Chapitre 6

Espaces L^p

Dans tout ce chapitre, $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ est un espace mesuré.

6.1 Construction des espaces L^p

Définition 6.1. *Soit $p \in [1, +\infty[$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On note $\mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ l'ensemble des fonctions $f : \Omega \to \mathbb{K}$ telles que*

i) f est mesurable $\mathcal{F}$ - $\mathrm{Bor}(\mathbb{K})$;

ii) $\int_\Omega |f|^p \, \mathrm{d}\mu < +\infty$.

Remarque 6.2. Pour $p \in [1, +\infty[$, la fonction $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $x \mapsto x^p$ est *convexe* [1], ce qui implique notamment que pour tous $a, b \geq 0$, $\varphi\big(\frac{a+b}{2}\big) \leq \frac{1}{2}\varphi(a) + \frac{1}{2}\varphi(b)$. Appliquant cette inégalité avec $a = |f(\omega)|$ et $b = |g(\omega)|$, on voit que pour toutes $f, g : \Omega \to \mathbb{K}$,

$$\Big(\frac{|f| + |g|}{2}\Big)^p \leq \frac{1}{2}|f|^p + \frac{1}{2}|g|^p.$$

On en déduit immédiatement que si f et g sont dans $\mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$, leur somme y est aussi. La stabilité de $\mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ sous l'effet de la multiplication par un scalaire étant évidente, il en résulte que $\mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ est un *espace vectoriel* de fonctions.

Exemple 6.1. Si $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ et μ est la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$, on retrouve l'espace bien connu des suites de puissance p-ième absolument sommable :

$$\mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu) = \ell^p_{\mathbb{K}}(\mathbb{N}) := \Big\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}};\ \forall n \in \mathbb{N},\ a_n \in \mathbb{K} \text{ et } \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^p < +\infty\Big\}.$$

[1] La « corde » entre deux points de la courbe est « au dessus » de l'arc de courbe correspondant, ou encore l'image du barycentre est majorée par le barycentre des images, voir la figure 6.1.

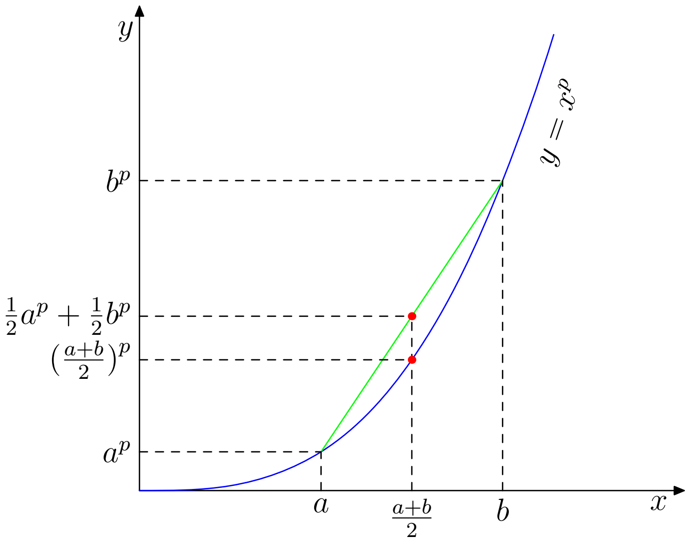

FIG. 6.1 – Convexité de $x \mapsto x^p$

L'idée qui est derrière l'introduction des espaces $\mathcal{L}^p$ est de fournir une échelle permettant de quantifier le degré de μ-intégrabilité d'une fonction. Intuitivement, le paramètre p sert à amplifier les grandes valeurs de $|f|$ et l'appartenance de f à $\mathcal{L}^p$ signifie que ces grandes valeurs ne pèsent pas trop lourd (relativement à la mesure μ). Il est souhaitable de compléter cette échelle d'espaces ($\mathcal{L}^p$, $1 \leq p < +\infty$) en lui adjoignant le cas limite $p = +\infty$. Ce cas nécessite un traitement particulier.

Définition 6.3. *Si $f : \Omega \to \mathbb{K}$ est mesurable, on définit sa borne supérieure essentielle*

$$\operatorname{ess\,sup} f := \inf\{c \in \overline{\mathbb{R}}_+;\ |f| \leq c \ \ \mu\text{-p.p.}\}.$$

$\mathcal{L}^\infty_{\mathbb{K}}(\mu)$ est l'ensemble des fonctions $f : \Omega \to \mathbb{K}$ mesurables telles que $\operatorname{ess\,sup} f < +\infty$.

Il ne saute pas aux yeux que le supremum essentiel soit la quantité pertinente pour définir le cas limite $p = +\infty$ dans l'échelle des $\mathcal{L}^p$. Ce choix s'explique par le fait que si $f \in \mathcal{L}^r_{\mathbb{K}}(\mu)$ pour au moins un $r \in [1, +\infty[$,

$$\lim_{p \to +\infty} \left\{ \int_\Omega |f|^p \, \mathrm{d}\mu \right\}^{1/p} = \operatorname{ess\,sup} f.$$

Ce résultat pourra être vu en exercice.

La manipulation pratique du supremum essentiel est grandement facilitée par le résultat suivant.

Proposition 6.4.

$$\operatorname{ess\,sup} f = \min\{c \in \overline{\mathbb{R}}_+;\ |f| \leq c \ \ \mu\text{-p.p.}\}.$$

Autrement dit, $M = \operatorname{ess\,sup} f$ si et seulement si $|f| \leq M$ μ-p.p. et pour tout $\varepsilon > 0$, $\mu(|f| > M - \varepsilon) > 0$.

Démonstration. Notons $B := \{c \in \overline{\mathbb{R}}_+;\ |f| \leq c\ \mu\text{-p.p.}\}$ et $M := \inf B = \operatorname{ess\,sup} f$. Nous allons vérifier que $M \in B$, donc que $M = \min B$.

Soit $b \in B$, et $c \geq b$, alors μ-p.p., $|f| \leq b \leq c$ donc tout $c \geq b$ est aussi dans B et $B \supset [b, +\infty[$. Par conséquent, $B = \bigcup_{b \in B} [b, +\infty[$ est un intervalle, donc $B =]M, +\infty[$ ou $B = [M, +\infty[$. En tout cas, pour tout $n \geq 1$, $M + 1/n \in B$. Soit $E_n := \{\omega \in \Omega;\ |f(\omega)| \leq M + 1/n\}$. Comme $M + 1/n \in B$, $\mu(E_n^c) = 0$. On a clairement $\{|f| \leq M\} = \bigcap_{n \geq 1} E_n$ d'où par σ-additivité de μ,

$$\mu\big(\{|f| > M\}\big) = \mu\Big(\bigcup_{n \geq 1} E_n^c\Big) \leq \sum_{n \geq 1} \mu(E_n^c) = 0.$$

Ainsi $|f| \leq M$ μ-p.p., donc $M \in B$. $\square$

Théorème 6.5 (Inégalité de Hölder). *Soient $p \in]1, +\infty[$ et q tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Pour toutes f, g mesurables positives $\Omega \to \overline{\mathbb{R}}_+$,*

$$\int_\Omega fg \,\mathrm{d}\mu \leq \left\{\int_\Omega f^p \,\mathrm{d}\mu\right\}^{1/p} \left\{\int_\Omega g^q \,\mathrm{d}\mu\right\}^{1/q}. \tag{6.1}$$

La démonstration du théorème 6.5 repose sur le lemme de concavité suivant dont la justification sera donnée après la preuve du théorème.

Lemme 6.6. *Si $p \in]1, +\infty[$ et q est tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors*

$$\forall x, y \in \overline{\mathbb{R}}_+, \quad xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}. \tag{6.2}$$

Preuve du théorème 6.5. Posons

$$A := \left\{\int_\Omega f^p \,\mathrm{d}\mu\right\}^{1/p}, \quad B := \left\{\int_\Omega g^q \,\mathrm{d}\mu\right\}^{1/q}.$$

Traitons d'abord les cas particuliers. Si $A = 0$, alors $f = 0$ μ-p.p. et $fg = 0$ μ-p.p., donc (6.1) est vraie (idem si $B = 0$). Si A ou B vaut $+\infty$ avec $A, B > 0$, alors $AB = +\infty$ et (6.1) est vraie.

On suppose désormais que $0 < A < +\infty$ et $0 < B < +\infty$. Pour tout $\omega \in \Omega$, on peut appliquer le lemme 6.6 avec $x = f(\omega)/A$ et $y = g(\omega)/B$:

$$\forall \omega \in \Omega, \quad \frac{f(\omega)g(\omega)}{AB} \leq \frac{1}{pA^p} f(\omega)^p + \frac{1}{qB^q} g(\omega)^q. \tag{6.3}$$

En intégrant (6.3) sur Ω, il vient :

$$\frac{1}{AB} \int_\Omega fg \,\mathrm{d}\mu \leq \frac{1}{pA^p} \int_\Omega f^p \,\mathrm{d}\mu + \frac{1}{qB^q} \int_\Omega g^q \,\mathrm{d}\mu = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

On en déduit que $\int_\Omega fg \,\mathrm{d}\mu \leq AB$, ce qui établit (6.1). $\square$

Preuve du lemme 6.6. Si $x=0$ ou $y=0$, (6.2) est vraie automatiquement puisque son premier membre est nul. Si $x=+\infty$ ou $y=+\infty$, (6.2) est encore vraie puisque son second membre vaut $+\infty$. Supposons désormais que $0<x,y<+\infty$. Alors en prenant le logarithme de l'égalité $xy=(x^p)^{1/p}(y^q)^{1/q}$, et en utilisant la *concavité* de la fonction logarithme, il vient

$$\ln(xy)=\frac{1}{p}\ln(x^p)+\frac{1}{q}\ln(y^q)\leq\ln\Bigl(\frac{1}{p}x^p+\frac{1}{q}y^q\Bigr).$$

Par croissance de la fonction exponentielle, on en déduit l'inégalité (6.2). □

Remarque 6.7 (cas $p=1$, $q=+\infty$). Si f et g sont mesurables positives,

$$\int_\Omega fg\,\mathrm{d}\mu\leq(\operatorname{ess\,sup}g)\int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu. \tag{6.4}$$

En effet, en posant $M:=\operatorname{ess\,sup}g$, la proposition 6.4 nous assure que $g\leq M$ μ-p.p., donc que $fg\leq M$ μ-p.p. et en intégrant cette inégalité sur Ω, on obtient (6.4).

Corollaire 6.8. *Soient $f,g:\Omega\to\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, mesurables.*

a) Si $1<p<+\infty$,

$$\int_\Omega|fg|\,\mathrm{d}\mu\leq\biggl\{\int_\Omega|f|^p\,\mathrm{d}\mu\biggr\}^{1/p}\biggl\{\int_\Omega|g|^q\,\mathrm{d}\mu\biggr\}^{1/q}. \tag{6.5}$$

Il en résulte que si $f\in\mathcal{L}^p(\mu)$ et $g\in\mathcal{L}^q(\mu)$, alors $fg\in\mathcal{L}^1(\mu)$.

b) Si $p=1$, $q=+\infty$,

$$\int_\Omega|fg|\,\mathrm{d}\mu\leq(\operatorname{ess\,sup}g)\int_\Omega|f|\,\mathrm{d}\mu. \tag{6.6}$$

Preuve. Il suffit de noter que $|fg|=|f||g|$ et d'appliquer aux fonctions mesurables positives $|f|$ et $|g|$ l'inégalité de Hölder dans le cas $1<p<+\infty$ et la remarque 6.7 dans le cas $p=1$, $q=+\infty$. □

Théorème 6.9 (Inégalité de Minkowski). *Pour $1<p<+\infty$ et toutes f, g mesurables positives $\Omega\to\overline{\mathbb{R}}_+$,*

$$\biggl\{\int_\Omega(f+g)^p\,\mathrm{d}\mu\biggr\}^{1/p}\leq\biggl\{\int_\Omega f^p\,\mathrm{d}\mu\biggr\}^{1/p}+\biggl\{\int_\Omega g^p\,\mathrm{d}\mu\biggr\}^{1/p}. \tag{6.7}$$

Preuve. Soit q l'exposant conjugué de p, *i.e.* l'unique réel tel que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. L'inégalité de Hölder nous fournit les majorations :

$$\begin{aligned}\int_\Omega f(f+g)^{p-1}\,\mathrm{d}\mu &\leq \biggl\{\int_\Omega f^p\,\mathrm{d}\mu\biggr\}^{1/p}\biggl\{\int_\Omega(f+g)^{(p-1)q}\,\mathrm{d}\mu\biggr\}^{1/q},\\ \int_\Omega g(f+g)^{p-1}\,\mathrm{d}\mu &\leq \biggl\{\int_\Omega g^p\,\mathrm{d}\mu\biggr\}^{1/p}\biggl\{\int_\Omega(f+g)^{(p-1)q}\,\mathrm{d}\mu\biggr\}^{1/q}.\end{aligned}$$

Par addition membre à membre et en notant que $(p-1)q = p$, on obtient

$$\int_\Omega (f+g)^p \,\mathrm{d}\mu \le \left[\left\{ \int_\Omega f^p \,\mathrm{d}\mu \right\}^{1/p} + \left\{ \int_\Omega g^p \,\mathrm{d}\mu \right\}^{1/p} \right] \left\{ \int_\Omega (f+g)^p \,\mathrm{d}\mu \right\}^{1/q}. \tag{6.8}$$

Si $0 < \int_\Omega (f+g)^p \,\mathrm{d}\mu < +\infty$, on en déduit (6.7) en divisant par cette intégrale ($1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{p}$). Si $\int_\Omega (f+g)^p \,\mathrm{d}\mu = 0$, (6.7) est automatiquement vérifiée. Si $\int_\Omega (f+g)^p \,\mathrm{d}\mu = +\infty$, on utilise l'inégalité de convexité ($p > 1$) :

$$\left(\frac{f+g}{2} \right)^p \le \frac{1}{2} f^p + \frac{1}{2} g^p,$$

pour voir que nécessairement au moins l'une des intégrales $\int_\Omega f^p \,\mathrm{d}\mu$ ou $\int_\Omega g^p \,\mathrm{d}\mu$ vaut $+\infty$ et qu'ainsi (6.7) est automatiquement vérifiée. □

Proposition 6.10 (semi-normes).

a) Pour $1 \le p < +\infty$, *on définit une semi-norme sur* $\mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ *en posant*

$$\|f\|_p := \left\{ \int_\Omega |f|^p \,\mathrm{d}\mu \right\}^{1/p}.$$

b) Pour $p = +\infty$, *on définit une semi-norme sur* $\mathcal{L}^\infty_{\mathbb{K}}(\mu)$ *en posant*

$$\|f\|_\infty := \operatorname{ess\,sup} f.$$

Ce ne sont pas des normes car :

$$\|f\|_p = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f = 0 \quad \mu\text{-p.p. (i.e. } f \in \mathcal{N}_{\mathbb{K}}(\mu)).$$

Preuve. Pour le a) comme pour le b), l'homogénéité ($\|cf\| = |c|\|f\|$) est immédiate. Vérifions la sous-additivité ($\|f+g\| \le \|f\| + \|g\|$) dans le cas a). Par croissance sur $\overline{\mathbb{R}}_+$ de la fonction puissance $x \mapsto x^p$, on a $|f+g|^p \le (|f|+|g|)^p$ d'où $\int_\Omega |f+g|^p \,\mathrm{d}\mu \le \int_\Omega (|f|+|g|)^p \,\mathrm{d}\mu$ et il ne reste plus qu'à appliquer l'inégalité de Minkowski aux fonctions mesurables positives $|f|$ et $|g|$. Pour la sous-additivité dans le cas b), remarquons que grâce à la proposition 6.4, on a μ-presque partout $|f| \le \|f\|_\infty$ et $|g| \le \|g\|_\infty$. Ainsi $|f+g| \le \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ μ-presque partout et vu la définition du supremum essentiel de $f+g$, on en déduit que $\|f+g\|_\infty \le \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$. □

Rappelons que $\mathcal{N}_{\mathbb{K}}(\mu)$ est l'espace vectoriel des applications $\Omega \to \mathbb{K}$ qui sont μ-négligeables. Il est clair que c'est un s.e.v. de chaque $\mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ pour $1 \le p \le +\infty$.

Définition 6.11. *Pour* $1 \le p \le +\infty$, *on définit l'espace quotient*

$$\mathrm{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu) := \mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu) / \mathcal{N}_{\mathbb{K}}(\mu)$$

des classes de fonctions de puissance p-ième μ-intégrable (ou μ-essentiellement bornées si $p = +\infty$) modulo l'égalité μ-p.p.. La semi-norme $\|\ \|_p$ sur $\mathcal{L}^p$ devient une vraie norme sur L^p par ce passage au quotient.

Sauf mention explicite du contraire, l'espace vectoriel $\mathrm{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ sera toujours muni de la norme $\| \ \|_p$ définie ci-dessus. En particulier si $1 \leq p < +\infty$, la convergence dans $\mathrm{L}^p(\mu)$ de la suite φ_n vers φ a la traduction suivante :

$$\varphi_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathrm{L}^p(\mu)} \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega |\varphi_n - \varphi|^p \,\mathrm{d}\mu = 0.$$

Remarque 6.12. Dans le cas particulier où μ est une mesure telle que pour tout $\omega \in \Omega$, $\mu(\{\omega\}) > 0$, la nullité μ-presque partout équivaut à la nullité partout et $\mathcal{N}_{\mathbb{K}}(\mu)$ se réduit à $\{0\}$ (singleton fonction nulle). Alors $\|f\|_p$ et $\|f\|_\infty$ sont déjà des normes sur $\mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ $(1 \leq p \leq +\infty)$ et les espaces $\mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ et $\mathrm{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ sont les mêmes[2]. Cette situation se produit notamment pour les les espaces $\ell^p(\mathbb{N})$ et $\ell^\infty(\mathbb{N})$.

Théorème 6.13 (convergence dominée dans L^p, $1 \leq p < +\infty$**).** *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions mesurables* $\Omega \to \mathbb{K}$. *On suppose que*

a) $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mu\text{-p.p.}} f$.

b) Il existe $g \in \mathcal{L}^p(\mu)$ *telle que pour tout* n, $|f_n| \leq g$ μ-p.p..

Alors la classe de f *appartient à* $\mathrm{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ *et* f_n *tend vers* f *au sens* L^p, *i.e.* $\|f_n - f\|_p$ *tend vers* 0.

Attention, ce théorème serait grossièrement faux avec $p = +\infty$. Voici un contre-exemple : $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{F} = \mathrm{Bor}([0,1])$, $\mu = \lambda$, $f_n = \mathbf{1}_{[1/n,2/n]}$ $(n \geq 2)$ et $f = 0$.

Preuve. Soit $\Omega' := \{\omega \in \Omega;\ f_n(\omega) \to f(\omega)\}$. Par une argumentation déjà vue lorsque nous avons établi le théorème de convergence dominée classique, on sait que $\Omega' \in \mathcal{F}$ et que $\mu(\Omega'^c) = 0$. On définit alors la suite des fonctions mesurables positives

$$h_n := \begin{cases} |f_n - f|^p & \text{sur } \Omega' \\ 0 & \text{sur } \Omega'^c \end{cases}$$

et on obtient la conclusion en appliquant à (h_n) le théorème de convergence dominée classique avec pour fonction dominante $2^p g^p$. $\square$

Théorème 6.14. *Pour* $1 \leq p \leq +\infty$, $\mathrm{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ *est un espace vectoriel normé* complet, *c'est donc un* espace de Banach.

Preuve dans le cas $1 \leq p < +\infty$. Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $\mathrm{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$. Pour chaque classe d'équivalence φ_n, fixons l'un de ses représentants dans $\mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ et notons le f_n. La propriété de Cauchy se traduit alors par :

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*,\ \forall j,k \geq N(\varepsilon), \quad \|f_j - f_k\|_p < \varepsilon. \tag{6.9}$$

Nous allons extraire une sous-suite[3] $(f_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall n \geq n_i, \quad \|f_n - f_{n_i}\|_p < 2^{-i}. \tag{6.10}$$

[2]Notons aussi que dans ce cas, le supremum essentiel et le supremum coïncident.

[3]La suite $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$ d'indices extraits est donc strictement croissante : $\forall i \in \mathbb{N}$, $n_i < n_{i+1}$.

En particulier on a

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad \|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\|_p < 2^{-i}. \tag{6.11}$$

L'extraction de la sous-suite $(f_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ repose sur (6.9) en prenant (pour $\varepsilon = 2^{-i}$)

$$n_0 := N(1) \quad \text{et pour } i \geq 1, \quad n_i := 1 + \max\bigl(n_{i-1}, N(2^{-i})\bigr).$$

Posons désormais pour alléger $g_i := f_{n_i}$. La décomposition en somme téléscopique

$$g_j = g_0 + \sum_{i=1}^{j}(g_i - g_{i-1})$$

nous fournit l'inégalité

$$|g_j| \leq |g_0| + \sum_{i=1}^{j} |g_i - g_{i-1}| =: h_j. \tag{6.12}$$

La suite de fonctions mesurables positives (h_j) ainsi définie est croissante, notons h sa limite. Par croissance et continuité de la fonction $x \mapsto x^p$ sur $\overline{\mathbb{R}}_+$, on a $h_j^p \uparrow h^p$ et par le théorème de Beppo Levi et la continuité sur $\overline{\mathbb{R}}_+$ de la fonction $x \mapsto x^{1/p}$, on en déduit :

$$\|h_j\|_p \uparrow \left\{\int_\Omega |h|^p \,\mathrm{d}\mu\right\}^{1/p} \qquad (j \to +\infty). \tag{6.13}$$

À ce stade, il n'est pas exclu que cette limite de $\|h_j\|_p$ soit $+\infty$.

Par ailleurs la définition de h_j et l'inégalité de Minkowski nous procurent la majoration :

$$\begin{aligned}
\|h_j\|_p &\leq \|g_0\|_p + \sum_{i=1}^{j} \|g_i - g_{i-1}\|_p \\
&\leq \|g_0\|_p + \sum_{i=1}^{j} 2^{-i} \\
&\leq \|g_0\|_p + \sum_{i=1}^{+\infty} 2^{-i} = \|g_0\|_p + 1.
\end{aligned}$$

Ce majorant de $\|h_j\|_p$ étant valable pour tout j, on en déduit en faisant tendre j vers $+\infty$ et en tenant compte de (6.13) que

$$\left\{\int_\Omega |h|^p \,\mathrm{d}\mu\right\}^{1/p} \leq \|g_0\|_p + 1 < +\infty.$$

Il en résulte que h^p est μ-intégrable, donc que h est finie μ-presque partout sur Ω. Comme $h_j \leq h$, on en déduit que la série de sommes partielles $g_j = g_0 + \sum_{i=1}^{j}(g_i - g_{i-1})$ est *absolument* convergente μ-p.p. sur Ω. Notons g sa somme[4]. La suite (g_j) converge μ-p.p. vers g et est dominée μ-p.p. par $h \in \mathrm{L}^p$ puisque $|g_j| \leq h_j \leq h$. Le théorème de convergence dominée dans L^p nous donne alors :

$$\|g_j - g\|_p \xrightarrow[j\to+\infty]{} 0.$$

On en déduit en procédant comme suit, que

$$\|f_n - g\|_p \xrightarrow[j\to+\infty]{} 0.$$

Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Il existe i_0 tel que $2^{-i_0} < \varepsilon$. Comme g_j tend vers g dans L^p, il existe un $i_1 \geq i_0$ tel que $\|g_{i_1} - g\|_p < \varepsilon$. Alors par (6.10), nous avons

$$\forall n \geq n_{i_1}, \quad \|f_n - f_{n_{i_1}}\|_p = \|f_n - g_{i_1}\|_p < 2^{-i_1} \leq 2^{-i_0} < \varepsilon.$$

Ainsi pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver $n_{i_1}(\varepsilon)$ tel que pour tout $n \geq n_{i_1}$, $\|f_n - g\|_p < 2\varepsilon$, autrement dit f_n converge vers g au sens L^p. En notant $\varphi \in \mathrm{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ la classe d'équivalence de $g \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$, on a donc la convergence vers zéro de $\|\varphi_n - \varphi\|_p$, autrement dit la convergence de φ_n vers φ dans l'espace $\mathrm{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$.

Partis d'une suite de Cauchy quelconque dans $\mathrm{L}^p(\mu)$, nous avons montré qu'elle converge dans cet espace. La complétude de $\mathrm{L}^p(\mu)$ est établie. □

Corollaire 6.15. *Si pour un* $p \in [1, +\infty[$*, la suite* (f_n) *converge vers* f *au sens* $\mathrm{L}^p(\mu)$*, on peut en extraire une sous-suite* (f_{n_i}) *qui converge* μ-p.p. *vers* f*.*

Écrit avec l'abus de langage traditionnel, cet énoncé signifie bien sûr qu'après avoir choisi dans chaque classe f_n un représentant (une vraie fonction notée encore f_n et appartenant à $\mathcal{L}^p(\mu)$), on peut extraire de cette suite de vraies fonctions une sous-suite qui converge μ-p.p. vers un représentant de f.

Preuve. La suite (f_n) converge dans l'espace métrique L^p donc est de Cauchy. La sous-suite (de vraies fonctions) (f_{n_i}) construite dans la preuve du théorème 6.14 converge μ-p.p. et au sens L^p vers une certaine fonction g qui est aussi dans $\mathcal{L}^p$. Pour vérifier que $f = g$ (μ-p.p.), il suffit d'écrire

$$\|f - g\|_p \leq \|f - f_{n_i}\|_p + \|f_{n_i} - g\|_p.$$

Quand i tend vers l'infini, ce majorant tend vers 0, d'où $\|f - g\|_p = 0$. □

Preuve du théorème 6.14 dans le cas $p = +\infty$. Soit (φ_n) une suite de Cauchy dans $\mathrm{L}^\infty_{\mathbb{K}}(\mu)$. Choisissons dans chaque classe φ_n un représentant noté f_n (une vraie fonction appartenant à $\mathcal{L}^\infty_{\mathbb{K}}(\mu)$). On a donc

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N(\varepsilon),\ \forall k, l \geq N(\varepsilon), \quad \operatorname{ess\,sup}(f_k - f_l) < \varepsilon.$$

[4]A priori définie seulement μ-p.p., mais il suffit de prendre g nulle sur l'ensemble de mesure nulle où la série n'est pas absolument convergente pour que g soit mesurable et limite μ-p.p. de g_j.

Grâce à la proposition 6.4, nous en déduisons que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N(\varepsilon),\ \forall k, l \geq N(\varepsilon), \quad |f_k - f_l| < \varepsilon \quad \mu\text{-p.p.} \tag{6.14}$$

Pour éviter la confrontation avec une réunion non dénombrable d'ensembles de mesure nulle, discrétisons le ε en prenant disons $\varepsilon_i = 2^{-i}$, $i \in \mathbb{N}$. Posons $N_i := N(\varepsilon_i)$ et

$$A_{i,k,l} := \big\{\omega \in \Omega;\ |f_k(\omega) - f_l(\omega)| < \varepsilon\big\}, \quad A_i := \bigcap_{k,l \geq N_i} A_{i,k,l}, \quad \Omega' := \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i.$$

Par (6.14), on a $\mu(A_{i,k,l}^c) = 0$ pour tout $i \in \mathbb{N}$ et tous $k, l \geq N_i$. On en déduit successivement par sous-σ-additivité de μ que $\mu(A_i^c) = 0$ et $\mu(\Omega'^c) = 0$. Nous avons donc maintenant :

$$\forall \omega \in \Omega',\ \forall i \in \mathbb{N},\ \forall k, l \geq N_i, \quad |f_k(\omega) - f_l(\omega)| < \varepsilon_i. \tag{6.15}$$

Autrement dit, pour tout $\omega \in \Omega'$, la suite $\big(f_n(\omega)\big)$ est de Cauchy. Comme $\mathbb{K}$ est complet, cette suite converge dans $\mathbb{K}$. Posant alors

$$f(\omega) := \begin{cases} \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(\omega) & \text{si } \omega \in \Omega', \\ 0 & \text{si } \omega \notin \Omega', \end{cases}$$

on définit une fonction mesurable $f : \Omega \to \mathbb{K}$ et f_n converge μ presque partout vers f. Cette fonction f appartient à $\mathcal{L}^\infty_{\mathbb{K}}(\mu)$. En effet elle est nulle en dehors de Ω' et pour $\omega \in \Omega'$, on a pour tout $n \geq N_0$, $|f_n(\omega) - f_{N_0}(\omega)| < \varepsilon_0$, d'où $|f_n(\omega)| < |f_{N_0}(\omega)| + \varepsilon_0$ et en faisant tendre n vers l'infini, $|f(\omega)| \leq |f_{N_0}(\omega)| + \varepsilon_0$. Comme $f_{N_0} \in \mathcal{L}^\infty_{\mathbb{K}}(\mu)$, en posant $\Omega'' := \Omega' \cap \{\omega \in \Omega;\ |f_{N_0}(\omega)| \leq \operatorname{ess\,sup} f_{N_0}\}$, on a $\mu(\Omega''^c) = 0$ et pour tout $\omega \in \Omega''$, $|f(\omega)| \leq \operatorname{ess\,sup} f_{N_0} + \varepsilon_0$ et ce majorant fini ne dépend pas de ω.

Cette fonction f est notre candidate pour être la limite au sens L^∞ de la suite de Cauchy (f_n). Pour vérifier cette convergence L^∞, on déduit de (6.15) en faisant tendre l vers $+\infty$ que

$$\forall \omega \in \Omega',\ \forall i \in \mathbb{N},\ \forall k \geq N_i, \quad |f_k(\omega) - f(\omega)| \leq \varepsilon_i. \tag{6.16}$$

Comme $\mu(\Omega'^c) = 0$, l'inégalité $|f_k(\omega) - f(\omega)| \leq \varepsilon_i$ vraie sur Ω' implique $\operatorname{ess\,sup}(f_k - f) \leq \varepsilon_i$. Ainsi la convergence L^∞ de f_n vers f résulte de (6.16). En notant $\varphi \in \mathrm{L}^\infty_{\mathbb{K}}(\mu)$ la classe de $f \in \mathcal{L}^\infty_{\mathbb{K}}(\mu)$, on a ainsi établi la convergence vers φ dans l'espace $\mathrm{L}^\infty_{\mathbb{K}}(\mu)$ de la suite de Cauchy (φ_n). Comme la suite de Cauchy (φ_n) était quelconque, l'espace $\mathrm{L}^\infty_{\mathbb{K}}(\mu)$ est complet. □

Remarque 6.16. Le corollaire 6.15 a été énoncé avec $1 \leq p < +\infty$. Pour $p = +\infty$ on a un meilleur résultat. Si f_n converge vers f au sens L^∞, c'est *toute la suite* (f_n) (et non pas seulement une sous-suite) qui converge μ-p.p. vers f. On peut voir ce résultat comme un sous-produit de la preuve du cas $p = +\infty$ ci-dessus, ou le démontrer directement (en exercice) en s'inspirant de la technique de discrétisation du ε utilisée ci-dessus.

6.2 Comparaison des L^p

Il n'y a pas de relations générales d'inclusion entre les $\mathrm{L}^p(\mu)$, indépendantes de l'espace mesuré $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. Pour s'en convaincre, prenons pour espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathrm{Bor}(\mathbb{R}), \lambda)$ et comparons les espaces $\mathrm{L}^1(\lambda)$ et $\mathrm{L}^2(\lambda)$. Soient les fonctions

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \mathbf{1}_{]0,1]}(x) \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{x} \mathbf{1}_{[1,+\infty[}(x).$$

On voit immédiatement que f appartient à $\mathrm{L}^1(\lambda)$, mais pas à $\mathrm{L}^2(\lambda)$ tandis que g appartient à $\mathrm{L}^2(\lambda)$ mais pas à $\mathrm{L}^1(\lambda)$. Ainsi, aucun des deux espaces $\mathrm{L}^1(\lambda)$ et $\mathrm{L}^2(\lambda)$ n'est inclus dans l'autre.

Dans le cas d'une mesure *finie* μ, le paysage est beaucoup plus agréable. Les espaces $\mathrm{L}^p(\mu)$ sont alors emboîtés dans l'ordre inverse de leurs exposants et, ce qui est bien plus important, on a des inclusions *topologiques*.

Définition 6.17. *Soient* $(E, \| \ \|_E)$ *et* $(F, \| \ \|_F)$ *deux espaces vectoriels normés. On dit que* E *est inclus* topologiquement *dans* F *(notation* $E \hookrightarrow F$*) si*

a) $E \subset F$ *;*

b) l'injection canonique $J : E \to F$, $x \mapsto x$ *est continue.*

La condition b) équivaut à l'existence d'une constante $C < +\infty$ *telle que*

$$\forall x \in E, \quad \|x\|_F \leq C\|x\|_E.$$

Une conséquence pratique de l'inclusion topologique de E dans F est que si une suite x_n converge vers x dans E (i.e. $\|x_n - x\|_E \to 0$), alors elle converge aussi dans F vers la même limite (i.e. $\|x_n - x\|_F \to 0$).

Théorème 6.18. *Si* μ *est une mesure finie, on a pour* $1 \leq p \leq r \leq +\infty$ *les inclusions topologiques*

$$\mathrm{L}^\infty(\mu) \hookrightarrow \mathrm{L}^r(\mu) \hookrightarrow \mathrm{L}^p(\mu) \hookrightarrow \mathrm{L}^1(\mu).$$

Preuve. Il suffit de montrer les deux premières inclusions topologiques, la troisième n'étant qu'un cas particulier de la seconde.

Pour l'inclusion $\mathrm{L}^\infty(\mu) \hookrightarrow \mathrm{L}^r(\mu)$, soit $f \in \mathcal{L}^\infty(\mu)$ et $M := \operatorname{ess\,sup} f$. Alors $|f| \leq M$ μ-p.p. d'où

$$\forall r \in [1, +\infty[, \quad \left\{ \int_\Omega |f|^r \,\mathrm{d}\mu \right\}^{1/r} \leq \left\{ \int_\Omega M^r \,\mathrm{d}\mu \right\}^{1/r} = M\mu(\Omega).$$

En passant aux classes d'équivalence modulo l'égalité μ-p.p., on en déduit que

$$\forall f \in \mathrm{L}^\infty(\mu), \quad \|f\|_r \leq \mu(\Omega)\|f\|_\infty.$$

Comme $\mu(\Omega) < +\infty$, ceci établit l'inclusion topologique de $\mathrm{L}^\infty(\mu)$ dans $\mathrm{L}^r(\mu)$.

Pour la deuxième inclusion, fixons $1 \leq p \leq r < +\infty$ et soit f mesurable $\Omega \to \mathbb{K}$. Notons a et b deux exposants conjugués ($\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$) à préciser ultérieurement. L'inégalité de Hölder appliquée au produit FG avec $F = |f|^p$ et $G = 1$ nous donne :

$$\int_\Omega |f|^p \, d\mu \leq \left\{ \int_\Omega |f|^{pa} \, d\mu \right\}^{1/a} \left\{ \int_\Omega 1^b \, d\mu \right\}^{1/b} = \mu(\Omega)^{1/b} \left\{ \int_\Omega |f|^{pa} \, d\mu \right\}^{1/a}.$$

Cette inégalité est vraie pour tout $a \geq 1$. Choisissant a de sorte que $pa = r$, on en déduit par croissance sur $\overline{\mathbb{R}}_+$ de $x \mapsto x^{1/p}$,

$$\left\{ \int_\Omega |f|^p \, d\mu \right\}^{1/p} \leq \mu(\Omega)^{1/(pb)} \left\{ \int_\Omega |f|^r \, d\mu \right\}^{1/r}. \tag{6.17}$$

On peut se débarasser de l'exposant b en notant que $\frac{1}{pa} + \frac{1}{pb} = \frac{1}{p}$ d'où $\frac{1}{pb} = \frac{1}{p} - \frac{1}{pa} = \frac{1}{p} - \frac{1}{r}$. Prenant maintenant f quelconque dans $\mathcal{L}^r(\mu)$ et passant aux classes d'équivalence pour l'égalité μ-p.p., on déduit de (6.17) que :

$$\forall f \in \mathrm{L}^r(\mu), \quad \|f\|_p \leq \mu(\Omega)^{1/p - 1/r} \|f\|_r,$$

ce qui établit l'inclusion topologique de $\mathrm{L}^r(\mu)$ dans $\mathrm{L}^p(\mu)$. □

6.3 Théorèmes de densité

Théorème 6.19. *Notons $\mathcal{E}$ l'espace des fonctions mesurables étagées $h : \Omega \to \mathbb{K}$ telles que*

$$\mu(\{\omega \in \Omega;\ h(\omega) \neq 0\}) < +\infty.$$

Pour $1 \leq p < +\infty$, $\mathcal{E}$ est dense dans $\mathrm{L}^p(\mu)$.

L'écriture de cet énoncé sacrifie une fois de plus à l'abus de langage traditionnel. Il faut bien sûr comprendre la conclusion comme « l'ensemble des classes des éléments de $\mathcal{E}$ est dense dans $\mathrm{L}^p(\mu)$ ».

Démonstration. D'abord il est évident que $\mathcal{E}$ est un s.e.v. de $\mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$. Soit $\varphi \geq 0$ dans $\mathrm{L}^p(\mu)$ et f un représentant de φ. On a donc $f \geq 0$, μ-p.p.. Quitte à modifier f sur un ensemble de mesure nulle, donc sans changer sa classe φ, on peut supposer $f \geq 0$ partout. On sait qu'il existe alors une suite croissante h_n de fonctions étagées mesurables positives qui converge partout vers f sur Ω. Les inégalités $0 \leq h_n \leq f$ impliquent l'appartenance des h_n à $\mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$. Si $m_n > 0$ est la plus petite valeur non nulle prise par la fonction *étagée* h_n, l'inégalité de Markov nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
\mu(\{\omega \in \Omega;\ h_n(\omega) \neq 0\}) = \mu(\{\omega \in \Omega;\ h_n(\omega) \geq m_n\}) &= \mu(\{\omega \in \Omega;\ h_n(\omega)^p \geq m_n^p\}) \\
&\leq \frac{1}{m_n^p} \int_\Omega h_n^p \, d\mu \\
&\leq \frac{1}{m_n^p} \int_\Omega f^p \, d\mu < +\infty.
\end{aligned}$$

On voit ainsi que les h_n sont dans $\mathcal{E}$. D'autre part le théorème de convergence dominée dans L^p nous donne la convergence de h_n vers f au sens L^p :

$$\lim_{n\to+\infty} \|f - h_n\|_p = 0.$$

Le cas f à valeurs réelles se déduit du cas $f \geq 0$ par décomposition $f = f^+ - f^-$. Le cas complexe se ramène au cas réel par séparation des parties réelle et imaginaire. $\square$

Corollaire 6.20. *Pour* $1 \leq p < +\infty$ *et* $1 \leq r < +\infty$, *l'espace* $\mathrm{L}^p(\mu) \cap \mathrm{L}^r(\mu)$ *est dense dans chacun des espaces* $\mathrm{L}^p(\mu)$ *et* $\mathrm{L}^r(\mu)$ *pour la topologie correspondante.*

Démonstration. Comme $\mathcal{E}$ est un sous-espace de tous les L^p pour $1 \leq p < +\infty$, c'est aussi un sous-espace de $\mathrm{L}^p(\mu) \cap \mathrm{L}^r(\mu)$. Il suffit alors d'appliquer le théorème 6.19 dans L^p puis dans L^r. $\square$

Nous discutons maintenant la densité d'espaces de fonctions continues dans les L^p. Bien sûr, cela suppose Ω muni d'une topologie. Nous nous limiterons au cas des espaces métriques.

Théorème 6.21. *Soit E un espace métrique et μ une mesure* finie *sur* $(E, \mathrm{Bor}(E))$. *On note* $\mathcal{C}_b(E)$ *l'espace des fonctions continues bornées* $E \to \mathbb{K}$. *Pour* $1 \leq p < +\infty$, $\mathcal{C}_b(E)$ *est dense dans* $\mathrm{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$.

Démonstration. La mesure μ étant finie, toute fonction mesurable bornée est dans $\mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$. On a donc l'inclusion ensembliste $\mathcal{C}_b(E) \subset \mathcal{L}^p(\mu)$. Comme dans la preuve du théorème 6.19, il suffit de montrer que toute fonction positive f de $\mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ peut être approchée à ε près en distance L^p par une fonction continue bornée. En raison du théorème 6.19, il suffit de le prouver lorsque f est étagée positive. Par combinaison linéaire finie et inégalité triangulaire, la réduction ultime du problème est l'approximation en distance L^p de $f = \mathbf{1}_A$ pour A borélien par une fonction continue. Rappelons un résultat déjà démontré en exercice (cf. Annales I.F.P 2001-2002, D.M. n° 2).

Lemme 6.22. *Si E est un espace métrique, toute mesure* finie μ *sur* $(E, \mathrm{Bor}(E))$ *est* régulière, *ce qui signifie que pour tout borélien A,*

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \sup\{\mu(F);\ F \textit{ fermé} \subset A\}; \\ \mu(A) &= \inf\{\mu(V);\ V \textit{ ouvert} \supset A\}. \end{aligned}$$

Par le lemme 6.22, pour ε positif fixé, il existe un fermé F et un ouvert V tels que $F \subset A \subset V$ et $\mu(A) - \varepsilon^p/2 \leq \mu(F) \leq \mu(V) \leq \mu(A) + \varepsilon^p/2$. Comme μ est finie, on en déduit $\mu(V \setminus F) = \mu(V) - \mu(F) \leq \varepsilon^p$. Admettons provisoirement l'existence d'une fonction continue g telle que $0 \leq g \leq 1$, nulle en dehors de V et de valeur constante 1 sur F. Ce point fait l'objet du lemme 6.23 ci-dessous (appliqué avec le fermé $H = E \setminus V$). Ainsi, $f = g = 1$ sur F, $0 \leq g \leq f = 1$ sur $A \setminus F$, $0 = f \leq g \leq 1$ sur $V \setminus A$ et $f = g = 0$ sur V^c (dans le cas particulier où $E = V$, cette dernière condition est sans objet et il suffit de prendre pour g la fonction constante 1 sur E). On en déduit

$$\int_\Omega |f-g|^p \,\mathrm{d}\mu = \int_{V\setminus F} |f-g|^p \,\mathrm{d}\mu \leq \int_{V\setminus F} 1^p \,\mathrm{d}\mu = \mu(V \setminus F) \leq \varepsilon^p,$$

d'où $\|f - g\|_p \leq \varepsilon$. $\square$

Lemme 6.23. *Soient F et H deux fermés disjoints non vides d'un espace métrique E. Il existe une fonction continue $g : E \to \mathbb{R}_+$ telle que $0 \leq g \leq 1$, $g = 1$ sur F et $g = 0$ sur H.*

Démonstration. Rappelons la définition de la distance d'un point x à un fermé F non vide dans un espace métrique (E, d) :

$$d(x, F) := \inf_{y \in F} d(x, y).$$

Il est bien connu que $d(\,.\,, F)$ est continue et que $d(x, F) = 0$ si et seulement si[5] $x \in F$.

Définissons alors g par

$$g(x) := \frac{d(x, H)}{d(x, H) + d(x, F)}, \quad x \in E.$$

Le dénominateur ne peut être nul que si $d(x, F) = d(x, H) = 0$. Or F et H étant fermés, cette égalité implique $x \in F \cap H$, ce qui est impossible puisque F et H sont disjoints. La fonction g apparaît ainsi comme le quotient de deux fonctions continues avec dénominateur ne s'annulant en aucun point de E. Elle est donc continue sur E. On vérifie immédiatement que $0 \leq g \leq 1$, et que si $x \in F$, $g(x) = 1$, si $x \in H$, $g(x) = 0$. $\square$

Notre prochain théorème de densité concerne l'approximation en distance L^p par des fonctions continues à support compact. Rappelons que si f est une fonction de l'espace topologique E dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, le support de f est la fermeture de l'ensemble $\{x \in E;\ f(x) \neq 0\}$. Ainsi une fonction à support compact K est nulle en tout point de $E \setminus K$... s'il en existe ! En particulier si E est lui même compact, toute fonction sur E est à support compact.

Théorème 6.24. *Supposons que l'espace métrique E est* localement compact *et réunion d'une suite croissante de compacts. Notons $\mathcal{C}_c(E)$ l'espace des fonctions continues $E \to \mathbb{K}$, à support compact. Soit μ une mesure finie sur $(E, \mathrm{Bor}(E))$. Pour $1 \leq p < +\infty$, $\mathcal{C}_c(E)$ est dense dans $\mathrm{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$.*

Démonstration. Par hypothèse, il existe une suite K_n de compacts croissante pour l'inclusion et de réunion E. On effectue la même réduction du problème que dans la preuve du théorème 6.21 en se ramenant au cas $f = \mathbf{1}_A$, pour A borélien quelconque. On remarque alors que si $A_n := A \cap K_n$, $A_n \uparrow A$ et donc par continuité séquentielle croissante de μ, $\mu(A_n) \uparrow \mu(A)$. Comme

$$\|\mathbf{1}_A - \mathbf{1}_{A_n}\|_p = \mu(A \setminus A_n)^{1/p} = \big(\mu(A) - \mu(A_n)\big)^{1/p} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0,$$

il suffit de montrer l'approximation à ε près en distance L^p de $\mathbf{1}_{A_n}$ par une fonction continue à support compact. En procédant comme dans la preuve du théorème 6.21, on

[5]Quand F est *fermé*. Dans le cas F quelconque, $d(x, F) = 0$ équivaut à $x \in \overline{F}$.

trouve F fermé et V ouverts tels que $F \subset A_n \subset V$ et $\mu(V \setminus F) \leq \varepsilon^p$. Notons que F est maintenant compact comme fermé dans le compact K_n. Par contre on ne peut rien dire de l'éventuelle compacité de $\overline{V}$. Et c'est bien ennuyeux car si on définit g comme dans la preuve du théorème 6.21, on ne pourra garantir qu'elle soit à support compact. On se tire de ce mauvais pas grâce au lemme suivant dont la preuve est légèrement différée.

Lemme 6.25. *Soit E un espace métrique localement compact, K un compact de E et V un ouvert contenant K. Alors il existe W ouvert de fermeture compacte tel que $K \subset W \subset \overline{W} \subset V$.*

Appliquons ce lemme avec le compact $K = F$ et l'ouvert V. On obtient un ouvert W de fermeture compacte tel que $F \subset W \subset \overline{W} \subset V$. Nous ne prétendons pas que A_n est inclus dans W. Écartant provisoirement le cas particulier $W^c = \emptyset$, on définit alors

$$g(x) := \frac{d(x, W^c)}{d(x, W^c) + d(x, F)}, \quad x \in E.$$

C'est bien une fonction continue (car les fermés F et W^c sont disjoints), nulle en dehors de W, donc à support inclus dans le compact $\overline{W}$. On a $g = 1 = f$ sur F et $g = f = 0$ sur V^c. Sur $V \setminus F$, f et g sont encadrées par 0 et 1 donc $|f - g| \leq 1$. On en déduit que $\|f - g\|_p \leq \mu(V \setminus F)^{1/p} \leq \varepsilon$.

Dans le cas particulier où $W^c = \emptyset$, on a $\overline{W} = E$, donc E est compact et la fonction constante $g = 1$ sur E est à support compact. On a aussi $\|f - g\|_p \leq \mu(V \setminus F)^{1/p} \leq \varepsilon$. □

Preuve du lemme 6.25. Traitons d'abord le cas où $V \neq E$ et donc $V^c \neq \emptyset$. Posons

$$\delta := \inf_{x \in K} d(x, V^c).$$

Par compacité de K et continuité de $d(\,.\,, V^c)$, cet infimum est un minimum : il existe $x_0 \in K$ tel que $\delta = d(x_0, V^c)$. Les fermés K et V^c étant disjoints, $\delta = d(x_0, V^c) > 0$.

Par locale compacité de E, tout $x \in E$ possède un voisinage ouvert U_x de fermeture compacte. Définissons alors les ouverts

$$W_x := B(x, \delta/2) \cap U_x, \quad x \in K.$$

Ainsi W_x est un voisinage ouvert de x, de fermeture compacte puisque $\overline{W_x}$ est fermé dans le compact $\overline{U_x}$. Le compact K est recouvert par la famille d'ouverts $\{W_x,\ x \in K\}$, dont on peut extraire un recouvrement fini :

$$K \subset W_{x_1} \cup \cdots \cup W_{x_m} =: W.$$

W est un ouvert comme union finie d'ouverts. $\overline{W}$ est compact car fermé et inclus dans $\overline{W_{x_1}} \cup \cdots \cup \overline{W_{x_m}}$ qui est compact comme union finie de compacts. Il reste à vérifier l'inclusion de $\overline{W}$ dans V. Prenons y quelconque dans $\overline{W}$. L'inclusion

$$\overline{W} \subset \bigcup_{i=1}^{m} \overline{B(x_i, \delta/2)}$$

nous fournit un x_i tel que $d(x_i, y) \leq \delta/2$. Pour tout z de V^c, l'inégalité triangulaire nous donne alors la minoration

$$d(y, z) \geq d(x_i, z) - d(x_i, y) \geq \delta - \delta/2 = \delta/2.$$

En prenant la borne inférieure pour z décrivant V^c, on en déduit $d(y, V^c) \geq \delta/2 > 0$. Ainsi y n'appartient pas à V^c donc il est dans V. Le raisonnement étant valable pour y quelconque dans $\overline{W}$, l'inclusion $\overline{W} \subset V$ est établie.

Pour compléter la preuve du lemme, il reste à examiner le cas où $V^c = \emptyset$ et donc $V = E$. Il suffit alors de modifier la définition de W_x en $W_x := U_x$, l'inclusion $\overline{W} \subset V$ étant maintenant triviale. □

Théorème 6.26. *Soit λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$. Pour $1 \leq p < +\infty$, l'espace $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ des fonctions continues $\mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$, à support compact est dense dans $\mathrm{L}^p_{\mathbb{K}}(\lambda)$.*

Démonstration. Grâce au théorème 6.19, il suffit de montrer que si A est un borélien tel que $\lambda(A) < +\infty$, on peut approcher $\mathbf{1}_A$ en distance L^p à ε près par une fonction g continue à support compact. On peut encore réduire la problème en se ramenant au cas où A est un borélien *borné*[6]. En effet, posons $A_n = A \cap [-n, n]^d$. Par continuité séquentielle croissante de λ, $\lambda(A_n) \uparrow \lambda(A)$. Comme $\lambda(A)$ est *fini*, on a pour n assez grand, $0 \leq \lambda(A) - \lambda(A_n) \leq \varepsilon^p$ et $\lambda(A \setminus A_n) \leq \varepsilon^p$ d'où $\|\mathbf{1}_A - \mathbf{1}_{A_n}\|_p \leq \varepsilon$.

Dans la suite, nous supposons donc A borné, disons

$$A \subset C := [-a, a]^d.$$

Prenons pour espace métrique $E =]-(a+1), a+1[$, muni de la distance euclidienne (ou de n'importe quelle distance associée à une norme sur $\mathbb{R}^d$) et pour μ la (restriction à la tribu borélienne de E de la) mesure à densité 1_C par rapport à λ. Par régularité de la mesure finie μ, on peut trouver F fermé et V ouvert de E tels que $F \subset A \subset V$ et $\mu(V \setminus F) \leq \varepsilon^p$. Notons au passage que comme E est ouvert de $\mathbb{R}^d$, V est aussi ouvert dans $\mathbb{R}^d$. De plus comme $\mu(E \setminus C) = 0$, on peut toujours remplacer V par $V \cap]-a-\delta, a+\delta[^d$ pour $0 < \delta < 1$. Dans la suite nous supposerons donc $V \subset]-a-\delta, a+\delta[^d$ pour un δ qui sera précisé ultérieurement. Ce remplacement n'a pas affecté l'inclusion $A \subset V$ puisque A est inclus dans C et que les points éventuellement éliminés sont tous hors de C. Nous avons donc maintenant :

$$F \subset A \subset V \subset]-a-\delta, a+\delta[^d.$$

En reprenant la construction de g dans la preuve du théorème 6.24, on obtient une fonction continue $g : E \to [0, 1]$ à support compact inclus dans V et telle que $\int_E |\mathbf{1}_A - g|^p \, d\mu \leq \varepsilon^p$. Remarquons que g est nulle sur $\Delta := \{x \in \mathbb{R}^d ;\ a + \delta < |x_i| \leq a + 1,\ 1 \leq i \leq d\}$. Ainsi il est clair qu'en posant $g(x) := 0$ pour $x \in \mathbb{R}^d \setminus E$, on a un prolongement continu de g à tout $\mathbb{R}^d$, sans modifier le support.

[6] Tout borélien borné a une mesure de Lebesgue finie, mais la réciproque est fausse : $\mathbb{Q}$ est de mesure nulle mais pas borné.

En notant $C_\delta :=]-a-\delta, a+\delta[^d$, nous avons alors

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{1}_A - g|^p \,\mathrm{d}\lambda &= \int_C |\mathbf{1}_A - g|^p \,\mathrm{d}\lambda + \int_{C_\delta \setminus C} |\mathbf{1}_A - g|^p \,\mathrm{d}\lambda \\ &= \int_E |\mathbf{1}_A - g|^p \,\mathrm{d}\mu + \int_{C_\delta \setminus C} |\mathbf{1}_A - g|^p \,\mathrm{d}\lambda \\ &\leq \varepsilon^p + \lambda(C_\delta \setminus C).\end{aligned}$$

On voit immédiatement que $\lambda(C_\delta \setminus C) = (2a+2\delta)^d - (2a)^d$ peut être rendu inférieur à ε^p en choisissant δ suffisamment petit. Ce choix étant fait, nous avons donc établi l'existence de g continue sur $\mathbb{R}^d$ et à support compact telle que $\|\mathbf{1}_A - g\|_p \leq 2^{1/p}\varepsilon$, ce qui achève la démonstration. □

6.4 Dualité

Le dual *topologique* d'un espace vectoriel normé est l'espace des formes linéaires *continues* sur cet espace. En dimension infinie, une forme linéaire n'est pas automatiquement continue et il convient donc de distinguer dual topologique et dual algébrique.

Proposition 6.27. *Soit* $p \in [1, +\infty[$ *et* q *son exposant conjugué* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Pour* g *fixé dans* $\mathrm{L}^q_{\mathbb{K}}(\mu)$, *l'application*

$$\Phi : \mathrm{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu) \to \mathbb{K}, \quad f \mapsto \Phi(f) := \int_\Omega fg \,\mathrm{d}\mu$$

est une forme linéaire continue sur $\mathrm{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$. *Si* $1 < p < +\infty$, *la norme de* Φ *est égale à* $\|g\|_q$. *Si* $p = 1$ *(et donc* $q = +\infty$*) et si la mesure* μ *est* σ*-finie, la norme de* Φ *est* $\|g\|_\infty$.

Démonstration. D'abord Φ est bien définie puisque d'après l'inégalité de Hölder

$$\int_\Omega |fg| \,\mathrm{d}\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q < +\infty.$$

On déduit immédiatement de cette inégalité que

$$\forall f \in \mathrm{L}^p(\mu), \quad |\Phi(f)| = \left| \int_\Omega fg \,\mathrm{d}\mu \right| \leq \int_\Omega |fg| \,\mathrm{d}\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Ceci montre que Φ est continue et que sa norme (dans l'espace des applications linéaires continues de $\mathrm{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ dans $\mathbb{K}$) vérifie

$$\|\Phi\| \leq \|g\|_q. \tag{6.18}$$

Cas $1 < p < +\infty$. Si $g = 0$ (le zéro de L^q, i.e. tout représentant de g est une fonction nulle μ p.p.), Φ est la forme linéaire nulle donc sa norme est $0 = \|g\|_q$. En dehors de ce cas particulier, $\|g\|_q > 0$. Choisissons un représentant de g (noté encore g) et définissons la fonction f par

$$f = h|g|^{q-1}, \quad \text{où} \quad h(\omega) = \begin{cases} \dfrac{\overline{g(\omega)}}{|g(\omega)|} & \text{si } g(\omega) \neq 0, \\ 0 & \text{si } g(\omega) = 0. \end{cases} \tag{6.19}$$

L'exposant q étant le conjugué de p, vérifie $q = p(q-1)$, d'où $|f|^p = |g|^{p(q-1)} = |g|^q$. L'appartenance de f à $\mathrm{L}^p(\mu)$ découle ainsi de celle de g à $\mathrm{L}^q(\mu)$. En outre $\|f\|_p = \|g\|_q^{q/p} > 0$. Calculons maintenant $\Phi(f)$:

$$\Phi(f) = \int_\Omega fg \,\mathrm{d}\mu = \int_{\{g\neq 0\}} \frac{\bar{g}}{|g|}|g|^{q-1} g \,\mathrm{d}\mu = \int_{\{g\neq 0\}} g\bar{g}|g|^{q-2} \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega |g|^q \,\mathrm{d}\mu = \|g\|_q^q.$$

On en déduit la minoration

$$\|\Phi\| \geq \frac{|\Phi(f)|}{\|f\|_p} = \|g\|_q^{q-q/p} = \|g\|_q$$

qui avec (6.18) entraîne $\|\Phi\| = \|g\|_q$.

Cas $p = +\infty$ et μ σ-finie. Le cas particulier $\|g\|_\infty$ étant immédiat, on suppose $\|g\|_\infty > 0$ et on fixe un représentant de g. Définissons pour $0 < \varepsilon < \|g\|_\infty$

$$A_\varepsilon := \{\omega \in \Omega;\ \|g\|_\infty - \varepsilon \leq |g(\omega)| \leq \|g\|_\infty\}.$$

D'après la définition du supremum essentiel de g, $\mu(A_\varepsilon)$ est strictement positif. La mesure μ étant σ-finie, il existe $B_\varepsilon \in \mathfrak{F}$ tel que $0 < \mu(B_\varepsilon) < +\infty$ et $B_\varepsilon \subset A_\varepsilon$. Soit alors

$$f_\varepsilon := \frac{\mathbf{1}_{B_\varepsilon}}{\mu(B_\varepsilon)} h,$$

où h est définie comme dans (6.19). Clairement, $f_\varepsilon \in \mathrm{L}^1(\mu)$ et $\|f_\varepsilon\|_1 = 1$. De plus comme sur B_ε, $g(\omega) \neq 0$,

$$\Phi(f_\varepsilon) = \int_\Omega f_\varepsilon g \,\mathrm{d}\mu = \int_{B_\varepsilon} \frac{\bar{g}}{|g|\mu(B_\varepsilon)} g \,\mathrm{d}\mu = \frac{1}{\mu(B_\varepsilon)} \int_{B_\varepsilon} |g| \,\mathrm{d}\mu \geq \|g\|_\infty - \varepsilon > 0.$$

On peut ainsi minorer la norme de Φ par

$$\|\Phi\| \geq \frac{|\Phi(f_\varepsilon)|}{\|f_\varepsilon\|_1} = \Phi(f_\varepsilon) \geq \|g\|_\infty - \varepsilon > 0.$$

Cette minoration étant vraie pour $0 < \varepsilon < \|g\|_\infty$, on en déduit en faisant tendre ε vers 0 que $\|\Phi\| \geq \|g\|_\infty$, ce qui avec (6.18) permet de conclure $\|\Phi\| = \|g\|_\infty$. □

Corollaire 6.28. *Si $1 < p < +\infty$ et $g \in \mathrm{L}^q(\mu)$,*

$$\|g\|_q = \sup_{\|f\|_p \leq 1} \left| \int_\Omega fg \,\mathrm{d}\mu \right|.$$

Ceci s'étend au cas $q = +\infty$, $p = 1$ si μ est σ-finie.

La proposition 6.27 admet une réciproque que nous admettrons.

Théorème 6.29 (Riesz). *Si μ est σ-finie et $1 \leq p < +\infty$, toute forme linéaire continue Ψ sur $\mathrm{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ peut s'écrire*

$$\Psi : \mathrm{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu) \to \mathbb{K}, \quad f \mapsto \int_\Omega f g \,\mathrm{d}\mu,$$

pour un unique élément g de L^q où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. On peut ainsi identifier le dual topologique de $\mathrm{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ à $\mathrm{L}^q_{\mathbb{K}}(\mu)$:

$$\left(\mathrm{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)\right)' = \mathrm{L}^q_{\mathbb{K}}(\mu), \quad 1 \leq p < +\infty, \ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Corollaire 6.30. *Si μ est σ-finie et $1 < p < +\infty$, $\mathrm{L}^p(\mu)$ est réflexif (on peut l'identifier avec son bidual topologique).*

Remarque 6.31. En général le dual de L^∞ n'est pas L^1. Il contient L^1.