Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IFP **Année 2001-2002**

Corrigé du devoir 3

Problème

Première partie

I.1. Attention : si elle existe, la fonction $\lim f_n$ est mesurable (voir le cours), mais **en général, elle n'existe pas.**

Par contre, les fonctions $\limsup f_n$ et $\liminf f_n$ sont toujours définies sur Ω et étant donné x dans Ω, $(f_n(x))$ admet une limite si et seulement si $\limsup_{n\to+\infty} f_n(x) = \liminf_{n\to+\infty} f_n(x)$, donc

$$\begin{aligned} L &= \{x \in \Omega \mid \limsup f_n(x) = \liminf f_n(x) \geq 0\} \\ &= \{x \in \Omega \mid (\limsup f_n - \liminf f_n)(x) = 0, \limsup f_n(x) \geq 0\} \\ &= (\limsup f_n - \liminf f_n)^{-1}(\{0\}) \cap (\limsup f_n)^{-1}([0, +\infty[), \end{aligned}$$

où on peut remplacer $[0,+\infty[$ par $[0,+\infty]$ si on autorise la limite à être $+\infty$. Les fonctions $\liminf f_n$ et $\limsup f_n$ étant $\mathcal{F} - \mathrm{Bor}(\overline{\mathbf{R}})$ mesurables et $\{0\}$ $[0,+\infty[$, $[0,+\infty]$ étant des boréliens de $\overline{\mathbf{R}}$, on en déduit que L est dans $\mathcal{F}$.

Remarque : de même, l'ensemble des x de Ω tels que $(f_n(x))$ ait une limite négative est aussi un élément de $\mathcal{F}$.

I.2. Soit $B \in \mathcal{F}$ et soit h mesurable. On suppose de plus que h est positive p.p. sur B et telle que $\int_B h\,\mathrm{d}\mu = 0$. On veut montrer que $h = 0$ p.p. sur B, c'est-à-dire que $\{x \in B \mid h(x) \neq 0\}(= B \cap h^{-1}(\mathbf{R}^*)) \in \mathcal{F}$ (ce qui découle de la mesurabilité de h) et $\mu(\{x \in B \mid h(x) \neq 0\}) = 0$. Comme h est positive p.p. sur B, $\mu(\{x \in B \mid h(x) < 0\}) = 0$, donc

$$0 = \int_B h\,\mathrm{d}\mu = \int_{B\cap\{h>0\}} h\,\mathrm{d}\mu + \int_{B\cap\{h=0\}} h\,\mathrm{d}\mu + \int_{B\cap\{h<0\}} h\,\mathrm{d}\mu = \int_{B\cap\{h>0\}} h\,\mathrm{d}\mu.$$

Or

$$\int_{B\cap\{h>0\}} h\,\mathrm{d}\mu \geq \int_{B\cap\{h\geq\frac{1}{n}\}} h\,\mathrm{d}\mu \geq \frac{1}{n}\mu\left\{x \in B \mid h(x) \geq \frac{1}{n}\right\}.$$

On obtient donc $\mu\left\{x \in B \mid h(x) \geq \frac{1}{n}\right\} = 0$, ce qui implique $\mu\{x \in B \mid h(x) > 0\} = 0$ puisque $\{x \in B \mid h(x) > 0\}$ est l'union croissante des $\left\{x \in B \mid h(x) \geq \frac{1}{n}\right\}$.

I.3. Etant donné $A \in \mathcal{F}$, f et g intégrables sur A telles que pour tout B de $\mathcal{F}$ inclus dans A, $\int_B f \,\mathrm{d}\mu = \int_B g \,\mathrm{d}\mu$, prenons $B = \{x \in A \mid f(x) \geq g(x)\}$. Alors $B = (f - g)^{-1}([0, +\infty[) \cap A$ donc B est dans $\mathcal{F}$. Par hypothèse, $\int_B (f-g)\,\mathrm{d}\mu = 0$. De plus, sur B, $f - g$ est mesurable positive donc d'après **I.2.** $f - g = 0$ μ-p.p. sur B. En raisonnant de même avec $B' = \{x \in A \mid f(x) < g(x)\}$ et $g - f$, on obtient $g - f = 0$ μ-p.p. sur B'. Comme $A = B \cup B'$, $f = g$ μ-p.p. sur A.

Deuxième partie

Pour A borélien borné et y dans $\mathbf{R}$, notons

$$F_A(y) = \int_{\mathbf{R}} |\mathbf{1}_A(x) - \mathbf{1}_A(x+y)| \,\mathrm{d}\lambda(x).$$

On veut montrer que $\lim_{y\to 0} F_A(y) = 0$.

Il sera utile dans ce qui suit de remarquer que pour tout borélien A et tout y de $\mathbf{R}$,

$$F_A(y) \leq \int_{\mathbf{R}} \big(\mathbf{1}_A(x) + \mathbf{1}_{A-y}(x)\big) \,\mathrm{d}\lambda(x) = \lambda(A) + \lambda(A-y) = 2\lambda(A).$$

II.1. Soit $A =]a, b[$ $(a < b)$ un intervalle ouvert borné. On a $\mathbf{1}_A(x+y) = \mathbf{1}_{A-y}(x)$ avec $A - y = \{x \in \mathbf{R} \mid x + y \in A\} =]a-y, b-y[$.

Pour $0 \leq y < b - a$, on a $a - y < a < b - y < b$ et on obtient en regardant successivement les cas $x \leq a - y$; $a - y < x \leq a$; $a < x < b - y$; $b - y \leq x < b$; $b \leq x$ l'égalité entre fonctions :

$$|\mathbf{1}_A - \mathbf{1}_{A-y}| = \mathbf{1}_{]a-y,a]} + \mathbf{1}_{[b-y,b[}.$$

Par conséquent, pour $0 \leq y < b - a$, $F_A(y) = \lambda(]a-y, a]) + \lambda([b-y, b[) = 2y$.

De même, pour $a - b < y < 0$, on a

$$|\mathbf{1}_A - \mathbf{1}_{A-y}| = \mathbf{1}_{]a,a-y]} + \mathbf{1}_{[b,b-y[},$$

donc $F_A(y) = -2y$.

Finalement, pour tout y tel que $|y| < b - a$, $F(y) = 2|y|$ donc

$$\lim_{y\to 0} F_A(y) = 0.$$

II.2. Soit $A = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} J_n$, où les J_n sont des intervalles ouverts bornés deux à deux disjoints.

1. On a $\mathbf{1}_A = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{1}_{J_n}$ et dans cette série, en chaque point, un terme au plus est non nul. Pour tous x, y de $\mathbf{R}$,

$$\begin{aligned} |\mathbf{1}_A(x) - \mathbf{1}_A(x+y)| &= \left| \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{1}_{J_n}(x) - \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{1}_{J_n}(x+y) \right| \\ &\leq \sum_{n=0}^{+\infty} |\mathbf{1}_{J_n}(x) - \mathbf{1}_{J_n}(x+y)|, \end{aligned}$$

donc
$$F_A(y) \leq \int_{\mathbf{R}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |\mathbf{1}_{J_n}(x) - \mathbf{1}_{J_n}(x+y)| \right) \mathrm{d}\lambda(x).$$
Le corollaire du théorème de Beppo-Levi pour les séries de fonctions mesurables positives donne
$$\int_{\mathbf{R}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |\mathbf{1}_{J_n}(x) - \mathbf{1}_{J_n}(x+y)| \right) \mathrm{d}\lambda(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\mathbf{R}} |\mathbf{1}_{J_n}(x) - \mathbf{1}_{J_n}(x+y)| \, \mathrm{d}\lambda(x),$$
le terme de droite étant égal à $\sum_{n=0}^{+\infty} F_{J_n}(y)$, qui est majoré par $\sum_{n=0}^{+\infty} 2\lambda(J_n)$ d'après la remarque faite dans **II.1.**. Enfin $\sum_{n=0}^{+\infty} 2\lambda(J_n) = 2\lambda(A)$ puisque A est l'union disjointe des J_n.
On a donc montré
$$F_A(y) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} F_{J_n}(y) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} 2\lambda(J_n) = 2\lambda(A) < +\infty.$$

2. Pour montrer que $\lim_{y\to 0} F_A(y) = 0$, il suffit de montrer que pour toute suite $(y_p)_{p\in\mathbf{N}}$ tendant vers 0, $\lim_{p\to+\infty} F_A(y_p) = 0$. Soit donc $(y_p)_{p\in\mathbf{N}}$ une suite tendant vers 0. D'après 1), $F_A(y_p) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} F_{J_n}(y_p)$. On va appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue aux fonctions f_p définies par $f_p(n) = F_{J_n}(y_p)$ et avec la mesure $\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} \delta_n$ (mesure de comptage de $\mathbf{N}$) :
a) pour tout n de $\mathbf{N}$, $\lim_{p\to+\infty} f_p(n) = \lim_{p\to+\infty} F_{J_n}(y_p) = 0$ d'après **II.1.** ;
b) d'après 1., pour tout n de $\mathbf{N}$, $|f_p(n)| = |F_{J_n}(y_p)| \leq 2\lambda(J_n) = g(n)$ en notant $g(n) = 2\lambda(J_n)$. De plus, $\int_{\mathbf{N}} g \, \mathrm{d}\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} g(n) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2\lambda(J_n) = 2\lambda(A) < +\infty$ donc g est intégrable par rapport à μ.
Le théorème de Lebesgue s'applique donc : on obtient $\lim_{p\to+\infty} \int_{\mathbf{N}} f_p \, \mathrm{d}\mu = 0$, c'est-à-dire $\lim_{p\to+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} F_{J_n}(y_p) = 0$.

Conclusion : $\lim_{y\to 0} F_A(y) = 0$ pour tout ouvert borné A, puisque tout ouvert de $\mathbf{R}$ s'écrit comme union dénombrable d'intervalles ouverts disjoints (ses composantes connexes).

II.3. Soit A un borélien borné quelconque. Soit $\varepsilon > 0$ et $(y_p)_{p\in\mathbf{N}}$ une suite tendant vers 0. Soit J un ouvert tel que $A \subset J$ et $\lambda(J \setminus A) < \varepsilon$. Comme J est l'union disjointe de A et $J \setminus A$, $\mathbf{1}_A = \mathbf{1}_J - \mathbf{1}_{J\setminus A}$. On en déduit immédiatement
$$F_A(y_p) \leq F_J(y_p) + F_{J\setminus A}(y_p) \leq F_J(y_p) + 2\lambda(J \setminus A) \leq F_J(y_p) + 2\varepsilon$$
en utilisant la remarque du début de la deuxième partie. D'après **II.2.**, $\lim_{p\to+\infty} F_J(y_p) = 0$, donc $(0 \leq) \limsup_{p\to+\infty} F_A(y_p) < 2\varepsilon$ (on ne sait pas a priori si la limite existe). Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on obtient $\limsup_{p\to+\infty} F_A(y_p) = 0 = \liminf_{p\to+\infty} F_A(y_p)$, d'où la limite de $F_A(y_p)$ quand p tend vers $+\infty$ existe et vaut 0.

Conclusion : pour tout borélien borné A,
$$\lim_{y\to 0} \int_{\mathbf{R}} |\mathbf{1}_A(x) - \mathbf{1}_A(x+y)| \, \mathrm{d}\lambda(x) = 0.$$

Troisième partie

III.1. Soit A un borélien borné de $\mathbf{R}$. Pour tout x de $\mathbf{R}$, $|\mathrm{e}^{inx}\mathbf{1}_A(x)| = \mathbf{1}_A(x)$, Lebesgue-intégrable sur $\mathbf{R}$ puisque A est borné. Par définition, on peut alors écrire

$$\int_A \mathrm{e}^{inx}\,\mathrm{d}\lambda(x) = \int_{\mathbf{R}} \mathrm{e}^{inx}\mathbf{1}_A(x)\,\mathrm{d}\lambda(x).$$

Comme $\mathrm{e}^{inx} - \mathrm{e}^{in\left(x-\frac{\pi}{n}\right)} = \mathrm{e}^{inx} - \mathrm{e}^{inx-i\pi} = 2\mathrm{e}^{inx}$,

$$\begin{aligned}
\int_A \mathrm{e}^{inx}\,\mathrm{d}\lambda(x) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}} \mathbf{1}_A(x)\left(\mathrm{e}^{inx} - \mathrm{e}^{in\left(x-\frac{\pi}{n}\right)}\right)\,\mathrm{d}\lambda(x) \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}} \mathbf{1}_A(x)\mathrm{e}^{inx}\,\mathrm{d}\lambda(x) - \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}} \mathbf{1}_A(x)\mathrm{e}^{in\left(x-\frac{\pi}{n}\right)}\,\mathrm{d}\lambda(x) \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}} \left(\mathbf{1}_A(x) - \mathbf{1}_A\left(x+\frac{\pi}{n}\right)\right)\mathrm{e}^{inx}\,\mathrm{d}\lambda(x)
\end{aligned}$$

en faisant le changement de variables $\varphi(x) = x - \frac{\pi}{n}$ dans la seconde intégrale.

III.2. Soit A un borélien inclus dans $[0, 2\pi]$, donc borné. Alors

$$\begin{aligned}
\left|\int_A \mathrm{e}^{inx}\,\mathrm{d}\lambda(x)\right| &= \left|\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}} \left(\mathbf{1}_A(x) - \mathbf{1}_A\left(x+\frac{\pi}{n}\right)\right)\mathrm{e}^{inx}\,\mathrm{d}\lambda(x)\right| \\
&\leq \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}} \left|\mathbf{1}_A(x) - \mathbf{1}_A\left(x+\frac{\pi}{n}\right)\right|\,\mathrm{d}\lambda(x) \\
&= \frac{1}{2}F_A\left(\frac{\pi}{n}\right),
\end{aligned}$$

en notant comme dans la deuxième partie

$$F_A(y) = \int_{\mathbf{R}} \left|\mathbf{1}_A(x) - \mathbf{1}_A\left(x+\frac{\pi}{n}\right)\right|\,\mathrm{d}\lambda(x).$$

D'après la deuxième partie, $F_A\left(\frac{\pi}{n}\right)$ tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini donc $\lim_{n\to+\infty}\int_A \mathrm{e}^{inx}\,\mathrm{d}\lambda(x) = 0$ et en séparant partie réelle et partie imaginaire, on obtient $\lim_{n\to+\infty}\int_A \cos(nx)\,\mathrm{d}\lambda(x) = 0$ et $\lim_{n\to+\infty}\int_A \sin(nx)\,\mathrm{d}\lambda(x) = 0$.

III.3. Soit $u = (n_k)_{k\in\mathbf{N}}$ une suite strictement croissante d'entiers positifs et E_u l'ensemble des x de $[0, 2\pi]$ tels que la suite $(\sin(n_k x))_{k\in\mathbf{N}}$ converge. D'après **I.1.** et la remarque faite alors, E_u est borélien. Pour tout x de $[0, 2\pi]$ et tout k de $\mathbf{N}$, $2\sin^2(n_k x) = 1 - \cos(2n_k x)$ donc pour tout borélien B contenu dans E_u,

$$\int_B 2\sin^2(n_k x)\,\mathrm{d}\lambda(x) = \int_B \mathrm{d}\lambda(x) - \int_B \cos(2n_k x)\,\mathrm{d}\lambda(x),$$

chacun de ces trois termes étant défini puisque B est borné. D'après la question **II.2.**, $\lim_{k\to+\infty}\int_A \cos(2n_k x)\,\mathrm{d}\lambda(x) = 0$ donc $\lim_{k\to+\infty}\int_A \sin^2(n_k x)\,\mathrm{d}\lambda(x) = \lambda(B)$.

D'autre part, pour tout $x \in [0, 2\pi]$, la limite quand k tend vers $+\infty$ de $2\sin^2(n_k x)\mathbf{1}_B(x)$ existe et $|2\sin(n_k x)\mathbf{1}_B(x)| \leq 2$, λ-intégrable sur $[0, 2\pi]$. On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée sur l'espace mesuré $([0, 2\pi], \mathrm{Bor}([0, 2\pi]), \lambda)$: la fonction $f(x) = \lim_{k\to+\infty} 2\sin^2(n_k x)\mathbf{1}_B(x)$ est borélienne et

$$\int_{[0,2\pi]} f \,\mathrm{d}\lambda = \lim_{k\to+\infty} \int 2\sin^2(n_k x)\mathbf{1}_B(x)\,\mathrm{d}\lambda(x)$$

c'est-à-dire

$$\int_B f\,\mathrm{d}\lambda = \int_B 1\,\mathrm{d}\lambda.$$

D'après **I.3.**, $\lim_{k\to+\infty} 2\sin^2(n_k x) = 1$ λ-p.p. sur E_u, c'est-à-dire $\lim_{k\to+\infty} \sin(n_k x) = \pm\sqrt{1/2}$ λ-p.p. sur E_u. Cela permet d'écrire E_u comme réunion disjointe de trois boréliens E_u^+, E_u^- et N λ- négligeable où

$$\begin{aligned} E_u^+ &= \left\{x \in [0, 2\pi] \mid \lim_{k\to+\infty} \sin(n_k x) = \sqrt{1/2}\right\}, \\ E_u^- &= \left\{x \in [0, 2\pi] \mid \lim_{k\to+\infty} \sin(n_k x) = -\sqrt{1/2}\right\} \end{aligned}$$

Enfin, en appliquant le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{k\to+\infty} \int_{E_u^+} \sin(n_k x)\,\mathrm{d}\lambda(x) = \int_{E_u^+} \sqrt{1/2}\,\mathrm{d}\lambda = \sqrt{1/2}\cdot\lambda(E_u^+)$$

et donc d'après **III.2** $\lambda(E_u^+) = 0$. On montre de même que $\lambda(E_u^-) = 0$, donc $\lambda(E_u) = 0$.

III.4 1. Pour tout x de $[0, 2\pi]$, $(\sin(nx))_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite d'éléments du compact $[-1, 1]$, donc on peut en extraire une sous-suite convergente, c'est-à-dire $x \in F$.

2. Par définition, $F = \cup_{u\in\mathcal{N}} E_u$, or $\lambda(F) = \lambda([0, 2\pi]) = 2\pi$ et pour tout u de $\mathcal{N}$, $\lambda(E_u) = 0$. Cela montre que la formule $0 \leq \lambda(F) \leq \sum_{u\in\mathcal{N}} \lambda(E_u) = 0$ ne s'applique pas, donc que $\mathcal{N}$ n'est pas dénombrable.

De fait, on voit facilement que $\mathcal{N}$ est en bijection avec le sous-ensemble de $\mathcal{P}(\mathbf{N})$ formé des parties infinies de $\mathbf{N}$; comme $\mathcal{P}(\mathbf{N})$ n'est pas dénombrable et comme l'ensemble des parties finies de $\mathbf{N}$ est dénombrable, on voit que $\mathcal{N}$ n'est pas dénombrable.

Exercice

1) **Attention :** $Y_n = \max_{k\in\{1,\ldots,n\}} X_k$ n'est pas nécessairement égale à l'une des variables aléatoires X_k.

Puisque la famille $\{]-\infty, x] \mid x \in \mathbf{R}\}$ engendre la tribu $\mathrm{Bor}(\mathbf{R})$, pour montrer que $Y_n = \max_{k\in\{1,\ldots,n\}} X_k$ est une variable aléatoire, il suffit de montrer que pour tout x de

$\mathbf{R}$, $Y_n^{-1}(]-\infty, x]) \in \mathcal{F}$. Or

$$\begin{array}{rcl} Y_n^{-1}(]-\infty, x]) & = & \{\omega \in \Omega \mid Y_n(\omega) \in]-\infty, x]\} \\ & = & \{\omega \in \Omega \mid Y_n(\omega) = \max\limits_{k\in\{1,\dots,n\}} X_k(\omega) \leq x\} \\ & = & \{\omega \in \Omega \mid \forall k \in \{1, \dots, n\},\ X_k(\omega) \leq x\} \\ & = & \bigcap\limits_{k\in\{1,\dots,n\}} X_k^{-1}\left(]-\infty, x]\right) \end{array}$$

donc Y_n est une variable aléatoire. Soit F_n sa fonction de répartition. Pour tout x de $\mathbf{R}$,

$$\begin{array}{rcl} F_n(x) & = & P\left(Y_n^{-1}(]-\infty, x])\right) = P\left(\bigcap\limits_{k\in\{1,\dots,n\}} X_k^{-1}\left(]-\infty, x]\right)\right) \\ & = & \prod\limits_{k=1}^{n} P\left(X_k^{-1}(]-\infty, x])\right) \end{array}$$

la dernière égalité étant obtenue grâce à l'indépendance des v.a.r. X_k. Les X_k suivant toutes une loi uniforme sur $[0, \theta]$, on obtient

$$F_n(x) = \left(\frac{\lambda\left(]-\infty, x] \cap [0, \theta]\right)}{\lambda([0, \theta])}\right)^n,$$

ce qui vaut 0 si $x \leq 0$; 1 si $x \geq 1$; $(x/\theta)^n$ si $0 < x < \theta$.

2) Pour tout n, $0 \leq X_n \leq \theta$ p.s. donc $0 \leq Y_n \leq \theta$ p.s. En effet,

$$\begin{array}{rcl} P\left(\{\forall k \in \{1, \dots, n\},\ 0 \leq X_k \leq \theta\}\right) & = & 1 - P\left(\exists k \in \{1, \dots, n\},\ X_k < 0 \text{ ou } X_k > \theta\}\right) \\ & \geq & 1 - \sum_{k=1}^{n} P\left(X_k < 0 \text{ ou } X_k > \theta\}\right) = 1 \end{array}$$

et si $\omega \in \bigcap_{1\leq k\leq n} X_k^{-1}([0, \theta])$, alors $Y_n(\omega) \in [0, \theta]$.

Par conséquent $\int_\Omega |Y_n| \, \mathrm{d}P \leq \int_\Omega \theta \, \mathrm{d}P = \theta < +\infty$, donc Y_n est P-intégrable, c'est-à-dire admet une espérance. Comme Y_n est p.s. positive, on peut utiliser la formule admise :

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{E}(Y_n) & = & \displaystyle\int_0^{+\infty} P(Y_n > t) \, \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \left(1 - P(Y_n \leq t)\right) \mathrm{d}t \\ & = & \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(1 - F_n(t)\right) \mathrm{d}t = \int_0^{\theta} \left\{1 - \left(\frac{t}{\theta}\right)^n\right\} \mathrm{d}t \\ & = & \displaystyle\left[t + \frac{\theta}{n+1}\left(\frac{t}{\theta}\right)^{n+1}\right]_0^{\theta} = \theta - \frac{\theta}{n+1} = \frac{n\theta}{n+1} \end{array}$$

3) Posons $Y = \sup_{k\geq 1} X_k$. C'est une variable aléatoire car pour tout x de $\mathbf{R}$,

$$Y^{-1}(]-\infty, x]) = \bigcap_{k\geq 1} X_k^{-1}(]-\infty, x]) \in \mathcal{F}.$$

Il est facile de voir que pour chaque ω de Ω, $Y(\omega)$ est la limite de la suite croissante $(Y_n(\omega))_{n\geq 1}$ (pour tout $k \geq 1, X_k(\omega) \leq Y_n(\omega)$ dès que $n \geq k$, donc $X_k(\omega) \leq \lim_{n\to+\infty} Y_n(\omega)$ et $Y(\omega) = \sup_{k\geq 1} X_k(\omega) \leq \lim_{n\to+\infty} Y_n(\omega)$; réciproquement, pour tout $n \geq 1$, $Y_n(\omega) \leq \sup_{k\geq 1} X_k(\omega) = Y(\omega)$ d'où $\lim_{n\to+\infty} Y_n(\omega) \leq Y(\omega)$), c'est-à-dire Y_n tend vers Y sur Ω.

Si on veut que la variable aléatoire limite soit réelle, ce qui n'est pas précisé dans l'énoncé, on prend $Y' = Y \cdot \mathbf{1}_A$ avec $A = Y^{-1}[0,\theta]$. Comme $\bigcap_{k\geq 1} X_k^{-1}[0,\theta] \subset A$, $P(A) = 1$ donc $P(\lim_{n\to+\infty} Y_n = Y') = 1$.

4) On a $Y_n \leq Y$ (seulement p.s. si l'on prend le Y' de la question 3)), et Y_n et Y sont p.s. positives, donc égales p.s. à leur valeur absolue. Par conséquent, $|Y_n| \leq |Y|$ p.s. Comme $Y_n \to Y$ p.s., le théorème de Lebesgue s'applique : $\lim_{n\to+\infty} \mathbf{E}(Y_n) = \mathbf{E}(Y)$.

Or d'après 2), $\lim_{n\to+\infty} \mathbf{E}(Y_n) = \theta$ donc $\mathbf{E}(Y) = \theta = \int_\Omega \theta \,\mathrm{d}P$, c'est-à-dire $\int_\Omega (\theta - Y)\,\mathrm{d}P = 0$. Comme $\theta - Y \geq 0$ p.s., $\theta - Y = 0$ p.s. (voir par exemple le problème **I.2.**) donc $Y = \theta$ p.s.