Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IFP **Année 2001-02**

Corrigé du D.S. du 30 mars 2002

Exercice I

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré et $(A_k)_{k\geq 1}$ une suite dans $\mathcal{F}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, on note B_n l'ensemble des $\omega \in \Omega$ appartenant à au moins n des ensembles A_k.

1) Comme les A_k sont des éléments de la tribu $\mathcal{F}$, chaque fonction $\mathbf{1}_{A_k}$ est $\mathcal{F}$-Bor$(\overline{\mathbb{R}}_+)$ mesurable, donc la somme

$$f := \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{1}_{A_k}$$

est une fonction mesurable positive $\Omega \to \overline{\mathbb{R}}_+$. Il suffit alors de remarquer que

$$B_n = \{\omega \in \Omega;\ f(\omega) \geq n\} = f^{-1}([n, +\infty]) \tag{1}$$

pour obtenir la mesurabilité de B_n.

En utilisant la croissance de l'intégrale des fonctions mesurables positives, on peut maintenant écrire :

$$\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu \geq \int_{B_n} f \,\mathrm{d}\mu \geq \int_{B_n} n \,\mathrm{d}\mu = n\mu(B_n). \tag{2}$$

D'autre part le corollaire du théorème de Beppo Levi pour les séries de fonctions mesurables positives nous donne

$$\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_\Omega \mathbf{1}_{A_k} \,\mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{+\infty} \mu(A_k). \tag{3}$$

De (2) et (3) on obtient

$$n\mu(B_n) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \mu(A_k). \tag{4}$$

Remarque : l'utilisation de (1) est certainement la preuve la plus économique de l'appartenance de B_n à $\mathcal{F}$. Une autre méthode serait d'écrire B_n à l'aide d'opérations ensemblistes dénombrables sur la suite (A_k). On peut par exemple dire que $\omega \in B_n$ si et seulement s'il existe une partie $J = J(\omega)$ à n éléments de $\mathbb{N}$ telle que pour tout $k \in J$, $\omega \in A_k$. Notons que cela n'empêche pas ω d'appartenir à d'autres A_k que ceux indexés par J, y compris à une infinité de A_k. La décomposition traduisant cette caractérisation de B_n s'écrit

$$B_n = \bigcup_{\substack{J\subset\mathbb{N}^* \\ \operatorname{card}(J)=n}} \bigcap_{k\in I} A_k. \tag{5}$$

Comme l'ensemble de parties finies de $\mathbb{N}$ est dénombrable, celui des parties de cardinal n aussi et l'appartenance de B_n à $\mathcal{F}$ peut se déduire de (5).

On pourrait aussi écrire

$$B_n = \bigcup_{\substack{I\subset\mathbb{N}^* \\ \operatorname{card}(I)\geq n}} \bigcap_{k\in I} A_k. \tag{6}$$

Malheureusement (6) ne permet pas de conclure à l'appartenance de B_n à $\mathcal{F}$ car l'ensemble des parties infinies de $\mathbb{N}^*$ n'est pas dénombrable et donc l'ensemble des parties de cardinal supérieur ou égal à n ne l'est pas davantage.

Si l'on veut malgré tout utiliser les parties de cardinal supérieur ou égal à n, on peut s'en sortir comme suit. Notons $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des parties de $\mathbb{N}^*$ *finies* et de cardinal supérieur ou égal à n. Comme on sait que l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}^*$ est *dénombrable*, on en déduit que $\mathcal{P}_n$ l'est aussi. L'écriture

$$B_n = \Bigl(\bigcup_{I\in\mathcal{P}_n} \bigcap_{k\in I} A_k\Bigr) \cup \bigl(\limsup A_k\bigr) \tag{7}$$

établit alors l'appartenance de B_n à $\mathcal{F}$.

2) On suppose que $\sum_{k=1}^{+\infty} \mu(A_k) < +\infty$. La somme de cette série ne dépend pas de n. C'est une constante $C < +\infty$. Réécrivant (4) sous la forme

$$\forall n \in \mathbb{N}*, \quad \mu(B_n) \leq \frac{C}{n}, \tag{8}$$

on en déduit que $\mu(B_n)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

D'autre part la suite (B_n) est clairement décroissante pour l'inclusion et son intersection est

$$B := \{\omega \in \Omega;\ f(\omega) = +\infty\}.$$

Comme $\mu(B) \leq \mu(B_n)$ pour tout $n \geq 1$, on en déduit en faisant tendre n vers l'infini que $\mu(B) = 0$. On retrouve ainsi le lemme de Borel Cantelli, dans une version un peu plus générale que celle présentée en cours puisqu'on ne suppose pas que μ est une probabilité ni même une mesure finie.

Soit dit en passant, si on veut montrer la relation $\mu(B) = 0$ en utilisant la continuité décroissante de μ, il convient de se rappeler qu'elle n'est pas automatique quand μ est infinie et de remarquer qu'ici

$$\mu(B_1) = \mu\bigl(\cup_{k\in\mathbb{N}^*} A_k\bigr) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \mu(A_k) < +\infty.$$

Exercice II

On introduit la fonction génératrice d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ et applique cet outil à un problème de truquage de dés. On note $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé. On rappelle qu'une variable aléatoire *discrète* définie sur Ω et à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est une application $\mathcal{F}$-Bor($\mathbb{K}$) mesurable et telle que $X(\Omega)$ soit une partie au plus dénombrable de $\mathbb{K}$.

1) Soit X une application $\Omega \to \mathbb{N}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X^{-1}(\{n\}) \in \mathcal{F}. \tag{9}$$

Soit $B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Alors B est fini ou dénombrable et (9) combiné aux relations

$$B = \underset{n\in B}{\cup}\{n\}, \quad X^{-1}(B) = \underset{n\in B}{\cup} X^{-1}(\{n\}) \tag{10}$$

montre l'appartenance à $\mathcal{F}$ de $X^{-1}(B)$. Comme ceci est valable pour tout $B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, la $\mathcal{F}$-$\mathcal{P}(\mathbb{N})$ mesurabilité de X est établie.

Considérons X comme une application de Ω dans $\mathbb{R}$ en *agrandissant* l'ensemble d'arrivée. Cette opération n'a bien sûr pas changé l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs possibles de X qui reste une partie de $\mathbb{N}$. Pour tout borélien A de $\mathbb{R}$, on a donc $X^{-1}(A) = X^{-1}(A \cap \mathbb{N})$, de sorte qu'en posant $B = A \cap \mathbb{N}$ on est ramené à (10) et $X^{-1}(A) \in \mathcal{F}$. L'application $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est donc $\mathcal{F}$-Bor($\mathbb{R}$) mesurable, c'est bien une variable aléatoire réelle. Elle est discrète puisque $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$ est au plus dénombrable.

Soit $(\Omega', \mathcal{G})$ un espace mesurable et f une application *quelconque* $\mathbb{N} \to \Omega'$, vérifions que l'application $f \circ X$ est $\mathcal{F}$-$\mathcal{G}$ mesurable. Soit C élément quelconque de la tribu $\mathcal{G}$. Alors $(f \circ X)^{-1}(C) = X^{-1}\big(f^{-1}(C)\big)$. Comme $f^{-1}(C)$ est une partie de $\mathbb{N}$, il suffit d'appliquer (10) avec $B = f^{-1}(C)$ pour voir que $(f \circ X)^{-1}(C)$ est bien un élément de $\mathcal{F}$ et conclure à la $\mathcal{F}$-$\mathcal{G}$ mesurabilité de $f \circ X$. On notera que ce résultat est obtenu pour n'importe quelle tribu $\mathcal{G}$ sur Ω' et n'importe quelle application $f : \mathbb{N} \to \Omega'$.

2) Soit z un nombre complexe fixé et $X : \Omega \to \mathbb{N}$ une variable aléatoire entière. On voit immédiatement que l'application

$$z^X : \Omega \to \mathbb{C}, \quad \omega \mapsto z^{X(\omega)}$$

est une variable aléatoire discrète à valeurs complexes en appliquant le résultat précédent avec $\Omega' = \mathbb{C}$, $\mathcal{G} = \mathrm{Bor}(\mathbb{C})$ et $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, $n \mapsto z^n$.

Puisque la mesurabilité de z^X est acquise, son intégrabilité équivaut à

$$\mathbf{E}|z^X| = \int_\Omega |z^X| \,\mathrm{d}\mathbf{P} < +\infty. \tag{11}$$

En notant $P_X = \mathbf{P} \circ X^{-1}$ la loi de X, on a pour tout n entier, $P_X(\{n\}) = \mathbf{P}(X = n)$. La loi P_X est la mesure discrète

$$P_X = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{P}(X = n)\delta_n.$$

Le théorème de transfert entre Ω et $\mathbb{N}$ et le calcul d'une intégrale par rapport à une mesure discrète nous permettent d'écrire

$$\int_\Omega |z^X| \,\mathrm{d}\mathbf{P} = \int_{\mathbb{N}} |z^n| \,\mathrm{d}P_X(n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} |z^n| \mathbf{P}(X = n).$$

La c.n.s. d'intégrabilité (11) équivaut ainsi à la convergence *absolue* au point z de la série entière de terme général $\mathbf{P}(X = n)z^n$:

$$z^X \text{ est } \mathbf{P}\text{-intégrable} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = n)|z|^n < +\infty. \tag{12}$$

Le domaine de définition D de la *fonction génératrice* G_X de X

$$G_X : z \mapsto G_X(z) := \mathbf{E}(z^X),$$

est donc l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ pour lesquels la série dans (12) a une somme finie. Cette condition est réalisée au moins pour tous les z du disque unité fermé puisque si $|z| \leq 1$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = n)|z|^n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = n) = 1 < +\infty.$$

Pour tout $z \in D$, z^X est $\mathbf{P}$-intégrable et son espérance se calcule par transfert exactement comme pour $|z^X|$ ci-dessus, mais en supprimant le module :

$$\forall z \in D, \quad G_X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = n)z^n.$$

Cette formule montre clairement que G_X ne dépend que de la *loi* de X. Deux variables aléatoires entières X et Y de même loi ont donc même fonction génératrice. Réciproquement si X et Y sont telles que $G_X = G_Y$, l'égalité des *séries entières* $G_X(z)$ et $G_Y(z)$ entraîne l'égalité de leurs coefficients[1]. On a donc $\mathbf{P}(X = n) = \mathbf{P}(Y = n)$ pour tout entier n, ce qui donne bien l'égalité des *lois* de X et Y. Ainsi la fonction génératrice d'une variable aléatoire entière caractérise sa loi, au même titre que la fonction de répartition.

3) Soit X une variable aléatoire entière dont l'ensemble des valeurs possibles $X(\Omega)$ est inclus dans $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. On a $P(X = 0) = 0$ et $P(X = n) = 0$ pour tout $n > 6$. La série entière $G_X(z)$ se réduit donc à la somme finie :

$$G_X(z) = \sum_{n=1}^{6} P(X = n)z^n.$$

G_X est un polynôme sans terme constant donc factorisable sous la forme

$$G_X(z) = zQ_X(z) \tag{13}$$

[1] Il suffit même pour cela que $G_X(z) = G_Y(z)$ sur un disque ouvert de centre 0 et de rayon ε puisque les coefficients d'une série entière $G(z) = \sum_n a_n z^n$ vérifient $n!a_n = G^{(n)}(0)$.

où Q_X est un polynôme. Si $P(X=6)\neq 0$, le degré de G_X est 6 donc celui de Q_X est 5 et un polynôme *à coefficients réels* de degré *impair* a toujours au moins une racine réelle.

Dans le cas particulier où X suit la loi uniforme sur $\{1,2,3,4,5,6\}$, l'ensemble des valeurs possibles $X(\Omega)$ est exactement$\{1,2,3,4,5,6\}$ et $P(X=n)=1/6$ pour $1\leq n\leq 6$ d'où :

$$G_X(z)=\frac{1}{6}(z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6)\quad \text{et}\quad Q_X(z)=\frac{1}{6}(1+z+z^2+z^3+z^4+z^5).$$

Pour factoriser complètement $Q_X(z)$ sous la forme

$$Q_X(z)=\prod_{k=1}^{5}(z-z_k),$$

on remarque que pour $z\neq 1$, $Q_X(z)=(z^6-1)/(z-1)$. Les zéros de Q_X sont donc les racines sixièmes de l'unité autres que 1, soit les

$$z_k=\exp\Bigl(\frac{2k\pi\mathrm{i}}{6}\Bigr),\qquad k=1,\dots,5.$$

Une seule d'entre elles est réelle, c'est $z_3=-1$.

4) Soient X et Y deux variables aléatoires entières indépendantes (ceci équivaut à l'indépendance des événements $\{X=k\}$ et $\{Y=l\}$ pour tout couple d'entiers (k,l)). Montrons que pour tout z de module inférieur ou égal à 1 on a :

$$G_{X+Y}(z)=G_X(z)G_Y(z)$$

et que cette relation est valable pour tout complexe z lorsque $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ sont des parties finies de $\mathbb{N}$.

Considérons l'événement $\{X+Y=n\}$. Il peut se décomposer en la réunion disjointe des $\{X=k,Y=l\}$ pour tous les couples d'entiers (k,l) tels que $k+l=n$. D'autre part l'indépendance de X et Y nous permet d'écrire $P(X=k,Y=l)=P(X=k)P(Y=l)$ d'où :

$$P(X+Y=n)=\sum_{k+l=n}P(X=k,Y=l)=\sum_{k+l=n}P(X=k)P(Y=l).\tag{14}$$

Ceci permet d'exprimer G_{X+Y} en fonction de G_X et G_Y de la manière suivante. Pour tout z tel que $|z| \leq 1$:

$$\begin{aligned} G_{X+Y}(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(X+Y=n)z^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k+l=n} P(X=k, Y=l)\ z^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k+l=n} P(X=k)z^k\, P(Y=l)z^l \qquad (15) \\ &= \left(\sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k)z^k\right)\left(\sum_{l=0}^{+\infty} P(Y=l)z^l\right) \qquad (16) \end{aligned}$$

Sous réserve de justification de cette dernière égalité, on en déduit :

$$G_{X+Y}(z) = G_X(z)G_Y(z), \qquad \text{pour tout } z \text{ tel que } |z| \leq 1. \qquad (17)$$

Le passage de (15) à (16) se justifie en rappelant que si deux séries de terme généraux complexes respectifs u_n et v_n sont *absolument* convergentes, la série de terme général $w_n = \sum_{k+l=n} u_k v_l$ est absolument convergente et a pour somme le produit des sommes des deux séries de départ (série produit). Or les deux séries définissant G_X et G_Y sont absolument convergentes au moins pour $|z| \leq 1$ donc les seconds membres de (15) et (16) sont bien définis et égaux pour $|z| \leq 1$.

Lorsque $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ sont des parties finies de $\mathbb{N}$, l'ensemble des valeurs possibles de $X+Y$ est aussi fini. Toutes les séries intervenant dans le calcul ci-dessus sont des polynômes, il n'y a donc plus aucun problème de convergence et (17) est valable pour tout complexe z.

5) On dispose de deux dés et on aimerait truquer *individuellement* chacun d'eux de façon que la somme des points suive la loi uniforme sur $\{2, 3, \dots, 12\}$...Le truquage de chaque dé étant *individuel*, la méthode de truquage doit préserver l'indépendance des deux dés.

Soit Z une variable aléatoire de loi uniforme sur $\{2, 3, \dots, 12\}$. Comme il y a onze valeurs possibles, $P(Z=n) = 1/11$ pour $2 \leq n \leq 12$. La fonction génératrice est donc :

$$G_Z(z) = \frac{1}{11}(z^2 + z^3 + \cdots + z^{12}) = \frac{z^2}{11}(1 + z + z^2 + \cdots z^{10}).$$

Les zéros de $1 + z + z^2 + \cdots + z^{10}$ sont les racines onzièmes des l'unité autres que 1 soit les $s_k = \exp\bigl(2k\pi\mathrm{i}/11\bigr)$ pour $k = 1, \dots, 10$. Si l'un des s_k était réel, il vaudrait soit -1 soit 1.

Le premier cas équivaut à :

$$\exists l \in \mathbb{Z}, \quad \frac{2k\pi}{11} = \pi + 2l\pi \iff \exists l \in \mathbb{Z}, \quad 2k = 11(2l+1),$$

ce qui est impossible puisque $11(2l+1)$ est impair.

Le deuxième cas équivaut à :

$$\exists l \in \mathbb{Z}, \quad \frac{2k\pi}{11} = 2l\pi \Leftrightarrow \exists l \in \mathbb{Z}, \quad k = 11l,$$

ce qui est impossible à cause de la restriction $1 \leq k \leq 10$.

On en déduit que la fonction génératrice de Z peut se factoriser sous la forme :

$$G_Z(z) = z^2 R(z), \tag{18}$$

où R est un polynôme de degré 10 sans racine réelle.

Supposons donc que l'on puisse réaliser un truquage individuel de chaque dé de façon que la somme des points $X + Y$ suive la loi uniforme sur $\{2, 3, \dots, 12\}$. Alors d'après (17), (13) et (18) on a :

$$G_{X+Y}(z) = G_X(z)G_Y(z) = z^2 Q_X(z)Q_Y(z) = z^2 R(z)$$

Comme R est de degré 10, Q_X et Q_Y sont nécessairement de degré 5. Ils ont donc au moins une racine réelle chacun, ce qui est contradictoire avec le fait que R n'en a aucune ($Q_X Q_Y = R$).

Il est donc impossible de réaliser un truquage préservant l'indépendance des deux dés et tel que la somme des points suive la loi uniforme sur $\{2, 3, \dots, 12\}$.

Problème

Dans tout le problème, $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ est un espace mesuré et f une application $\Omega \to \mathbb{R}_+$, $\mathcal{F}$-Bor$(\mathbb{R}_+)$ mesurable telle que $\int_\Omega f \, d\mu < +\infty$. Le but du problème est d'établir la formule

$$\int_\Omega f \, d\mu = \int_{]0,+\infty[} \mu(\{f \geq t\}) \, d\lambda(t), \tag{19}$$

où λ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Cette formule se démontre assez facilement lorsque l'on dispose du théorème de Fubini. Une approche alternative est exposée à partir de la question 2) ci-dessous. La question 1) a pour but d'établir une propriété classique des discontinuités d'une fonction monotone.

1) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ une fonction croissante. On rappelle qu'en tout point c intérieur à I, g a une limite à gauche notée $g(c^-)$ et une limite à droite notée $g(c^+)$ et que $g(c^-) \leq g(c) \leq g(c^+)$. On note

$$\mathrm{s}(g, c) := g(c^+) - g(c^-).$$

On dit que c est un *point de saut* pour g si $\mathrm{s}(g, c) \neq 0$. Remarquons qu'en raison de la croissance de g et de la définition de $g(c^-)$ et $g(c^+)$ comme limites à gauche et à droite de g au point c, on a pour toute paire de réels x, x' dans I tels que $x < c < x'$, $g(x) \leq g(c^-) \leq g(c^+) \leq g(x')$. Par conséquent,

$$\forall x, x' \in I, \quad x < c < x' \quad \Rightarrow \quad g(x') - g(x) \geq \mathrm{s}(g, c). \tag{20}$$

Pour a et b tels que $a < b$ et $[a, b] \subset I$, on pose $D_n(a, b) := \{x \in]a, b[;\ \mathrm{s}(g, x) \geq 1/n\}$. Supposons que l'on puisse trouver *au moins* k points de saut dans $D_n(a, b)$. Notons ces points $c_1, \dots, c_k$ en les indexant dans l'ordre croissant. Alors on peut les encadrer à l'aide de $k + 1$ points x_i, $(i = 0, 1, \dots, k)$:

$$a < x_0 < c_1 < x_1 < c_2 < x_2 < \cdots < x_{k-1} < c_k < x_k < b.$$

En appliquant (20) aux encadrements[2] $x_{i-1} < c_i < x_i$, on obtient

$$g(b) - g(a) \geq g(x_k) - g(x_0) = \sum_{i=1}^{k} \bigl(g(x_i) - g(x_{i-1})\bigr) \geq \sum_{i=1}^{k} \mathrm{s}(g, c_i) \geq \frac{k}{n}.$$

Comme g est à valeurs dans $\mathbb{R}$, $g(b) - g(a)$ est fini et cette minoration nous montre que

$$k \leq n\bigl(g(b) - g(a)\bigr) < +\infty$$

L'ensemble $D_n(a, b)$ est donc fini.

Notons maintenant $D(a, b)$ l'ensemble des points de saut de g sur $]a, b[$. On a

$$D(a, b) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} D_n(a, b). \tag{21}$$

En effet, chaque $D_n(a, b)$ est inclus dans $D(a, b)$, donc la réunion de tous les D_n l'est aussi. Réciproquement si c est un élément quelconque de $D(a, b)$, $\mathrm{s}(g, c) > 0$ et il existe n tel que $\mathrm{s}(g, c) > 1/n$, d'où $c \in D_n(a, b)$ et $c \in \bigcup_{j \geq 1} D_j(a, b)$. On déduit de (21) que $D(a, b)$ est au plus dénombrable comme réunion dénombrable d'ensembles finis.

Soient α et β les bornes inférieure et supérieure (dans $\overline{\mathbb{R}}$) de I. Comme $]\alpha, \beta[\subset I \subset [\alpha, \beta]$, on laisse échapper au plus deux points de saut en remplaçant I par $]\alpha, \beta[$. Si α et β sont tous deux finis, on prend $a = \alpha$ et $b = \beta$ dans le raisonnement ci-dessus. Sinon on peut trouver une suite décroissante (a_l) convergente vers α et une suite croissante (b_l) convergente vers β (avec pour tout l, $\alpha < a_l < b_l < \beta$). On a alors

$$D(]\alpha, \beta[) = \bigcup_{l \in \mathbb{N}} D(a_l, b_l)$$

et $D(]\alpha, \beta[)$ est au plus dénombrable comme réunion dénombrable d'ensembles au plus dénombrables. Ainsi l'ensemble des points de saut de g sur I est au plus dénombrable donc de mesure de Lebesgue nulle.

Si c n'est pas un point de saut, la limite à droite de g en c et la limite à gauche sont égales (elles existent en chaque point parce que g est monotone). Comme $g(c^-) \leq g(c) \leq g(c^+)$, leur valeur commune est $g(c)$ ce qui montre que g a une limite au point c et que cette limite est $g(c)$, autrement dit que g est *continue* au point c. L'ensemble des points

[2] On utilise les x_i car $g(c_i^-)$, $g(c_i^+)$ ne sont pas forcément des valeurs prises par la fonction g. Rien n'interdit à certains x_i d'être eux-mêmes des points de saut.

de continuité de g a donc un complémentaire (l'ensemble des points de saut) de mesure nulle, ce qui signifie que g est continue λ-presque partout.

Dans le cas où g est décroissante, on pourrait reprendre toute l'étude précédente (avec la majoration $k/n \leq g(a) - g(b)$) pour aboutir à la même conclusion. Il est plus rapide de noter que g et $-g$ ont les mêmes points de discontinuité et que $-g$ est croissante.

2) On définit pour $t \geq 0$, l'ensemble $A_t = A(t) := \{\omega \in \Omega;\ f(\omega) \geq t\}$. Comme f est $\mathcal{F}$-Bor($\mathbb{R}_+$) mesurable, $A_t = f^{-1}([t, +\infty[)$ est bien membre de la tribu $\mathcal{F}$.

L'inégalité de Markov (chap. 4, lemme 13 du cours) s'écrit ici

$$\forall t > 0, \quad \mu(A_t) \leq \frac{1}{t} \int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu.$$

L'intégrale $\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu$ étant finie et t strictement positif, la finitude de $\mu(A_t)$ en découle.

La décroissance de l'application $g :]0, +\infty[\to \mathbb{R}_+$, $t \mapsto \mu(A_t)$ est une conséquence immédiate de la croissance de la mesure μ puisque si $0 < s < t$, A_t est inclus dans A_s.

Pour vérifier la continuité à gauche de g en tout point t de $]0, +\infty[$, il suffit de vérifier que pour *toute suite* croissante (t_n) et convergente vers t dans $]0, +\infty[$, $g(t_n)$ converge vers $g(t)$. Pour une telle suite, (A_{t_n}) est décroissante pour l'inclusion et

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_{t_n} = A_t. \tag{22}$$

En effet pour tout n, $t \geq t_n$ donc $A_t \subset A_{t_n}$ et A_t est inclus dans l'intersection de tous les A_{t_n}. Réciproquement, soit ω quelconque dans l'intersection de tous les A_{t_n}. Cela signifie que pour tout n, $f(\omega) \geq t_n$. En faisant tendre n vers l'infini on en déduit que $f(\omega) \geq t$ donc que $\omega \in A_t$. Ceci établit l'inclusion de l'intersection des A_{t_n} dans A_t et termine la vérification de (22). Comme $\mu(A_{t_0})$ est *fini* ($t_0 > 0$), on peut conclure par continuité décroissante de la mesure μ :

$$A_{t_n} \downarrow A_t \quad \Rightarrow \quad \mu(A_{t_n}) \downarrow \mu(A_t),$$

autrement dit $g(t_n)$ tend vers $g(t)$. Cette convergence étant établie pour toute suite $t_n \uparrow t$, g est continue à gauche au point t. Enfin t ayant été pris quelconque dans $]0, +\infty[$, g est continue à gauche sur tout l'intervalle $]0, +\infty[$.

3) Dans le cas particulier où f est à valeurs dans $\mathbb{N}$, on a la décomposition en réunion disjointe :

$$A_j = \{f \geq j\} = \bigcup_{k \geq j} \{f = k\}.$$

On en déduit que

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \mu(A_j) = \sum_{j=1}^{+\infty} \sum_{k=j}^{+\infty} \mu(\{f = k\}) = \sum_{j=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{1}_{\{k \geq j\}} \mu(\{f = k\}).$$

Sous cette dernière forme[3], il s'agit d'une série double à termes *positifs* et on peut intervertir les sommations :

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \mu(A_j) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mu(\{f=k\}) \sum_{j=1}^{+\infty} \mathbf{1}_{\{k\geq j\}} = \sum_{k=1}^{+\infty} k\mu(\{f=k\}). \tag{23}$$

Pour voir que $\sum_{k=1}^{+\infty} k\mu(\{f=k\}) = \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu$, il suffit d'appliquer le théorème de transfert entre $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ et $(\mathbb{R}_+, \mathrm{Bor}(\mathbb{R}_+), \nu)$ où $\nu := \mu \circ f^{-1}$. La formule de transfert s'écrit alors pour toute fonction mesurable (i.e. ici borélienne) $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$:

$$\int_\Omega h \circ f \,\mathrm{d}\mu = \int_{\mathbb{R}_+} h \,\mathrm{d}\nu. \tag{24}$$

Comme f est à valeurs entières, il est immédiat de vérifier que ν est la mesure discrète

$$\nu = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(\{f=k\})\delta_k.$$

En choisssant pour h dans (24) l'identité sur $\mathbb{R}_+$ et en rappelant que $\int_{\mathbb{R}_+} h \,\mathrm{d}\delta_k = h(k)$, on obtient

$$\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu = \int_{\mathbb{R}_+} h \,\mathrm{d}\nu = \sum_{k=0}^{+\infty} h(k)\mu(\{f=k\}) = \sum_{k=0}^{+\infty} k\mu(\{f=k\}). \tag{25}$$

Rappelons la convention faite pour construire l'intégrale abstraite : « $0 \times (+\infty) = 0$ ». Ainsi même si $\mu(\{f=0\}) = +\infty$, le terme d'indice $k=0$ dans la série ci-dessus vaut zéro[4]. Cette remarque jointe à (23) et (25) nous permet de conclure que

$$\text{si } f \text{ est à valeurs entières,} \quad \sum_{j=1}^{+\infty} \mu(\{f \geq j\}) = \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu. \tag{26}$$

4) Revenant au cas général, on pose $f_n(\omega) := 2^{-n}[2^n f(\omega)]$ où la notation $[x]$ désigne la partie entière du réel x, c'est-à-dire l'unique entier m tel que $m \leq x < m+1$. Pour tout réel x on a donc $[x] \leq x$ d'où

$$\forall \omega \in \Omega, \quad 0 \leq f_n(\omega) = 2^{-n}[2^n f(\omega)] \leq 2^{-n}2^n f(\omega) = f(\omega). \tag{27}$$

Cette inégalité étant vraie pour tout n, la *suite* de fonctions mesurables positives (f_n) est *dominée* par la fonction μ-intégrable f. Pour étudier la convergence de f_n vers f sur Ω, on applique avec $x = 2^n f(\omega)$ l'inégalité $0 \leq x - [x] \leq 1$:

$$0 \leq f(\omega) - f_n(\omega) = 2^{-n}\big(2^n f(\omega) - [2^n f(\omega)]\big) \leq 2^{-n}$$

[3] Mais pas sous la forme intermédiaire !

[4] Ce n'est pas un tour de passe-passe. L'apparition dans notre problème de la série $\sum k\mu(\{f=k\})$ résulte du théorème de transfert et du calcul d'une intégrale par rapport à une mesure discrète, deux résultats qui font partie de la théorie de l'intégrale abstraite et qui donc reposent eux aussi indirectement sur la convention « $0 \times (+\infty) = 0$ ».

et on voit ainsi que f_n converge uniformément vers f sur tout Ω. Compte tenu de (27), c'est plus qu'il ne nous en faut (une convergence μ-p.p. suffit) pour conclure par le théorème de convergence dominée [5] que

$$\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu. \tag{28}$$

La fonction $2^n f_n = [2^n f]$ étant à valeurs entières, on peut lui appliquer (26) :

$$2^n \int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega 2^n f_n \,\mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^{+\infty} \mu(\{[2^n f] \geq j\}). \tag{29}$$

Comme j est *entier*, l'inégalité $[x] \geq j$ équivaut à $x \geq j$. En appliquant ceci avec $x = 2^n f(\omega)$, on obtient

$$\mu\big(\{[2^n f] \geq j\}\big) = \mu\big(\{2^n f \geq j\}\big) = \mu\big(\{f \geq j2^{-n}\}\big) = \mu\big(A(j2^{-n})\big).$$

En reportant dans (29), il vient

$$2^n \int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^{+\infty} \mu\big(A(j2^{-n})\big). \tag{30}$$

Soit $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ la suite de fonctions boréliennes positives définies par

$$\varphi_n :]0,+\infty[\to \mathbb{R}^+, \quad t \mapsto \varphi_n(t) := \sum_{j=1}^{+\infty} \mu\big(A(j2^{-n})\big) \mathbf{1}_{](j-1)2^{-n},\, j2^{-n}]}(t).$$

Grâce au corollaire du théorème de Beppo Levi pour les séries, on voit que

$$\int_{]0,+\infty[} \varphi_n \,\mathrm{d}\lambda = \sum_{j=1}^{+\infty} \mu\big(A(j2^{-n})\big) \int_{]0,+\infty[} \mathbf{1}_{](j-1)2^{-n},\, j2^{-n}]} \,\mathrm{d}\lambda = 2^{-n} \sum_{j=1}^{+\infty} \mu\big(A(j2^{-n})\big).$$

Compte-tenu de (30), on a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \int_{]0,+\infty[} \varphi_n \,\mathrm{d}\lambda = \int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu. \tag{31}$$

On va montrer en appliquant le théorème de Beppo Levi que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{]0,+\infty[} \varphi_n \,\mathrm{d}\lambda = \int_{]0,+\infty[} g \,\mathrm{d}\lambda, \tag{32}$$

où $g(t) = \mu(A_t)$.

[5] On pourrait aussi utiliser ici le théorème de Beppo-Levi après avoir prouvé (faites le !) la croissance de $(f_n(\omega))$ vers $f(\omega)$.

Commençons par vérifier que la suite (φ_n) est croissante. Soit $t \in]0, +\infty[$ quelconque. Pour tout entier n, il existe un unique entier

$$j = j(n,t) \quad \text{tel que} \quad \frac{j-1}{2^n} < t \leq \frac{j}{2^n} \quad \text{et} \quad \varphi_n(t) = g\Big(\frac{j(n,t)}{2^n}\Big). \tag{33}$$

En réécrivant l'encadrement ci-dessus de t sous la forme

$$\frac{2j-2}{2^{n+1}} < t \leq \frac{2j}{2^{n+1}},$$

on voit que l'entier $j(n+1,t)$ ne peut prendre que l'une des deux valeurs $2j(n,t)-1$ ou $2j(n,t)$. Dans le premier cas, en raison de la décroissance de g on a

$$\varphi_{n+1}(t) = g\Big(\frac{2j(n,t)-1}{2^{n+1}}\Big) \geq g\Big(\frac{j(n,t)}{2^n}\Big) = \varphi_n(t).$$

Dans le deuxième cas on a

$$\varphi_{n+1}(t) = g\Big(\frac{2j(n,t)}{2^{n+1}}\Big) = g\Big(\frac{j(n,t)}{2^n}\Big) = \varphi_n(t).$$

On a donc bien pour tout $t \in]0, +\infty[$ et tout n entier, $\varphi_{n+1}(t) \geq \varphi_n(t)$, ce qui établit la croissance de la suite (φ_n).

Regardons la convergence de (φ_n). Notons d'abord que la définition de $j(n,t)$ nous procure l'encadrement

$$0 \leq \frac{j(n,t)}{2^n} - t \leq \frac{1}{2^n}$$

qui nous assure pour tout $t \in]0, +\infty[$ de la convergence

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{j(n,t)}{2^n} = t. \tag{34}$$

Soit E l'ensemble des points de continuité de la fonction décroissante g. D'après la question 1), on sait que $\lambda(]0, +\infty[\setminus E) = 0$. La convergence (34) nous donne alors

$$\forall t \in E, \quad \varphi_n(t) = g\Big(\frac{j(n,t)}{2^n}\Big) \uparrow g(t), \quad (n \to +\infty).$$

On en déduit immédiatement que la suite de fonctions mesurables positives $\varphi_n \mathbf{1}_E$ converge en croissant vers $g\mathbf{1}_E$ sur tout $]0, +\infty[$ et par le théorème de Beppo Levi que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_E \varphi_n \, \mathrm{d}\lambda = \int_E g \, \mathrm{d}\lambda.$$

Comme $\lambda(]0, +\infty[\setminus E) = 0$, on peut remplacer E par $]0, +\infty[$ dans les intégrales ci-dessus, ce qui achève la vérification de (32).

Les convergences (28), (32) et l'égalité (31) nous donnent la conclusion :

$$\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu = \int_{]0,+\infty[} g \, \mathrm{d}\lambda = \int_{]0,+\infty[} \mu(\{f \geq t\}) \, \mathrm{d}\lambda(t).$$

Enfin on peut remplacer dans la formule ci-dessus $\mu(\{f \geq t\})$ par $\mu(\{f > t\})$ car ces deux fonctions de t diffèrent seulement aux points de discontinuité de g. L'ensemble de ces points étant λ-négligeable (car au plus dénombrable), les deux fonctions sont égales λ-presque partout et ont la même intégrale sur $]0, +\infty[$. On peut d'ailleurs remplacer cet ensemble d'intégration par $[0, +\infty[$ sans changer les intégrales puisque cela revient à l'agrandir d'un ensemble de mesure nulle.