Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IFP **Année 2001-02**

Corrigé du Devoir n° 1
4 mars 2002

Ex 1. *Une loi discrète pathologique*
Le but de cet exercice est de construire et d'étudier une v.a. discrète ayant pour ensemble $X(\Omega)$ de valeurs possibles l'ensemble $\mathbb{D}$ des nombres *décimaux* de $[0,1[$. Un nombre décimal peut se représenter par une suite *finie* de *chiffres décimaux*. Cette représentation n'est pas unique, par exemple : 0,375 = 0,375 0 = 0,375 00 = 0,375 000 = ...
On peut aussi l'écrire sous la forme $k10^{-n}$ avec $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Si k n'est pas divisible par 10, nous dirons que l'on a la forme réduite (pour l'exemple précédent, $k = 375$ et $n = 3$). On notera $\mathbb{D}_n$ l'ensemble des décimaux de $[0,1[$ ayant le niveau de résolution n, c'est-à-dire de forme réduite $k10^{-n}$ (on posera $\mathbb{D}_0 = \{0\}$).

Nous construisons X par la procédure suivante. On dispose de deux urnes. La première contient des boules rouges et des vertes. On note p la proportion de boules rouges ($0 < p < 1$) et q celle des vertes. La deuxième urne contient 10 boules numérotées de 0 à 9. On effectue des tirages avec remise dans la première urne jusqu'à la première apparition d'une rouge. On note N le nombre (aléatoire) de tirages nécessaires. Une fois connue la valeur de N, on effectue N tirages avec remise d'une boule dans la deuxième urne. En notant Y_j le *chiffre* sorti lors du j-ème tirage dans la deuxième urne ($i \leq N$), on forme le nombre décimal :

$$X(\omega) = 0, Y_1(\omega)Y_2(\omega)\dots Y_{N(\omega)}(\omega) = \sum_{j=1}^{N(\omega)} \frac{Y_j(\omega)}{10^j}.$$

1) N est le *temps d'attente* du premier succès dans une suite d'épreuves répétées indépendantes[1] avec à chaque épreuve même probabilité de succès p. On sait [ICP, 3.3.5] que N suit la loi géométrique de paramètre p qui est caractérisée par :

$$N(\Omega) = \mathbb{N}^*, \qquad \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbf{P}(N = k) = q^{k-1}p.$$

2) Soit n fixé. Lorsque l'on effectue n tirages *avec remise* dans la deuxième urne, on considère que toutes les n-suites possibles de résultats (il y en 10^n) ont même probabilité de sortie. On modélise ainsi les tirages avec remise par $\Omega_n = \{0, 1, \dots, 8, 9\}^n$, muni de la

[1]Il est légitime de considérer les épreuves comme indépendantes parce que les tirages se font *avec remise*.

tribu $\mathcal{F}_n = \mathcal{P}(\Omega_n)$ et de la probabilité uniforme définie par $\mathbf{P}_n(\{\omega\}) = 1/\operatorname{card}\Omega$. Avec ce modèle, la probabilité d'obtenir une suite $\omega = (c_1, \ldots, c_n)$ de n chiffres décimaux choisie à l'avance est donc 10^{-n}.

Tout espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ modélisant correctement l'expérience étudiée doit donner pour $\mathbf{P}(Y_1 = c_1, Y_2 = c_2, \ldots, Y_n = c_n \mid N = n)$ la même valeur que lorsqu'on fait dès le départ n tirages avec remise, autrement dit

$$\mathbf{P}(Y_1 = c_1, Y_2 = c_2, \ldots, Y_n = c_n \mid N = n) = \mathbf{P}_n(\{\omega\}) = 10^{-n}, \quad \omega = (c_1, \ldots, c_n) \in \Omega_n.$$

Ce raisonnement de type « cahier des charges » est standard en théorie des probabilités. Il est assez rare que l'on calcule $\mathbf{P}(A \mid B)$ par sa définition. On lui *attribue* directement une valeur en analysant l'expérience (lorsque la connaissance de la réalisation de B simplifie cette expérience) et on se sert de cette valeur pour en déduire celle que devrait avoir $\mathbf{P}(A \cap B)$ dans tout modèle « raisonnable ».

3) Il y a une infinité de façons d'écrire 0,375 sous la forme d'un développement décimal *fini*. La forme générale d'un tel développement est

$$0,375\ \underbrace{0\ldots\ldots0}_{(n-3)\text{ chiffres}}, \qquad n \geq 3.$$

Il y a aussi un autre développement décimal de $0,375$, mais celui-là est *illimité*, c'est 0,374 999 999 999 999 9 … 9 … . Il est exclu que l'on puisse obtenir un tel développement avec l'expérience envisagée car comme $p > 0$, $\mathbf{P}(N < +\infty) = 1$, voir [ICP, 3.3.5].

Avant de se lancer dans le calcul, remarquons que $\{X = 0{,}375\}$ implique $\{N \geq 3\}$, ce qui s'écrit aussi $\{X = 0{,}375\} \subset \{N \geq 3\}$. On en déduit

$$\{X = 0{,}375\} = \{X = 0{,}375\} \cap \{N \geq 3\} = \{X = 0{,}375\} \cap \Big(\bigcup_{k \geq 3} \{N = k\} \Big).$$

Ceci nous donne une décomposition en réunion dénombrable d'évènements deux à deux incompatibles :

$$\{X = 0{,}375\} = \bigcup_{j \geq 3} \Big(\{X = 0{,}375\} \cap \{N = j\} \Big).$$

En utilisant la σ-additivité de $\mathbf{P}$, on en déduit

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X = 0{,}375) &= \sum_{j=3}^{+\infty} \mathbf{P}\Big(\{X = 0{,}375\} \cap \{N = j\} \Big) \\ &= \sum_{j=3}^{+\infty} \mathbf{P}\Big(\{Y_1 = 3, Y_2 = 7, Y_3 = 5, Y_4 = 0, \ldots, Y_j = 0\} \cap \{N = j\} \Big). \end{aligned}$$

La formule $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A \mid B)\mathbf{P}(B)$ (quand $\mathbf{P}(B) > 0$) et les résultats des questions 1) et 2) nous donnent

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\Big(\{Y_1 = 3, Y_2 = 7, Y_3 = 5, Y_4 = 0, \ldots, Y_j = 0\} \cap \{N = j\} \Big) &= \\ \mathbf{P}\Big(Y_1 = 3, Y_2 = 7, Y_3 = 5, Y_4 = 0, \ldots, Y_j = 0 \mid N = j \Big) \mathbf{P}(N = j) &= 10^{-j} q^{j-1} p. \end{aligned}$$

Finalement le calcul de $\mathbf{P}(X = 0{,}375)$ se ramène à un calcul de série géométrique :

$$\mathbf{P}(X = 0{,}375) = \sum_{j=3}^{+\infty} 10^{-j} q^{j-1} p = \frac{p}{q} \sum_{j=3}^{+\infty} \Big(\frac{q}{10}\Big)^j = \frac{p}{q}\Big(\frac{q}{10}\Big)^3 \frac{1}{1-\frac{q}{10}} = \frac{pq^2}{100(10-q)}.$$

Pour généraliser ce résultat, soit $d \in \mathbb{D}_n$ et $d = k10^{-n}$ sa forme réduite. Soit

$$k = u_1 10^{n-1} + u_2 10^{n-1} + \dots u_{n-1}10 + u_n, \quad u_i \in \{0, \dots, 9\},\ i = 1, \dots, n,$$

l'écriture en base 10 de l'entier k. Une adaptation immédiate de la décomposition utilisée pour le cas $d = 0{,}375$ nous conduit à

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X = d) &= \sum_{j=n}^{+\infty} \mathbf{P}\big(Y_i = u_i\ (1 \le i \le n) \text{ et } Y_i = 0\ (n < i \le j) \mid N = j\big)\mathbf{P}(N = j) \\
&= \sum_{j=n}^{+\infty} 10^{-j} q^{j-1} p \\
&= \frac{p}{q}\Big(\frac{q}{10}\Big)^n \frac{1}{1-\frac{q}{10}}.
\end{aligned}$$

Après simplification, on obtient

$$\mathbf{P}(X = d) = \frac{pq^{n-1}}{(10-q)10^{n-1}} = \frac{p}{9+p}\Big(\frac{q}{10}\Big)^{n-1}, \qquad d \in \mathbb{D}_n,\ n \ge 1. \tag{1}$$

Le cas particulier $d = 0$ se traite de manière analogue :

$$\mathbf{P}(X = 0) = \sum_{j=1}^{+\infty} \mathbf{P}\big(Y_i = 0\ (1 \le i \le j) \mid N = j\big)\mathbf{P}(N = j) = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{q^{j-1}p}{10^j} = \frac{p}{9+p}.$$

4) Pour vérifier que $\mathbb{D}$ est dénombrable, on pourrait se contenter de remarquer que $\mathbb{D}$ est union dénombrable des ensembles finis deux à deux disjoints $\mathbb{D}_n$. Pour construire une numérotation explicite des éléments de $\mathbb{D}$, une idée simple est de considérer successivement chaque $\mathbb{D}_n$ et de numéroter de gauche à droite les éléments de l'ensemble fini $\mathbb{D}_n$ avec les plus petits entiers non déjà utilisés à l'étape $n-1$. Notons $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{N}$ cette numérotation. Voici le début de sa construction :

$\mathbb{D}_0$

d	0
$\varphi(d)$	0

$\mathbb{D}_1$

$10d$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\varphi(d)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9

$\mathbb{D}_2$

$100d$	1	2	…	8	9	11	12	…	19	21	……	88	89	91	…	99
$\varphi(d)$	10	11	…	17	18	19	20	…	27	28	……	89	90	91	…	99

Afin d'obtenir une formule pour le calcul de $\varphi(d)$ on dénombre $\mathbb{D}_n$. Il suffit pour cela de remarquer que les éléments de $\mathbb{D}_n$ sont les $k10^{-n}$ lorsque $0 \leq k < 10^n$, sauf ceux pour lesquels k est multiple de 10 :

$$\mathbb{D}_n = \left\{ \frac{k}{10^n};\ 0 \leq k < 10^n \right\} \setminus \left\{ \frac{10l}{10^n};\ 0 \leq l < 10^{n-1} \right\}. \tag{2}$$

On en déduit immédiatement que

$$\operatorname{card} D_n = 10^n - 10^{n-1}.$$

De même on vérifie, soit par un raisonnement direct, soit par cette formule que

$$\operatorname{card}\Big(\bigcup_{j=0}^{n-1} \mathbb{D}_j\Big) = 1 + \sum_{j=1}^{n-1}(10^j - 10^{j-1}) = 10^{n-1}, \quad n \geq 1.$$

On en déduit (en prenant garde au fait que la numérotation commence à 0) que le plus grand élément de D_{n-1} et le plus petit élément de $\mathbb{D}_n$ ont pour numéros respectifs,

$$\varphi\Big(\frac{10^{n-1}-1}{10^{n-1}}\Big) = 10^{n-1} - 1, \quad \varphi\Big(\frac{1}{10^n}\Big) = 10^{n-1}.$$

Finalement, soit $d \in \mathbb{D}_n$, on peut l'écrire $d = k10^{-n}$ avec $k = 10l + r$, $1 \leq r \leq 9$. Dans cette division euclidienne de k par 10, la valeur du quotient l permet de compter tous les multiples de 10 inférieurs à k : il y en a $l + 1$ (zéro compris). Le numéro de k dans la liste des entiers de 0 à k étant $k + 1$, on obtient

$$\varphi(d) = (10^{n-1} - 1) + (k + 1) - (l + 1) = 10^{n-1} + k - l.$$

Notons $[x]$ la partie entière du réel x, unique entier m tel que $m \leq x < m + 1$. Comme $l = [k/10]$ et $k = 10^n d$, on aboutit à

$$\varphi(d) = 10^n d + 10^{n-1} - \big[10^{n-1}d\big] - 1, \quad d \in \mathbb{D}_n,\ n \geq 1.$$

5) La bijection $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{N}$ construite ci-dessus est croissante séparément sur chaque $\mathbb{D}_n$, mais pas globalement sur $\mathbb{D}$. Il en résulte que $\varphi^{-1} : \mathbb{N} \to \mathbb{D}$ n'est pas croissante.

Montrons qu'il n'existe aucune numérotation *croissante* des éléments de $X(\Omega) = \mathbb{D}$ (i.e. vérifiant $X(\Omega) = \mathbb{D} = \{x_k; k \in \mathbb{N}\}$ avec $\forall k \in \mathbb{N}$, $x_k < x_{k+1}$). Supposons que $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{D}$ soit une telle numérotation croissante ($\psi(k) = x_k$). D'abord, nécessairement, $\psi(0) = x_0 = 0$ car sinon $x_0 > 0$ et comme ψ est croissante, $\psi(k) > x_0 > 0$ pour tout $k \geq 1$ et zéro ne serait jamais numéroté par ψ. Ensuite par croissance de ψ, $x_1 > x_0 = 0$ et $\forall k \geq 2$, $x_k > x_1$. Comme ψ est surjective, il n'y a donc *aucun* élément de $\mathbb{D}$ dans $]0, x_1[$. Ceci contredit la densité de $\mathbb{D}$ dans $[0, 1]$.

6) *Calcul de* $\displaystyle\sum_{d \in \mathbb{D}_n} d$.

Il suffit d'utiliser (2) et la formule donnant la somme des termes d'une suite arithmétique (nombre de termes multiplié par la moyenne du premier et du dernier) :

$$\begin{aligned}\sum_{d\in\mathbb{D}_n} d &= \sum_{k=1}^{10^n-1}\frac{k}{10^n}-\sum_{l=1}^{10^{n-1}-1}\frac{l}{10^{n-1}}\\ &= \frac{1}{10^n}\frac{(10^n-1)10^n}{2}-\frac{1}{10^{n-1}}\frac{(10^{n-1}-1)10^{n-1}}{2}.\end{aligned}$$

Après simplification, on obtient

$$\sum_{d\in\mathbb{D}_n} d=\frac{9}{2}\times 10^{n-1},\quad n\geq 1. \tag{3}$$

7) Comme X est une variable aléatoire discrète positive, d'ensemble de valeurs $X(\Omega)=\mathbb{D}$, son espérance $\mathbf{E}X$ existe si la série $\sum_{d\in\mathbb{D}} d\,\mathbf{P}(X=d)$ converge et $\mathbf{E}X$ vaut alors la somme de cette série.

La règle de sommation par paquets des séries à termes *positifs* (convergentes ou non dans $\mathbb{R}_+$) nous permet d'écrire

$$\sum_{d\in\mathbb{D}} d\,\mathbf{P}(X=d)=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{d\in\mathbb{D}_n} d\,\mathbf{P}(X=d).$$

Pour tous les d dans D_n, les $\mathbf{P}(X=d)$ ont la même valeur donnée par (1) ; compte-tenu de (3), ceci nous permet de voir que la convergence de la série équivaut à celle de la série géométrique de raison q $(0<q<1)$ et de calculer sa somme :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}X &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{pq^{n-1}}{(10-q)10^{n-1}}\times\frac{9}{2}\times 10^{n-1}\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{9p}{2(10-q)}q^{n-1}\\ &= \frac{9p}{2(10-q)}\frac{1}{1-q}.\end{aligned}$$

En se souvenant que $q=1-p$, on obtient

$$\mathbf{E}X=\frac{9}{2(10-q)}=\frac{9}{2(9+p)}. \tag{4}$$

La fonction $p\mapsto(9+p)^{-1}$ étant strictement décroissante sur $[0,1]$, on a l'encadrement

$$\frac{9}{20}<\mathbf{E}X<\frac{1}{2}.$$

Pour interpréter cet encadrement, considérons d'abord le cas limite $p=1$. Dans ce cas il n'y a que des boules rouges dans la première urne et on effectue un seul tirage dans la deuxième. La loi de X est alors la loi uniforme sur $\Delta_1 := \{k/10;\ 0 \leq k \leq 9\} = \mathbb{D}_0 \cup \mathbb{D}_1$ son espérance est

$$\mathbf{E}X = \sum_{k=0}^{9} \frac{k}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{10^2} \sum_{k=0}^{9} k = \frac{1}{10^2} \times \frac{10(0+9)}{2} = \frac{9}{20} = 0{,}45 \qquad (p = 1).$$

Cette espérance est le barycentre du système de masses ponctuelles de cette loi uniforme sur Δ_1. Si on avait considéré la loi uniforme sur $\Delta_1 \cup \{1\}$, on aurait trouvé comme barycentre 1/2. Ce décalage vers la gauche du barycentre se retrouve quand on fait n tirages dans la deuxième urne. La loi du nombre décimal aléatoire Z_n de $\Delta_n = \{k10^{-n};\ 0 \leq k < 10^n\} = \bigcup_{j=0}^{n} \mathbb{D}_j$ ainsi fabriqué a pour espérance

$$\mathbf{E}Z_n = \sum_{k=0}^{10^n-1} \frac{k}{10^n} \times \frac{1}{10^n} = \frac{1}{10^{2n}} \frac{10^n(10^n-1)}{2} = \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{1}{10^n}\Big).$$

On observe que ce décalage du barycentre vers la gauche s'atténue quand n augmente. Notons Q_n la loi de Z_n. Comme on l'a vu à la question 2), on a

$$Q_n(\{d\}) = \mathbf{P}(Z_n = d) = \mathbf{P}(X = d \mid N = n) \qquad (d \in \Delta_n).$$

On peut donc dire que Q_n est aussi la *loi conditionnelle* de X sachant $\{N = n\}$, c'est-à-dire la mesure image [2] par X de la probabilité $\mathbf{P}(\ .\ \mid N = n)$. La formule des probabilités totales nous dit que pour tout $A \in \mathrm{Bor}(\mathbb{R})$,

$$P_X(A) = \mathbf{P}(X \in A) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbf{P}(X \in A \mid N = n)\mathbf{P}(N = n) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} Q_n(A)\mathbf{P}(N = n).$$

On voit ainsi que la loi P_X de X est un *mélange* des lois Q_n avec pour coefficients les $\mathbf{P}(N = n)$, ce qui se traduit par l'égalité de mesures :

$$P_X = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbf{P}(N = n) Q_n.$$

À partir de cette formule, il est facile de vérifier (faites le !) que

$$\mathbf{E}X = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(N = n)\mathbf{E}Z_n. \tag{5}$$

Si l'objectif du problème avait seulement été le calcul de $\mathbf{E}X$, cette méthode aurait même été plus simple que celle exposée ci-dessus.

Avec (5), on comprend que la barycentre de la loi de X est d'autant plus proche de 1/2 que les valeurs de $\mathbf{E}Z_n$ pour n grand ont un poids plus élevé, autrement dit

[2] On considère X comme une variable aléatoire sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}(\ .\ \mid N = n))$ au lieu de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

que $\mathbf{P}(N = n)$ tend plus lentement vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Et bien sûr, cette convergence est d'autant plus lente que q est plus grand donc p plus petit.

Considérons enfin le cas limite $p = 0$. Dans ce cas on n'obtient jamais de boule rouge et on ferait une infinité de tirages dans la première urne et donc on devrait faire une infinité de tirages remise dans la deuxième. Passant sur l'impossibilité physique de cette expérience[3], on peut quand même *définir* mathématiquement la variable aléatoire X dans ce cas par

$$X = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{Y_j(\omega)}{10^j}.$$

Cette série converge pour tout ω. La loi de X est alors la mesure de Lebesgue sur $[0, 1[$ (lire à ce sujet [ICP, 6.5]) et son espérance ou barycentre est 1/2.

8) Soit F la fonction de répartition de X : $F(x) = \mathbf{P}(X \leq x)$. On sait que F est continue à droite et a une limite à gauche en tout point. De plus pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$F(a) - F(a^-) = \mathbf{P}(X = a) = P_X(\{a\}), \tag{6}$$

en notant $F(a^-)$ la limite à gauche de F au point a [ICP, Th. 3.4, Lem. 3.5]. D'après (6), en tout point $d \in \mathbb{D}$, on a $F(d) > F(d^-) \geq F(x)$ pour $x < d$. Comme tout intervalle ouvert de $[0, 1[$ contient un décimal, F n'est constante sur aucun intervalle ouvert de $[0, 1[$. Elle n'est donc pas en escaliers sur $[0, 1[$. Ceci contraste avec les f.d.r. des lois discrètes usuelles (pour lesquelles on a une numérotation croissante de $X(\Omega)$ et où F est constante sur $[x_k, x_{k+1}[$, donc en escaliers).

9) Toujours d'après (6), F est continue au point a si $\mathbf{P}(X = a) = 0$, autrement dit si $a \notin \mathbb{D}$ et discontinue si $\mathbf{P}(X = a) > 0$, donc si $a \in \mathbb{D}$. On a donc construit à partir d'une expérience très simple une fonction de répartition discontinue en tout décimal de $[0, 1[$ et continue en tout réel non décimal de $[0, 1[$ (et aussi en tout $x \notin [0, 1[$).

10) *Calcul de* $\mathbf{P}(X \leq 0{,}375 \mid N = j)$.

Pour calculer cette probabilité conditionnelle, on se place dans la situation où l'évènement $\{N = j\}$ est *réalisé*. On effectue alors exactement j tirages avec remise dans la deuxième urne. Chaque suite de chiffres possible a alors même probabilité d'apparition 10^{-j}. Il revient au même de dire que le nombre décimal X ainsi généré suit la loi uniforme sur $\Delta_j = \{k10^{-j};\ 0 \leq k < 10^j\}$, ou encore que la variable aléatoire à valeurs *entières* $10^j X$ suit la loi uniforme sur $\{0, 1, 2, \dots, 10^j - 1\}$. On en déduit que

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X \leq 0{,}375 \mid N = j) &= \mathbf{P}(10^j X \leq 0{,}375 \times 10^j \mid N = j) \\ &= \mathbf{P}(10^j X \leq [0{,}375 \times 10^j] \mid N = j) \\ &= \frac{1 + [0{,}375 \times 10^j]}{10^j}. \end{aligned}$$

[3]On peut imaginer qu'il y ait deux expérimentateurs, le premier tirant les boules vertes et le second procédant à un nouveau tirage avec remise d'une boule numérotée chaque fois qu'une boule verte sort de la première urne, ainsi on n'attend pas un temps infini la première sortie d'une rouge pour commencer à construire X et on peut considérer que l'on réalise X par passage à la limite.

La partie entière $[0{,}375 \times 10^j]$ utilisée dans cette formule n'a d'importance que pour $j < 3$. En effet $0{,}375 \times 10^j$ est entier pour $j \geq 3$. Pour $j < 3$, on peut d'ailleurs vérifier directement que

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X \leq 0{,}375 \mid N = 1) &= \mathbf{P}(Y_1 \leq 3 \mid N = 1) = \frac{4}{10}, \\
\mathbf{P}(X \leq 0{,}375 \mid N = 2) &= \mathbf{P}\big((Y_1 \leq 2 \text{ et } Y_2 \text{ quelconque}) \text{ ou } (Y_1 = 3 \text{ et } Y_2 \leq 7) \mid N = 2\big) \\
&= \frac{38}{100}.
\end{aligned}$$

11) Le raisonnement fait à la question précédente se généralise immédiatement à d quelconque dans $\mathbb{D}$.

$$\forall d \in \mathbb{D}, \qquad P(X \leq d \mid N = j) = \frac{[10^j d] + 1}{10^j}. \tag{7}$$

12) *Calcul de $F(k/10)$ pour $0 \leq k \leq 9$.*
En appliquant la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}
F\Big(\frac{k}{10}\Big) = \mathbf{P}\Big(X \leq \frac{k}{10}\Big) &= \sum_{j=1}^{+\infty} \mathbf{P}\Big(X \leq \frac{k}{10} \mid N = j\Big)\mathbf{P}(N = j) \\
&= \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{[k10^{j-1}] + 1}{10^j}\, q^{j-1}p \\
&= \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{k}{10}\, q^{j-1}p + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{q^{j-1}p}{10^j} \\
&= \frac{k}{10} + \frac{p}{10} \sum_{j=1}^{+\infty} \Big(\frac{q}{10}\Big)^{j-1} \\
&= \frac{k}{10} + \frac{p}{9+p}.
\end{aligned}$$

Si $d = l/100$ avec $0 \leq l \leq 99$, on a $[10^j d] = 10^j d$ dès que $j \geq 2$. D'où le calcul

$$\begin{aligned}
F(d) = \mathbf{P}\Big(X \leq d\Big) &= \sum_{j=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X \leq d \mid N = j)\mathbf{P}(N = j) \\
&= \frac{[10d]}{10}p + \sum_{j=2}^{+\infty} dq^{j-1}p + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{q^{j-1}p}{10^j} \\
&= \frac{[10d]}{10}p + dq + \frac{p}{9+p}.
\end{aligned}$$

En particulier quand l est multiple de 10, $[10d]/10 = d$ et on retrouve la formule établie pour d de la forme $k/10$, $F(d) = d + p/(9+p) = d + F(0)$.

13) *Formule générale pour $F(d)$, $d \in \mathbb{D}$.*

Prenons $d = k10^{-n}$ (pas forcément sous forme réduite), $0 \leq k < 10^n$. Alors pour $j \geq n$ on a $[10^j d]10^{-j} = d$. En appliquant la même méthode que ci-dessus, on arrive à

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X \leq d) &= \sum_{j=1}^{n-1} \frac{[10^j d]}{10^j} q^{j-1}p + \sum_{j=2}^{+\infty} dq^{j-1}p + \frac{p}{9+p} \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} \frac{[10^j d]}{10^j} q^{j-1}p + dq^{n-1} + \frac{p}{9+p}.\end{aligned}$$

On peut voir que cette formule ne dépend pas de la représentation choisie pour d, en remarquant que si $k = 10^m l$, pour $j \geq n-m$, $[10^j d]10^{-j} = d$ et pour avoir la même valeur de $F(d)$ avec les deux représentations $d = k10^{-n}$ et $d = l10^{-n+m}$, il reste seulement à vérifier que

$$\sum_{j=n-m}^{n-1} q^{j-1}p + q^{n-1} = q^{n-m-1},$$

exercice élémentaire sur les suites géométriques, laissé au lecteur.

On présente maintenant quelques représentations graphiques de la fonction de répartition F, suivant les valeurs de p. À proprement parler, il est impossible de dessiner physiquement le graphe de F puisqu'il présente une infinité de discontinuités. On s'est contenté de faire calculer les valeurs de $F(d)$ pour $d = k10^{-4}$ et de les afficher [4]. Le niveau de résolution de l'écran et celui de l'imprimante donnent une illusion de continuité quand l'amplitude des sauts est inférieure à un pixel. Les zooms successifs montrent qu'il n'en est rien et font apparaître la structure fractale de F.

[4]Les calculs et les graphiques ont été réalisés avec le logiciel libre Scilab développé par l'INRIA. Ce logiciel peut être téléchargé à l'adresse URL `http ://www-rocq.inria.fr/scilab`

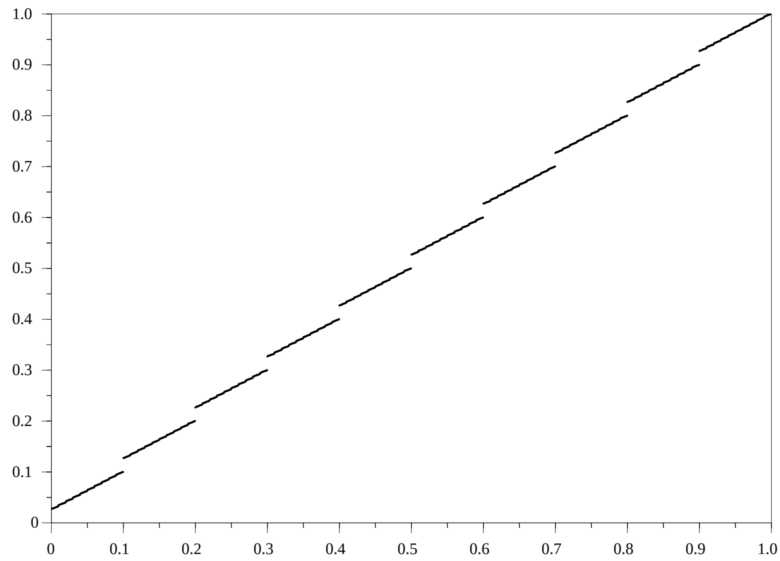

FIG. 1 – F pour $p = 0{,}25$

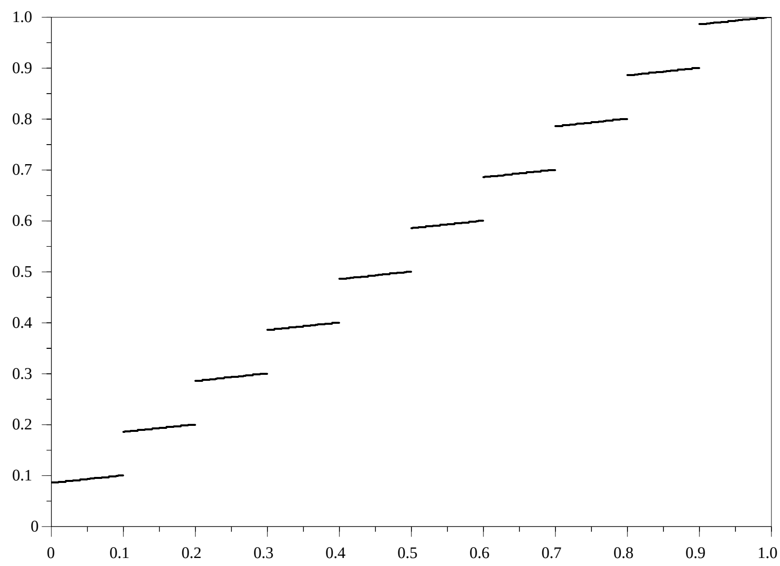

FIG. 2 – F pour $p = 0{,}85$

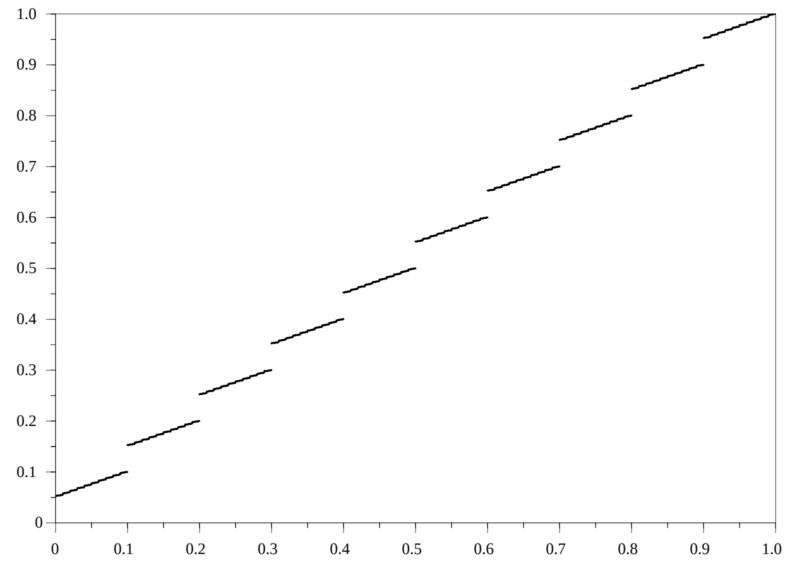

FIG. 3 – F pour $p = 0{,}5$

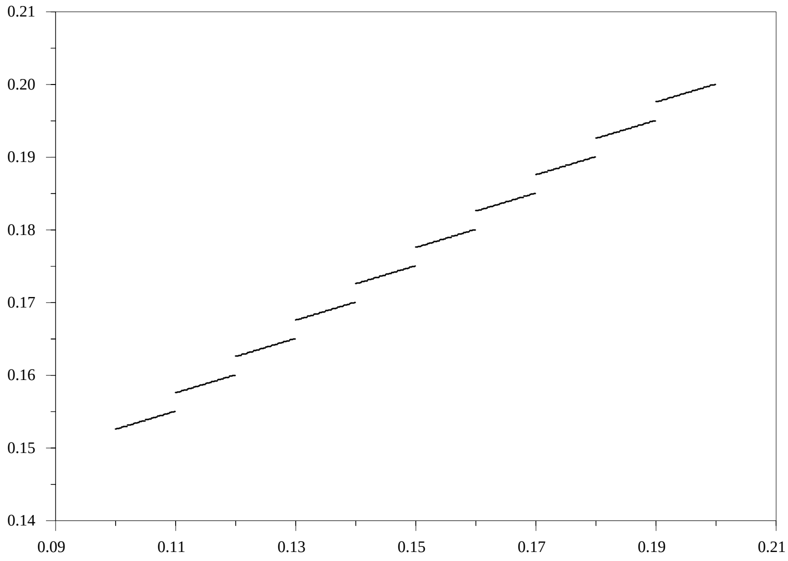

FIG. 4 – F pour $p = 0{,}5$, zoom sur $[0.1; 0.2]$

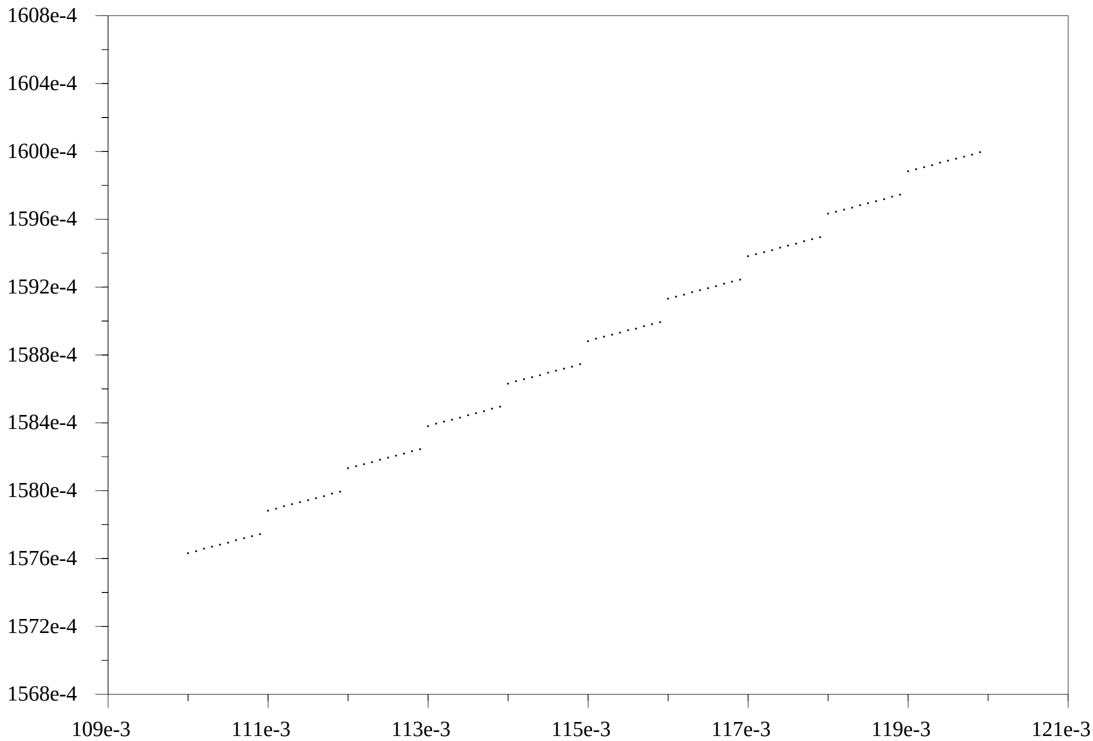

FIG. 5 – F pour $p = 0{,}5$, zoom sur $[0.11; 0.12]$

Ex 2.

Soit $\Omega = \{\omega_k;\ k \in \mathbb{N}\}$ un ensemble dénombrable, $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble de toutes les parties de Ω. On considère une fonction d'ensembles μ définie sur $\mathcal{P}(\Omega)$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ (en particulier $\mu(\Omega) < +\infty$). On suppose que μ a les propriétés suivantes :

a) μ est additive : pour toutes parties *disjointes* A et B de Ω, $\mu(A\cup B) = \mu(A)+\mu(B)$.

b) $\mu(\Omega) = \sum_{k\in\mathbb{N}} p_k$, où $p_k = \mu(\{\omega_k\})$.

On se propose de montrer que μ est σ-additive. Pour cela on définit sur $\mathcal{P}(\Omega)$ une nouvelle fonction d'ensembles ν par :

$$\forall A \subset \Omega, \quad \nu(A) := \sum_{\omega_k\in A} p_k.$$

1) ν est bien définie car la somme des p_k indexée par la condition $\omega_k \in A$ est soit une somme d'un nombre *fini* de termes (voire d'aucun et dans ce cas particulier, elle vaut 0 par convention), soit une sous-série de la série à termes positifs $\sum_{k\in\mathbb{N}} p_k$, laquelle converge dans $\mathbb{R}_+$ puisque $\mu(\Omega) < +\infty$. La σ-additivité de ν est alors une conséquence immédiate de la règle de sommation par paquets d'une série à termes positifs. Ainsi ν est une mesure sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$, donc vérifie la propriété de continuité croissante séquentielle : si (A_n) est une suite croissante pour l'inclusion de parties de Ω, $\nu(A_n)$ converge en croissant vers $\nu(A)$, où A est l'union des A_n.

2) *Montrons que pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $\nu(A) \leq \mu(A)$.*

Considérons pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble $A_n := \{\omega_k \in A; k \leq n\}$. C'est clairement un sous-ensemble de A, d'où par additivité de μ,

$$\mu(A) = \mu\big(A_n \cup (A \setminus A_n)\big) = \mu(A_n) + \mu(A \setminus A_n) \geq \mu(A_n),$$

puisque μ est à valeurs positives. Comme A_n est un ensemble fini, on a par additivité *finie* de μ (laquelle est une conséquence immédiate de a)) :

$$\mu(A_n) = \mu\Big(\bigcup_{\omega_k\in A_n} \{\omega_k\}\Big) = \sum_{\omega_k\in A_n} \mu(\{\omega_k\}) = \sum_{\omega_k\in A_n} p_k = \nu(A_n).$$

On a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mu(A) \geq \nu_(A_n). \tag{8}$$

Par continuité croissante séquentielle de la mesure ν on a $\nu(A_n) \uparrow \nu(A)$ et en passant à la limite dans (8), on obtient

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), \qquad \mu(A) \geq \nu_(A). \tag{9}$$

3) Appliquons (9) à A^c, pour A quelconque dans $\mathcal{P}(\Omega)$:

$$\mu(A^c) \geq \nu_(A^c) \tag{10}$$

Comme μ est additive, $\mu(\Omega) = \mu(A)+\mu(A^c)$ et comme $\mu(A) < +\infty$ (μ étant à valeurs dans $\mathbb{R}_+$), on a $\mu(A^c) = \mu(\Omega) - \mu(A)$. La mesure finie ν vérifie $\nu(A^c) = \nu(\Omega) - \nu(A)$.

Par l'hypothèse b), $\nu(\Omega) = \mu(\Omega) < +\infty$, d'où en reportant dans (10), $-\mu(A) \geq -\nu(A)$. On a ainsi montré que

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), \qquad \nu(A) \geq \mu_(A). \tag{11}$$

Les inégalités (9) et (11) entraînent

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), \qquad \mu(A) = \nu(A).$$

Ainsi les deux fonctions d'ensembles μ et ν sont égales et comme ν est une mesure, il en est de même pour μ.

Références

[ICP] Ch. Suquet, *Introduction au Calcul des Probabilités*, cours de DEUG, Lille 2001.