrm{d}t = \pi. && (4) \end{aligned}$$

Justifications : L'égalité (1) provient du théorème de changement de variable pour une intégrale de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$. On obtient (2) par une nouvelle application du corollaire du théorème de Tonelli pour les fonctions $f \otimes g$ avec $f(r) = r\exp(-r^2)$, $g(\theta) = 1$ et $\lambda_2 = \lambda_1 \otimes \lambda_1$. Pour passer à (3), on utilise $\lambda_1(]0, 2\pi[) = 2\pi$ et le fait que f étant continue et d'intégrale de Riemann généralisée absolument convergente sur $]0, +\infty[$, son intégrale de Lebesgue et son intégrale de Riemann coïncident. Enfin le changement de variable $t = r^2$ et le calcul explicite de l'intégrale généralisée nous donnent (4).

Nous avons donc montré que

$$I := \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2) \,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \exp(-x^2) \,\mathrm{d}\lambda_1(x) = \sqrt{\pi}. \tag{5}$$

2) Soit α un réel, on pose pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_\alpha(x) := \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \exp(-k^\alpha x^2)$. Considérons la suite de fonctions $(F_{\alpha,n})_{n\geq 1}$ définies par

$$F_{\alpha,n} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+, \quad x \mapsto F_{\alpha,n}(x) := \sum_{k=1}^{n} \exp(-k^\alpha x^2).$$

Ces fonctions $F_{\alpha,n}$ sont continues, donc $\mathrm{Bor}(\mathbb{R}) - \mathrm{Bor}(\mathbb{R}_+)$ mesurables. Elles sont aussi $\mathrm{Bor}(\mathbb{R}) - \mathrm{Bor}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ mesurables, car tout borélien de $\overline{\mathbb{R}}_+$ est soit un borélien de $\mathbb{R}_+$, soit s'écrit $B' = B \cup \{+\infty\}$ où $B \in \mathrm{Bor}(\mathbb{R}_+)$. Dans ce cas, $F_{\alpha,n}^{-1}(B') = F_{\alpha,n}^{-1}(B) \in \mathrm{Bor}(\mathbb{R})$.

En raison de la positivité des exponentielles, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_{\alpha,n}(x)$ converge en croissant dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ vers $F_\alpha(x)$. On en déduit que F_α est $\mathrm{Bor}(\mathbb{R}) - \mathrm{Bor}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ mesurable, comme limite d'une suite de fonctions $\mathrm{Bor}(\mathbb{R}) - \mathrm{Bor}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ mesurables (ou comme le supremum de cette suite).

3) La fonction F_α étant mesurable positive sera λ_1-intégrable si et seulement si

$$\int_{\mathbb{R}} F_\alpha \,\mathrm{d}\lambda_1 < +\infty. \tag{6}$$

Or par le corollaire du théorème de Beppo-Levi pour les séries,

$$\int_{\mathbb{R}} F_\alpha \,\mathrm{d}\lambda_1 = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \exp(-k^\alpha x^2) \,\mathrm{d}\lambda_1(x). \tag{7}$$

Le terme général de cette série se ramène à l'intégrale I par le changement de variable $y = k^{\alpha/2}x$:

$$\int_{\mathbb{R}} \exp(-k^\alpha x^2)\,\mathrm{d}\lambda_1(x) = k^{-\alpha/2}\int_{\mathbb{R}} \exp(-y^2)\,\mathrm{d}\lambda_1(y) = \frac{\sqrt{\pi}}{k^{\alpha/2}}.$$

Ainsi (6) est vérifiée si et seulement si la série de terme général $\sqrt{\pi}k^{-\alpha/2}$ converge. L'ensemble des valeurs de α telles que F_α soit λ_1-intégrable sur $\mathbb{R}$ est donc $]2, +\infty[$.

4) Pour tout $\alpha > 0$ et tout $x \neq 0$, on a

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{k^\alpha x^2}{2\ln k} = +\infty.$$

Par conséquent il existe $k_0 = k_0(\alpha, x)$ tel que pour tout $k \geq k_0$, $k^\alpha x^2 \geq 2\ln k$, d'où

$$\forall k \geq k_0, \quad 0 < \exp(-k^\alpha x^2) \leq \exp(-2\ln k) = \frac{1}{k^2}.$$

Donc la série définissant $F_\alpha(x)$ converge dans $\mathbb{R}$ (cette question n'a rien à voir avec la théorie de l'intégration).

Exercice II

1) Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$ et $X := \ln U$. La fonction de répartition G de U est

$$G(y) = \mathbf{P}(U \leq y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq 0, \\ y & \text{si } 0 < y \leq 1, \\ 1 & \text{si } y > 1. \end{cases}$$

On en déduit immédiatement la fonction de répartition de X :

$$F(x) = \mathbf{P}(X \leq x) = \mathbf{P}(\ln U \leq x) = \mathbf{P}(U \leq \mathrm{e}^x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0, \\ \mathrm{e}^x & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

En particulier, on constate (comme c'était prévisible) que $\mathbf{P}(X > 0) = 1 - F(0) = 0$. La loi de X a donc toute sa masse sur $\mathbb{R}^-$. Pour trouver la densité de X (si elle existe), on essaie d'écrire $\mathbf{P}(a < X \leq b)$ sous la forme d'une intégrale par rapport à λ_1. On voit immédiatement que

$$\forall a < b \leq 0, \quad \mathbf{P}(a < X \leq b) = F(b) - F(a) = \mathrm{e}^b - \mathrm{e}^a = \int_a^b \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \int_{]a,b]} \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}\lambda_1(t).$$

Si $a < 0 \leq b$, $\mathbf{P}(a < X \leq b) = \mathbf{P}(a < X \leq 0) = \int_{]a,0]} \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}\lambda_1(t)$. Si $0 \leq a < b$, $\mathbf{P}(a < X \leq b) = 0$. Ainsi pour tout intervalle $]a, b]$, $\mathbf{P}(a < X \leq b) = \int_{]a,b]} f\,\mathrm{d}\lambda_1$, en définissant f par :

$$f(t) := \mathrm{e}^t \mathbf{1}_{\mathbb{R}^-}(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

La mesure P_X (loi de X) et la mesure de densité f par rapport à λ_1, coïncident sur la classe des intervalles $]a, b]$, donc les deux mesures sont égales sur toute la tribu borélienne de $\mathbb{R}$, par une application classique du théorème d'unicité. Ainsi X a pour densité f. L'espérance $\mathbf{E}X$ existe si $\mathbf{E}|X| < +\infty$. En utilisant la coïncidence des intégrales de Lebesgue et de Riemann pour une fonction continue d'intégrale généralisée absolument convergente, on obtient

$$\mathbf{E}|X| = \int_{\mathbb{R}} |x| f(x) \, \mathrm{d}\lambda_1(x) = \int_{\mathbb{R}^-} |x| \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}\lambda_1(x) = -\int_{-\infty}^{0} x\mathrm{e}^{-x} \, \mathrm{d}x = 1 < +\infty.$$

Le calcul de la dernière intégrale est classique (intégrer par parties). Ainsi $\mathbf{E}X$ existe et une adaptation immédiate du calcul ci-dessus (sur $\mathbb{R}^-$, $x = -|x|$) nous donne

$$\mathbf{E}X = \int_{\mathbb{R}} x f(x) \, \mathrm{d}\lambda_1(x) = -1.$$

2) Soit $(U_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi uniforme sur $[0, 1]$. On note $T_n := (U_1 U_2 \dots U_n)^{1/n}$. Posons $X_k = \ln U_k$. Les X_k forment une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi. De plus elles sont $\mathbf{P}$-intégrables et la valeur commune de leur espérance est $\mathbf{E}X_k = -1$. En appliquant la loi forte des grands nombres (cas i.i.d.) à cette suite, on obtient

$$\ln T_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow[n \to +\infty]{\text{p.s.}} \mathbf{E}X_1 = -1.$$

Par continuité de la fonction exponentielle, on en déduit :

$$T_n = \exp(\ln T_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{\text{p.s.}} \mathrm{e}^{-1}.$$

3) Soit $\Omega' = \{\omega \in \Omega;\ \lim_{n \to +\infty} T_n(\omega) = \mathrm{e}^{-1}\}$. On sait que $\Omega' \in \mathfrak{F}$ et que $\mathbf{P}(\Omega') = 1$. D'autre part $\mathrm{e}^{-1} < 1$, donc on peut choisir q tel que $\mathrm{e}^{-1} < q < 1$ ($q = 1/2$ fait l'affaire). Il résulte alors de la convergence de T_n sur Ω' que pour tout $\omega \in \Omega'$, il existe un entier $n_0(\omega)$ tel que

$$\forall n \geq n_0(\omega), \quad 0 < T_n(\omega) < q \quad \text{d'où} \quad 0 < U_1(\omega) U_2(\omega) \dots U_n(\omega) \leq q^n.$$

Ainsi la série $\sum_{n=1}^{+\infty} U_1 U_2 \dots U_n$ converge sur Ω' par comparaison avec la série géométrique de raison q (avec $0 < q < 1$). Comme $\mathbf{P}(\Omega') = 1$, on a établi la convergence presque-sûre.

4) Soit S la somme de cette série. Par le théorème de Beppo-Levi pour les séries de fonctions mesurables positives, on a l'égalité suivante dans $\overline{\mathbb{R}}_+$:

$$\mathbf{E}S = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{E}(U_1 U_2 \dots U_n). \tag{8}$$

Or les U_k étant des variables aléatoires positives indépendantes, on a

$$\mathbf{E}(U_1 U_2 \dots U_n) = (\mathbf{E}U_1)(\mathbf{E}U_2) \dots (\mathbf{E}U_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

car l'espérance de la loi uniforme sur $[0,1]$ est $1/2$. En reportant dans (8), on obtient

$$\mathbf{E}S = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1.$$

Exercice III

1) Posons pour $x \geq 0$ et $t \geq 0$,

$$f(x,t) := \frac{\exp(-xt^2)}{1+t^2}$$

L'application partielle $f(x,\,.\,)$ est continue sur $[0,+\infty[$, donc mesurable (pour la tribu borélienne de $\mathbb{R}_+$). De plus on a pour tout $x \geq 0$,

$$\forall t \in [0,+\infty[, \quad 0 \leq f(x,t) \leq \frac{1}{1+t^2} =: h(t). \tag{9}$$

Or h est λ_1-intégrable sur $[0,+\infty[$ (fonction continue d'intégrale de Riemann généralisée absolument convergente), donc $f(x,\,.\,)$ l'est aussi par majoration.

2) Pour tout $x \geq 0$, on pose

$$G(x) := \int_{[0,+\infty[} \frac{\exp(-xt^2)}{1+t^2} \,\mathrm{d}\lambda_1(t).$$

La continuité de G sur $[0,+\infty[$ résulte immédiatement du théorème de continuité sous le signe somme en prenant pour fonction majorante h (majorant global valable pour tout $x \in [0,+\infty[$).

Pour montrer la dérivabilité sur $]0,+\infty[$, on utilise le théorème de dérivation sous le signe somme avec une majoration *locale* (relativement à x) de la dérivée $\frac{\partial f}{\partial x}$. Fixons $x_0 > 0$ et définissons le voisinage $V_0 :=]x_0/2,+\infty[$ de x_0 (noter que $x_0/2 > 0$). On a pour tout $x > 0$,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\exp(-xt^2)}{1+t^2}\right) = \frac{-t^2\exp(-xt^2)}{1+t^2},$$

d'où

$$\forall x \in V_0,\ \forall t \in [0,+\infty[, \quad \left|\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\exp(-xt^2)}{1+t^2}\right)\right| \leq \exp\left(-\frac{x_0}{2}t^2\right).$$

Comme $x_0/2 > 0$, la fonction continue $t \mapsto \exp(-x_0t^2/2)$ a une intégrale généralisée de Riemann absolument convergente sur $[0,+\infty[$, donc est λ_1-intégrable. Par le théorème de dérivation sous le signe somme, on en déduit que G est dérivable au point x_0. Ce raisonnement étant valable pour tout x_0 *strictement positif*, G est en fait dérivable sur $]0,+\infty[$.

3) Calcul de $G(0)$:

$$G(0) = \int_{[0,+\infty[} \frac{1}{1+t^2} \,\mathrm{d}\lambda_1(t) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} \,\mathrm{d}t = \lim_{T\to+\infty} (\arctan T - \arctan 0) = \frac{\pi}{2}.$$

Pour prouver que $G(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$, il suffit de montrer que pour *toute suite* $(x_n)_{n\geq 1}$ dans $\mathbb{R}_+$, tendant vers $+\infty$, la suite $\big(G(x_n)\big)_{n\geq 1}$ converge vers 0. Or

$$G(x_n) = \int_{[0,+\infty[} \frac{\exp(-x_n t^2)}{1+t^2} \,\mathrm{d}\lambda_1(t) = \int_{[0,+\infty[} f(x_n,t) \,\mathrm{d}\lambda_1(t)$$

et sa convergence vers 0 résulte immédiatement du théorème de convergence dominée avec pour fonction majorante $h(t) = (1+t^2)^{-1}$, en notant que pour tout $t > 0$ (donc λ_1 presque partout sur $[0,+\infty[$), $\lim_{n\to+\infty} f(x_n,t) = 0$.

4) Nous avons vu à la question 2) que G vérifiait les hypothèses du théorème de dérivation sous le signe somme, on a donc

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad G'(x) = \int_{[0,+\infty[} \frac{-t^2}{1+t^2} \exp(-xt^2) \,\mathrm{d}\lambda_1(t).$$

On en déduit immédiatement que

$$\begin{aligned} G'(x) - G(x) &= -\int_{[0,+\infty[} \exp(-xt^2) \,\mathrm{d}\lambda_1(t) \\ &= -\int_0^{+\infty} \exp(-xt^2) \,\mathrm{d}t \\ &= \frac{-1}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} \exp(-u^2) \,\mathrm{d}u, \end{aligned}$$

la dernière égalité s'obtenant par le changement de variable $u = t\sqrt{x}$ (pour $x > 0$). G est donc bien solution de l'équation différentielle

$$G'(x) - G(x) = \frac{-J}{\sqrt{x}}, \quad x \in]0,+\infty[. \tag{10}$$

5) Posons $H(x) := G(x)\mathrm{e}^{-x}$. Comme G, la fonction H est dérivable sur $]0,+\infty[$. En exprimant G' à l'aide de H et H', on obtient

$$G'(x) - G(x) = H'(x)\mathrm{e}^x.$$

Compte-tenu de (10) on en déduit que H est solution de

$$H'(x) = -J\frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}}, \quad x \in]0,+\infty[.$$

La fonction H étant continue sur $[0,+\infty[$ et dérivable sur $]0,+\infty[$, on a pour tout $x > 0$,

$$H(x) - H(0) = \int_0^x H'(t) \,\mathrm{d}t = -J\int_0^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}} \,\mathrm{d}t.$$

En effectuant le changement de variable $t = u^2$ et en notant que $H(0) = G(0) = \pi/2$, on obtient

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad H(x) = \frac{\pi}{2} - 2J\int_0^{\sqrt{x}} \mathrm{e}^{-u^2} \,\mathrm{d}u. \tag{11}$$

6) En raison de la convergence de l'intégrale généralisée définissant J, on déduit de (11)

$$\lim_{x\to+\infty} H(x) = \frac{\pi}{2} - 2J^2.$$

D'autre part, $G(x)$ convergeant vers zéro en $+\infty$, il en va clairement de même pour $H(x) = G(x)\mathrm{e}^{-x}$. L'unicité de la limite impose alors l'égalité $\pi/2 - 2J^2 = 0$, d'où

$$J = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Problème

Le but du problème est de montrer que si tous les coefficients de Fourier d'une fonction de $\mathrm{L}^1(\mathbb{T})$ sont nuls, cette fonction est nulle. On rappelle d'abord les notations du cours. m désigne la mesure $\frac{1}{2\pi}\lambda$, où λ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. On note $C(\mathbb{T})$ l'espace des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, continues et 2π périodiques. Pour $1 \leq p < +\infty$, $\mathcal{L}^p(\mathbb{T})$ est l'espace des fonctions mesurables $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, telles que $\|f\|_p := \left(\int_{[-\pi,\pi]} |f|^p \,\mathrm{d}m\right)^{1/p} < +\infty$ et $f(t+2\pi) = f(t)$, m-presque partout. $\mathrm{L}^p(\mathbb{T})$ est l'espace des classes des éléments de $\mathcal{L}^p(\mathbb{T})$ modulo l'égalité m-presque partout. On note $e_k(t) := \mathrm{e}^{ikt}$ et on rappelle que la famille $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de l'espace $\mathrm{L}^2(\mathbb{T})$. Pour $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{T})$, ses coefficients de Fourier sont définis par

$$c_k(f) := \int_{[-\pi,\pi]} f(t)\mathrm{e}^{-ikt} \,\mathrm{d}m(t), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

1) Si $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{T})$, le cofficient de Fourier $c_k(f)$ s'interprète comme le produit scalaire $\langle f, e_k\rangle$. On sait que $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $\mathrm{L}^2(\mathbb{T})$. L'identité de Plancherel s'écrit ici :

$$\|f\|_2^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\langle f, e_k\rangle|^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k(f)|^2.$$

La nullité de tous les $c_k(f)$ implique alors $\|f\|_2 = 0$, donc que f est la classe d'équivalence des fonctions nulles presque partout.

Dans la suite, on suppose seulement que $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{T})$ et que $c_k(f) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

2) Soit h une combinaison linéaire finie des e_k :

$$h = \sum_{j\in J} a_j e_j, \quad \text{avec } J \text{ fini.}$$

Par linéarité de l'intégrale et la relation $\overline{e_k} = e_{-k}$, en notant $-J := \{k \in \mathbb{Z};\ -k \in J\}$,

$$\int_{[-\pi,\pi]} fh \,\mathrm{d}m = \sum_{j\in J} a_j \int_{[-\pi,\pi]} fe_j \,\mathrm{d}m = \sum_{k\in -J} a_{-k} \int_{[-\pi,\pi]} fe_{-k} \,\mathrm{d}m = \sum_{k\in -J} a_{-k} \int_{[-\pi,\pi]} f\overline{e_k} \,\mathrm{d}m.$$

Par nullité des $c_k(f)$,

$$\int_{[-\pi,\pi]} fh \,\mathrm{d}m = \sum_{k\in -J} a_{-k} c_k(f) = 0.$$

Soit $g \in C(\mathbb{T})$ et $\sigma_n(g)$ sa n-ième somme de Fejér :

$$\sigma_n(g) = \sum_{k=-n}^{k=n} \Big(1 - \frac{|k|}{n}\Big) c_k(g) e_k.$$

Ces sommes étant des combinaisons linéaires finies des e_k, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \int_{[-\pi,\pi]} f \sigma_n(g) \, \mathrm{d}m = 0. \tag{12}$$

D'autre part, le théorème de Fejér nous dit que $\sigma_n(g)$ converge uniformément vers g sur $[-\pi, \pi]$, quand n tend vers $+\infty$, ce qui peut s'écrire

$$\|g - \sigma_n(g)\|_\infty = \sup_{t \in [-\pi,\pi]} \big|g(t) - \sigma_n(g)(t)\big| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0. \tag{13}$$

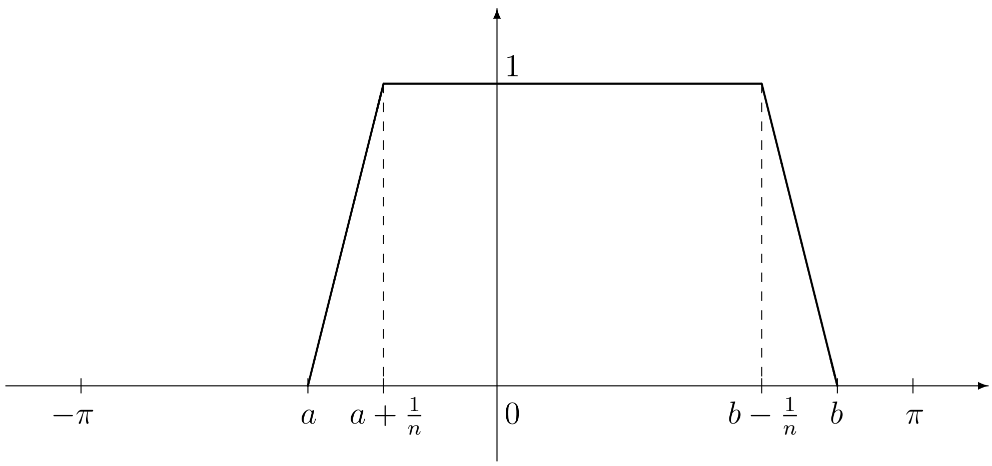
Comme g est bornée et $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{T})$, fg est dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{T})$, donc $\int_{[-\pi,\pi]} fg \, \mathrm{d}m$ est bien définie. Sa nullité découle de (12), si on vérifie qu'elle est limite de $\int_{[-\pi,\pi]} f\sigma_n(g) \, \mathrm{d}m$:

$$\begin{aligned}
\Big| \int_{[-\pi,\pi]} fg \, \mathrm{d}m - \int_{[-\pi,\pi]} f\sigma_n(g) \, \mathrm{d}m \Big| &= \Big| \int_{[-\pi,\pi]} f\big(g - \sigma_n(g)\big) \, \mathrm{d}m \Big| \\
&\leq \int_{[-\pi,\pi]} |f| |g - \sigma_n(g)| \, \mathrm{d}m \\
&\leq \|g - \sigma_n(g)\|_\infty \int_{[-\pi,\pi]} |f| \, \mathrm{d}m
\end{aligned}$$

et ce majorant tend vers zéro par (13). On a ainsi prouvé que

$$\forall g \in C(\mathbb{T}), \qquad \int_{[-\pi,\pi]} fg \, \mathrm{d}m = 0. \tag{14}$$

3) On fixe $-\pi \leq a < b \leq \pi$. Pour construire une suite (g_n) de fonctions continues sur $[-\pi, \pi]$, nulles sur $[-\pi, a] \cup [b, \pi]$, telles que $0 \leq g_n \leq \mathbf{1}_{]a,b[}$ et (g_n) converge simplement vers $\mathbf{1}_{]a,b[}$, il suffit de prendre pour g_n la fonction affine par morceaux définie par le dessin suivant :



Pour une définition plus formaliste de g_n, on pose pour $n > (b-a)/2$,

$$g_n(t) := \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [-\pi, a] \cup [b, \pi], \\ n(t-a) & \text{si } a < t < a + 1/n, \\ 1 & \text{si } a + 1/n \leq t \leq b - 1/n, \\ n(b-t) & \text{si } b - 1/n < t < b. \end{cases}$$

4) Fixons une version de f, notée encore f (on la considère donc comme une vraie fonction, et plus comme une classe d'équivalence). On peut appliquer le théorème de convergence dominée à la suite $(fg_n)_{n\geq 1}$. En effet la convergence simple de g_n vers $\mathbf{1}_{]a,b[}$ implique celle de fg_n vers $f\mathbf{1}_{]a,b[}$, au moins en tout point t de $[-\pi, \pi]$ où $|f(t)| < +\infty$. Or f étant m-intégrable, cette condition est réalisée m-presque partout sur $[-\pi, \pi]$, donc fg_n converge m-p.p. vers $f\mathbf{1}_{]a,b[}$. Cette convergence est dominée, à partir du rang $n_0 = [(b-a)/2] + 1$, par $|f|\mathbf{1}_{]a,b[}$ qui est m-intégrable puisque $|f|\mathbf{1}_{]a,b[} \leq |f|$ et f est m-intégrable. On peut donc intervertir limite et intégrale pour obtenir :

$$\int_{[-\pi,\pi]} f\mathbf{1}_{]a,b[} \,\mathrm{d}m = \int_{[-\pi,\pi]} \lim_{n\to+\infty} (fg_n) \,\mathrm{d}m = \lim_{n\to+\infty} \int_{[-\pi,\pi]} fg_n \,\mathrm{d}m = 0,$$

en raison de (14). On a ainsi montré que

$$\forall a, b \in [-\pi, \pi], \quad \int_{]a,b[} f \,\mathrm{d}m = 0. \tag{15}$$

5) On suppose que f est à valeurs réelles et on note f^+ et f^- la partie positive et la partie négative de la restriction de f à $[-\pi, \pi]$. On note μ et ν les mesures de densités respectives f^+ et f^- par rapport à m. Les fonctions f^+ et f^- sont mesurables positives et m-intégrables car dominées par $|f|$. En reportant l'égalité $f = f^+ - f^-$ dans (15) et en utilisant la linéarité de l'intégrale, on obtient

$$\forall a, b \in [-\pi, \pi], \quad \int_{]a,b[} f^+ \,\mathrm{d}m = \int_{]a,b[} f^- \,\mathrm{d}m.$$

Ceci peut se réécrire :

$$\forall a, b \in [-\pi, \pi], \quad \mu(]a, b[) = \nu(]a, b[).$$

La classe $\mathcal{C}$ des intervalles ouverts $]a, b[$ est un π-système qui engendre la tribu borélienne de l'intervalle *ouvert* $\Omega :=]-\pi, \pi[$ et comme $\Omega \in \mathcal{C}$, $\mu(\Omega) = \nu(\Omega)$. Par le théorème d'unicité des mesures (cas des mesures finies), μ et ν coïncident sur la tribu borélienne de $]-\pi, \pi[$. En fait, elles coïncident aussi sur la tribu borélienne de l'intervalle fermé $[-\pi, \pi]$ car elles sont à densités par rapport à m, pour laquelle les singletons sont de mesure nulle. On a donc bien $\mu = \nu$.

6) Par définition, $f^+ = f^-$ m-presque partout si $m(\{f^+ \neq f^-\}) = 0$. Pour établir cette égalité, nous montrons que $m(A) = 0$ et $m(A') = 0$, où $A := \{f^+ < f^-\}$ et $A' := \{f^- < f^+\}$. Il est clair qu'il suffit de montrer la nullité de $m(A)$, celle de $m(A')$ s'en déduisant par permutation de f^+ et f^-.

Vérifions que A est l'union croissante des ensembles $A_n := \{f^+ + 1/n \leq f^-\}$. Pour tout $t \in A_n$, $f^+(t) + 1/(n+1) \leq f^+(t) + 1/n \leq f^-(t)$, donc $t \in A_{n+1}$. Ainsi $A_n \subset A_{n+1}$ pour tout $n \geq 1$ et la suite $(A_n)_{n\geq 1}$ est croissante pour l'inclusion. Il est clair que chaque A_n est inclus dans A, donc l'union des A_n est incluse dans A. Pour vérifier l'inclusion inverse, soit t quelconque dans A. L'inégalité *stricte* $f^+(t) < f^-(t)$ impose la finitude de $f^+(t)$, donc $f^-(t) - f^+(t)$ est bien défini (dans $\overline{\mathbb{R}}_+$) et est strictement positif. Il existe alors un $n_0 = n_0(t)$ tel que $1/n_0 \leq f^-(t) - f^+(t)$ et comme $f^+(t)$ est fini, cette inégalité équivaut à $f^+(t) + 1/n_0 \leq f^-(t)$, d'où $t \in A_{n_0}$. Nous venons de montrer que pour tout $t \in A$, il existe un $n \geq 1$, tel que $t \in A_n$, ce qui se traduit par l'inclusion $A \subset \cup_{n\geq 1} A_n$.

Les A_n (et donc aussi A) sont membres de la tribu borélienne de $[-\pi, \pi]$. Pour le voir, on définit l'application $\varphi : [-\pi, \pi] \to \overline{\mathbb{R}}_+^2$, $t \mapsto \bigl(f^-(t), f^+(t)\bigr)$. Si B et C sont deux boréliens quelconques de $\overline{\mathbb{R}}_+$, $\varphi^{-1}(B \times C) = (f^-)^{-1}(B) \cap (f^+)^{-1}(C)$ est borélien de $[-\pi, \pi]$, en raison de la mesurabilité de f^- et f^+. La tribu borélienne de $\overline{\mathbb{R}}_+^2$ coïncidant avec la tribu produit $\mathrm{Bor}(\overline{\mathbb{R}}_+) \otimes \mathrm{Bor}(\overline{\mathbb{R}}_+)$, ceci suffit pour la mesurabilité de φ. D'autre part, $F_c := \{(x, y) \in \overline{\mathbb{R}}_+^2;\ x + c \leq y\}$ est clairement un fermé de $\overline{\mathbb{R}}_+^2$. Comme $A_n = \varphi^{-1}(F_{1/n})$, A_n est bien élément de $\mathrm{Bor}([-\pi, \pi])$.

Par continuité séquentielle croissante de m, on a

$$A_n \uparrow A \quad \Rightarrow \quad m(A_n) \uparrow m(A).$$

Pour prouver la nullité de $m(A)$, il suffit donc de prouver celle de $m(A_n)$ pour tout $n \geq 1$. D'après la question précédente, $\mu(A_n) = \nu(A_n)$. D'autre part,

$$\nu(A_n) = \int_{A_n} f^- \,\mathrm{d}m \geq \int_{A_n} \Bigl(f^+ + \frac{1}{n}\Bigr) \,\mathrm{d}m = \int_{A_n} f^+ \,\mathrm{d}m + \frac{1}{n} m(A_n) = \mu(A_n) + \frac{1}{n} m(A_n).$$

Comme ν est une mesure finie, l'inégalité $\nu(A_n) \geq \nu(A_n) + m(A_n)/n$ impose la nullité de $m(A_n)$. Ceci achève la preuve de d'égalité m-p.p. de f^+ et f^-.

À ce stade, on peut conclure que si f est réelle et m-intégrable et a tous ses coefficients de Fourier nuls, alors f est nulle m-p.p., puisque $f = f^+ - f^-$.

7) Si f est à valeurs complexes, on se ramène au cas où f est réelle, en procédant comme suit. On note d'abord que si f est m-intégrable, $\bar{f}$ l'est aussi et que

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad \overline{c_k(f)} = \int_{[-\pi,\pi]} \overline{f(t)}\, \mathrm{e}^{ikt} \,\mathrm{d}m(t) = c_{-k}(\bar{f}).$$

Par conséquent touts les coefficients de Fourier de $\bar{f}$ sont nuls. Il ne reste plus qu'à utiliser la linéarité des c_k (considérés comme formes linéaires sur $\mathrm{L}^1(\mathbb{T})$) pour écrire

$$c_k\bigl(\operatorname{Re} f\bigr) = \frac{c_k(f) + c_k(\bar{f})}{2} = 0, \qquad c_k\bigl(\operatorname{Im} f\bigr) = \frac{c_k(f) - c_k(\bar{f})}{2i} = 0$$

et conclure par le cas réel que $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont nulles m-presque partout.