Chapitre 3

Intégration des fonctions mesurables positives

Dans tout ce chapitre, $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ désigne un espace mesuré. Notre but est de construire et d'étudier l'intégrale sur Ω par rapport à μ, d'abord pour les fonctions étagées positives, puis par extension pour toutes les applications $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}_+$, mesurables $\mathcal{F}$-Bor$(\overline{\mathbb{R}}_+)$.

3.1 Intégration des fonctions étagées positives

On note $\mathcal{E}_+$ l'ensemble des fonctions étagées $\Omega \to \mathbb{R}_+$, mesurables $\mathcal{F}$-Bor$(\mathbb{R}_+)$.

Définition 3.1. *Soit $u \in \mathcal{E}_+$, de décomposition canonique $u = \sum_{i=1}^{n} y_i \mathbf{1}_{A_i}$. On pose*

$$\int_\Omega u \,\mathrm{d}\mu := \sum_{i=1}^{n} y_i \mu(A_i). \tag{3.1}$$

Cette quantité s'appelle intégrale sur Ω de u par rapport à la mesure μ.

L'intégrale $\int_\Omega u \,\mathrm{d}\mu$ est un élément de $\overline{\mathbb{R}}_+$. Bien que les y_i soient tous réels (d'après la définition des fonctions étagées), elle peut très bien valoir $+\infty$, si pour un $y_i > 0$, le $\mu(A_i)$ correspondant vaut $+\infty$. Rappelons la convention « $0 \times (+\infty) := 0$ » qui est bien utile ici lorsque $\mu\big(u^{-1}(\{0\})\big) = +\infty$.

Exemple 3.1. Si u est une fonction constante, alors sa décomposition canonique s'écrit $u = c\mathbf{1}_\Omega$, avec $c \in \mathbb{R}_+$. La formule (3.1) nous donne alors

$$\int_\Omega c \,\mathrm{d}\mu = c\mu(\Omega).$$

Exemple 3.2. Si $u = c\mathbf{1}_A$, avec $c \in]0, +\infty[$, $A \in \mathcal{F}$ et $A \neq \Omega$, sa décomposition canonique est $u = c\mathbf{1}_A + 0 \times \mathbf{1}_{A^c}$ d'où

$$\int_\Omega c\mathbf{1}_A \,\mathrm{d}\mu = c\mu(A) + 0 \times \mu(A^c) = c\mu(A).$$

Ce résultat reste vrai pour $c = 0$ par l'exemple 3.1 (la décomposition canonique est alors $u = 0 \times \mathbf{1}_\Omega$). Le cas particulier $c = 1$ est d'une grande utilité car il permet d'exprimer la mesure d'un ensemble sous la forme d'une intégrale :

$$\forall A \in \mathcal{F}, \quad \int_\Omega \mathbf{1}_A \, \mathrm{d}\mu = \mu(A). \tag{3.2}$$

Le lemme suivant donne plus de souplesse dans le calcul de l'intégrale d'une fonction étagée en évitant le recours systématique à la décomposition canonique. Il sera utile pour prouver l'additivité de l'intégrale sur $\mathcal{E}_+$.

Lemme 3.2. *Si $u \in \mathcal{E}_+$ s'écrit $u = \sum_{k=1}^{r} t_k \mathbf{1}_{C_k}$, les C_k appartenant tous à $\mathcal{F}$ et étant deux à deux disjoints, les réels t_k n'étant pas forcément tous distincts,*

$$\int_\Omega u \, \mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{r} t_k \mu(C_k).$$

Démonstration. En notant $u(\Omega) = \{y_1, \dots, y_n\}$, les y_i étant tous distincts et $A_i := u^{-1}(\{y_i\})$, la décomposition canonique est

$$u = \sum_{i=1}^{n} y_i \mathbf{1}_{A_i}$$

Comme les C_k sont deux à deux disjoints, u est constante de valeur t_k sur chaque C_k *non vide*. Chaque C_k non vide est donc inclus dans un A_i, car sinon C_k aurait au moins un élément ω dans un A_i et un élément ω' dans un A_j avec $i \neq j$, d'où $u(\omega) = y_i \neq y_j = u(\omega')$, ce qui contredirait la constance de u sur C_k. Notons

$$K(i) := \big\{k \in \{1, \dots, r\};\ \emptyset \neq C_k \subset A_i\big\}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Si $k \in K(i)$, C_k n'étant pas vide a au moins un élément ω qui nécessairement est aussi dans A_i, d'où $t_k = u(\omega) = y_i$. Ainsi

$$\forall i = 1, \dots, n,\ \forall k \in K(i), \quad t_k = y_i. \tag{3.3}$$

Par construction de $K(i)$, on a clairement

$$\forall i = 1, \dots, n, \quad \bigcup_{k \in K(i)} C_k \subset A_i.$$

A-t-on l'égalité ? Supposons que l'ensemble $A_i \setminus \bigcup_{k \in K(i)} C_k$ ait au moins un élément ω. D'une part $\omega \in A_i$ donc $u(\omega) = y_i$. D'autre part ω n'appartient à aucun des C_k indexés par $K(i)$, ni à aucun des C_k indexés par un autre $K(j)$ pour $j \neq i$ puisqu'alors il serait dans A_j qui est disjoint de A_i. Ainsi ω n'appartient à aucun des C_k, puisqu'on vient de les éliminer tous... sauf ceux qui sont vides ! Alors ou bien le complémentaire dans Ω de

$\bigcup_{1\leq k\leq r} C_k$ est vide et on a une contradiction, ou bien ω appartient à ce complémentaire et dans ce cas, $u(\omega) = 0$ puisque tous les $\mathbf{1}_{C_k}(\omega)$ sont nuls. Là aussi on a une contradiction, sauf si $y_i = 0$. Nous venons donc de vérifier que :

$$\text{si } y_i \neq 0, \quad A_i \setminus \bigcup_{k\in K(i)} C_k = \emptyset, \quad \text{d'où } A_i = \bigcup_{k\in K(i)} C_k.$$

Les C_k indexés par $K(i)$ formant ainsi une partition finie de A_i (pour $y_i \neq 0$), on en déduit par additivité de la mesure μ et (3.3) :

$$\text{si } y_i \neq 0, \quad y_i\mu(A_i) = y_i \sum_{k\in K(i)} \mu(C_k) = \sum_{k\in K(i)} y_i\mu(C_k) = \sum_{k\in K(i)} t_k\mu(C_k).$$

Finalement,

$$\int_\Omega u\,\mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^n y_i\mu(A_i) = \sum_{\substack{i=1\\ y_i\neq 0}}^n y_i\mu(A_i) = \sum_{\substack{i=1\\ y_i\neq 0}}^n \sum_{k\in K(i)} t_k\mu(C_k) = \sum_{\substack{k=1\\ t_k\neq 0\\ C_k\neq\emptyset}}^r t_k\mu(C_k) = \sum_{k=1}^r t_k\mu(C_k).$$

□

Proposition 3.3. *L'intégrale sur $\mathcal{E}_+$ est homogène, additive et croissante : pour tous $u, v \in \mathcal{E}_+$, $c \in \mathbb{R}_+$,*

i) $\displaystyle\int_\Omega cu\,\mathrm{d}\mu = c\int_\Omega u\,\mathrm{d}\mu$;

ii) $\displaystyle\int_\Omega (u+v)\,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega u\,\mathrm{d}\mu + \int_\Omega v\,\mathrm{d}\mu$;

iii) si $u \leq v$, $\displaystyle\int_\Omega u\,\mathrm{d}\mu \leq \int_\Omega v\,\mathrm{d}\mu$.

Démonstration. D'abord, il est clair que pour $u, v \in \mathcal{E}_+$ et $c \in \mathbb{R}_+$, les fonctions cu et $u+v$ appartiennent à $\mathcal{E}_+$. Notons $u = \sum_{i=1}^m y_i\mathbf{1}_{A_i}$ et $v = \sum_{j=1}^n z_j\mathbf{1}_{B_j}$ les décompositions canoniques respectives de u et v. Ainsi $\{A_i;\ 1 \leq i \leq m\}$ et $\{B_j;\ 1 \leq j \leq n\}$ sont des partitions de Ω.

L'homogénéité i) est évidente car la décomposition canonique de cu est $\sum_{i=1}^m cy_i\mathbf{1}_{A_i}$ si $c > 0$ et $0 \times \mathbf{1}_\Omega$ si $c = 0$. Dans ce cas particulier, il convient de remarquer que si $\int_\Omega u\,\mathrm{d}\mu = +\infty$, on a encore $0 \times \int_\Omega u\,\mathrm{d}\mu = 0 = \int_\Omega (0 \times u)\,\mathrm{d}\mu$ grâce à la convention « $0 \times (+\infty) = 0$ ».

Pour vérifier l'additivité ii), posons

$$C_{i,j} := A_i \cap B_j, \quad 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n.$$

Ces ensembles sont deux à deux disjoints, certains pouvant être vides. On voit que

$$\forall i = 1, \dots, m, \quad A_i = \bigcup_{j=1}^n C_{i,j} \quad \text{et} \quad \forall j = 1, \dots, n, \quad B_j = \bigcup_{i=1}^m C_{i,j}. \tag{3.4}$$

Vérifions le pour la première égalité :

$$\bigcup_{j=1}^{n} C_{i,j} = \bigcup_{j=1}^{n} A_i \cap B_j = A_i \cap \Big(\bigcup_{j=1}^{n} B_j\Big) = A_i \cap \Omega = A_i.$$

Sur chaque $C_{i,j}$ non vide, la fonction $u + v$ est constante et vaut $y_i + z_j$. Les $C_{i,j}$ sont deux à deux disjoints et la réunion de *tous* les $C_{i,j}$ est Ω. Enfin si $C_{i,j} = \emptyset$, $(y_i + z_j)\mathbf{1}_{C_{i,j}}$ est la fonction identiquement nulle. Ces remarques justifient l'écriture

$$u + v = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(y_i + z_j)\mathbf{1}_{C_{i,j}}.$$

Cette écriture n'est pas forcément la décomposition canonique de $u + v$ car certains des $C_{i,j}$ peuvent être vides et les $(y_i + z_j)$ ne sont pas nécessairement tous distincts. C'est ici qu'intervient le lemme 3.2 qui légitime la première des égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (u+v)\,\mathrm{d}\mu &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(y_i + z_j)\mu(C_{i,j})\\
&= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} y_i\mu(C_{i,j}) + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} z_j\mu(C_{i,j})\\
&= \sum_{i=1}^{m} y_i \sum_{j=1}^{n}\mu(C_{i,j}) + \sum_{j=1}^{n} z_j \sum_{i=1}^{m}\mu(C_{i,j})\\
&= \sum_{i=1}^{m} y_i\mu(A_i) + \sum_{j=1}^{n} z_j\mu(B_j) \qquad (3.5)\\
&= \int_\Omega u\,\mathrm{d}\mu + \int_\Omega v\,\mathrm{d}\mu,
\end{aligned}$$

l'égalité (3.5) découlant de (3.4) et de l'additivité de la mesure μ.

La croissance iii) résulte de l'additivité. En effet rappelons que $u \leq v$ signifie que pour tout $\omega \in \Omega$, $u(\omega) \leq v(\omega)$ et comme u et v sont étagées, donc à valeurs *réelles*, $v(\omega) - u(\omega)$ est bien défini et $v(\omega) - u(\omega) \geq 0$. Alors $v - u \in \mathcal{E}_+$, et $v = u + (v - u)$. Par ii), on a

$$\int_\Omega v\,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega u\,\mathrm{d}\mu + \int_\Omega (v-u)\,\mathrm{d}\mu \geq \int_\Omega u\,\mathrm{d}\mu,$$

puisque $\int_\Omega (v-u)\,\mathrm{d}\mu \in \overline{\mathbb{R}}_+$. □

Lemme 3.4. *Soit $u \in \mathcal{E}_+$. La fonction d'ensembles*

$$\nu : \mathcal{F} \to \overline{\mathbb{R}}_+, \quad B \mapsto \nu(B) = \int_\Omega u\mathbf{1}_B\,\mathrm{d}\mu =: \int_B u\,\mathrm{d}\mu$$

est une mesure sur $(\Omega, \mathcal{F})$.

Démonstration. Si $B \in \mathcal{F}$ et $u \in \mathcal{E}_+$, la fonction $u\mathbf{1}_B$ appartient elle aussi à $\mathcal{E}_+$ et en notant $u = \sum_{i=1}^n y_i \mathbf{1}_{A_i}$ la décomposition canonique de u, on a

$$u\mathbf{1}_B = \sum_{i=1}^n y_i(\mathbf{1}_{A_i} \cdot \mathbf{1}_B) = \sum_{i=1}^n y_i \mathbf{1}_{A_i \cap B}.$$

Les $A_i \cap B$ étant deux à deux disjoints, le lemme 3.2 nous donne

$$\forall B \in \mathcal{F}, \quad \int_\Omega u\mathbf{1}_B \,\mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^n y_i \mu(A_i \cap B).$$

Cette égalité s'écrit aussi $\nu = \sum_{i=1}^n y_i \nu_i$, où les fonctions d'ensembles ν_i sont définies par

$$\nu_i : \mathcal{F} \to \overline{\mathbb{R}}_+, \quad B \mapsto \nu_i(B) := \mu(A_i \cap B).$$

On voit ainsi que ν_i est la mesure trace de μ sur A_i (cf. Chapitre 1, exemple 1.4). Pour chaque i, $y_i\nu_i$ est donc aussi une mesure (si $y_i = 0$, c'est la mesure nulle, même si ν_i n'est pas finie, en raison de la convention « $0 \times (+\infty) := 0$ »). Une somme finie de mesures est clairement une mesure (la somme hérite de la σ-additivité de chacun des termes par la formule de sommation par paquets dans $\overline{\mathbb{R}}_+$). La fonction d'ensembles ν est donc bien une mesure sur $\mathcal{F}$. □

3.2 Intégrale dans $\mathcal{M}_+$

Nous notons $\mathcal{M}_+$ l'ensemble des applications $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}_+$, mesurables $\mathcal{F}$-Bor$(\overline{\mathbb{R}}_+)$. Grâce au corollaire 2.18, $\mathcal{E}_+$ est inclus dans $\mathcal{M}_+$.

Définition 3.5. *Pour $f \in \mathcal{M}_+$, on appelle intégrale sur Ω de f par rapport à μ l'élément de $\overline{\mathbb{R}}_+$ noté $\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu$ et défini par*

$$\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu := \sup\left\{\int_\Omega u \,\mathrm{d}\mu;\ u \in \mathcal{E}_+,\ u \leq f\right\}. \tag{3.6}$$

Pour $A \in \mathcal{F}$, $f\mathbf{1}_A$ appartient encore à $\mathcal{M}_+$ et on définit aussi

$$\int_A f \,\mathrm{d}\mu := \int_\Omega f\mathbf{1}_A \,\mathrm{d}\mu. \tag{3.7}$$

Cette définition pose deux problèmes de cohérence, résolus par les deux remarques suivantes.

Remarque 3.6. Si $f \in \mathcal{E}_+$, les deux définitions de son intégrale par (3.1) et (3.6) coïncident. Pour le voir, notons provisoirement $\int_\Omega^{\text{étag}} f \,\mathrm{d}\mu$ l'intégrale de f au sens de (3.1) et $\int_\Omega^{\text{mes+}} f \,\mathrm{d}\mu$ celle au sens de (3.6). Pour toute $u \in \mathcal{E}_+$ telle que $u \leq f$, on a par croissance de l'intégrale des fonctions étagées (cf. proposition 3.3 iii) l'inégalité $\int_\Omega^{\text{étag}} u \,\mathrm{d}\mu \leq \int_\Omega^{\text{étag}} f \,\mathrm{d}\mu$. Par conséquent dans (3.6), le supremum est *atteint* pour $u = f$, ce qui implique $\int_\Omega^{\text{mes+}} f \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega^{\text{étag}} f \,\mathrm{d}\mu$.

Remarque 3.7. Pour s'assurer de la cohérence de la définition de $\int_A f \, \mathrm{d}\mu$ par (3.7), le lecteur résoudra avec profit l'exercice suivant.
Soit $A \in \mathcal{F}$, *on note* $\mathcal{F}_A := \{A \cap B;\ B \in \mathcal{F}\}$.

a) *Vérifier que* $\mathcal{F}_A$ *est une tribu sur* A *(tribu trace). Par construction* $\mathcal{F}_A \subset \mathcal{F}$, *donc la restriction* μ_A *de* μ *à* $\mathcal{F}_A$ *est bien définie (noter que* $\mathcal{F}_A$ *n'est pas une* sous-tribu *de* $\mathcal{F}$*). Vérifier que* μ_A *est une mesure sur* $(A, \mathcal{F}_A)$.
b) *Montrer que pour toute* $f \in \mathcal{M}_+(\mathcal{F})$, *sa restriction* f_A *à* A *appartient à* $\mathcal{M}_+(\mathcal{F}_A)$ *et que*
$$\int_A f_A \, \mathrm{d}\mu_A = \int_\Omega f \mathbf{1}_A \, \mathrm{d}\mu,$$
la première intégrale étant comprise au sens de (3.6), appliquée à l'espace mesuré $(A, \mathcal{F}_A, \mu_A)$.

Dans le langage de la théorie des probabilités, les notations traditionnelles sont un peu différentes de celles utilisées ci-dessus.

Définition 3.8. *Soit* $(\Omega, \mathcal{F})$ *un espace probabilisable. On appelle* variable aléatoire positive *sur* $(\Omega, \mathcal{F})$ *toute application* $X : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}_+$, *mesurable* $\mathcal{F}$-$\mathrm{Bor}(\overline{\mathbb{R}}_+)$. *Si* $\mathbf{P}$ *est une mesure de probabilité sur* $(\Omega, \mathcal{F})$, *on appelle* espérance *de* X *sous* $\mathbf{P}$, *l'intégrale*
$$\mathbf{E}X := \int_\Omega X \, \mathrm{d}\mathbf{P},$$
au sens de (3.6).

Notons au passage qu'une variable aléatoire positive n'est pas nécessairement une variable aléatoire réelle (elle l'est si $+\infty \notin X(\Omega)$, vérification laissée en exercice).

Proposition 3.9 (Croissance de l'intégrale). *Pour toutes* $f, g \in \mathcal{M}_+$,
$$f \leq g \quad \Rightarrow \quad \int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu \leq \int_\Omega g \, \mathrm{d}\mu. \tag{3.8}$$

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de la définition 3.5 et de l'inclusion
$$\{u \in \mathcal{E}_+;\ u \leq f\} \subset \{u \in \mathcal{E}_+;\ u \leq g\}.$$
□

Nous abordons maintenant le premier des grands théorèmes d'interversion limite intégrale « $\int \lim = \lim \int$ » qui font toute la puissance de la théorie de l'intégration au sens de Lebesgue.

Théorème 3.10 (de convergence monotone ou de Beppo Levi). *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite* croissante *dans* $\mathcal{M}_+$. *Alors* $f := \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n = \lim_{n\to+\infty} f_n$ *est aussi dans* $\mathcal{M}_+$ *et*
$$\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n \, \mathrm{d}\mu = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega f_n \, \mathrm{d}\mu. \tag{3.9}$$

Démonstration. L'appartenance de f à $\mathcal{M}_+$ a déjà été vue (proposition 2.19). Par croissance de l'intégrale (prop. 3.9), la suite $\left(\int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, donc convergente dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ vers une limite que nous noterons L :

$$L := \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu. \tag{3.10}$$

L'inégalité $f_n \leq f$, vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, implique par croissance de l'intégrale, $\int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu \leq \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu$, puis en prenant le supremum sur n (ou par passage à la limite) :

$$L \leq \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu. \tag{3.11}$$

Pour obtenir l'inégalité inverse et achever ainsi la preuve de (3.9), il suffit de montrer que :

$$\forall u \in \mathcal{E}_+, \qquad u \leq f \quad \Rightarrow \quad \int_\Omega u \,\mathrm{d}\mu \leq L, \tag{3.12}$$

en effet en prenant dans (3.12) le supremum sur les u majorées par f il vient :

$$\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu = \sup\left\{ \int_\Omega u \,\mathrm{d}\mu;\ u \leq f,\ u \in \mathcal{E}_+ \right\} \leq L. \tag{3.13}$$

Preuve de (3.12). Soit $u \in \mathcal{E}_+$, $u \leq f$. Fixons $p \in]0,1[$ et définissons :

$$A_n := \big\{\omega \in \Omega;\ pu(\omega) \leq f_n(\omega)\big\}.$$

Grâce à la proposition 2.17, on sait que A_n appartient à la tribu $\mathcal{F}$. La suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *croissante pour l'inclusion* car si $\omega \in A_n$, alors $pu(\omega) \leq f_n(\omega) \leq f_{n+1}(\omega)$ par croissance de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donc $\omega \in A_{n+1}$. La réunion de la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est égale à Ω. En effet pour tout $\omega \in \Omega$,

- ou bien $0 < f(\omega) \leq +\infty$, alors comme $u(\omega) \leq f(\omega)$ et $p < 1$, on a $pu(\omega) < f(\omega)$; or $f_n(\omega)$ converge vers $f(\omega)$, il existe donc un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $f_{n_0}(\omega) > pu(\omega)$, d'où $\omega \in A_{n_0}$ et $\omega \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$;
- ou bien $f(\omega) = 0$ alors d'une part l'inégalité $u \leq f$ implique $u(\omega) = 0$ d'où $pu(\omega) = 0$ et d'autre part les inégalités $0 \leq f_n \leq f$ impliquent pour tout n, $f_n(\omega) = 0$; dans ce cas, ω appartient à tous les A_n donc *a fortiori* à leur réunion.

Nous venons ainsi de vérifier que :

$$A_n \uparrow \Omega, \quad \text{dans } \mathcal{F}. \tag{3.14}$$

Nous disposons des inégalités suivantes :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad pu(\omega)\mathbf{1}_{A_n}(\omega) \leq f_n(\omega)\mathbf{1}_{A_n}(\omega) \leq f_n(\omega), \tag{3.15}$$

en effet si $\omega \in A_n$, $\mathbf{1}_{A_n}(\omega) = 1$ et la première inégalité résulte de la définition de A_n, si $\omega \in A_n^c$, $\mathbf{1}_{A_n}(\omega) = 0$ et (3.15) se réduit à $0 \leq 0 \leq f_n(\omega)$. Réécrivant (3.15) sous la forme

$pu\mathbf{1}_{A_n} \leq f_n\mathbf{1}_{A_n} \leq f_n$ d'une inégalité entre *fonctions* appartenant à $\mathcal{M}_+$, on en déduit par croissance de l'intégrale :

$$\int_{A_n} pu \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega pu\mathbf{1}_{A_n} \,\mathrm{d}\mu \leq \int_\Omega f_n\mathbf{1}_{A_n} \,\mathrm{d}\mu \leq \int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu \leq L.$$

Compte-tenu de l'homogénéité de l'intégrale sur $\mathcal{E}_+$ (noter que $u\mathbf{1}_{A_n}$ est étagée), nous retenons de ces inégalités vraies pour tout n, que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad p\int_{A_n} u \,\mathrm{d}\mu \leq L. \tag{3.16}$$

Cette inégalité peut encore s'écrire $p\nu(A_n) \leq L$, en introduisant la fonction d'ensembles $\nu : B \mapsto \nu(B) := \int_B u \,\mathrm{d}\mu$. Par le lemme 3.4, ν est une *mesure* sur $(\Omega, \mathcal{F})$. Sa continuité croissante séquentielle et (3.14) nous donnent alors la convergence $\nu(A_n) \uparrow \nu(\Omega) = \int_\Omega u \,\mathrm{d}\mu$. Faisant tendre n vers l'infini dans (3.16) on obtient ainsi :

$$p\int_\Omega u \,\mathrm{d}\mu \leq L. \tag{3.17}$$

Jusqu'ici, nous avons travaillé avec p *fixé*, mais quelconque dans $]0, 1[$. L'ensemble A_n dépendait de p, mais nous venons de l'éliminer. L'inégalité (3.17) est donc vraie *pour tout* $p \in]0, 1[$ et on peut y faire tendre p vers 1 (par valeurs inférieures) pour obtenir finalement

$$\int_\Omega u \,\mathrm{d}\mu \leq L.$$

Comme les seules hypothèses faites sur u pour aboutir à ce résultat étaient $u \in \mathcal{E}_+$ et $u \leq f$, ceci établit (3.12) et achève la preuve du théorème. □

Corollaire 3.11 (homogénéité et additivité de l'intégrale dans $\mathcal{M}_+$). *Pour toutes fonctions $f, g \in \mathcal{M}_+$ et toute constante $c \in \overline{\mathbb{R}}_+$,*

a) $\displaystyle\int_\Omega cf \,\mathrm{d}\mu = c\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu$;

b) $\displaystyle\int_\Omega (f + g) \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu + \int_\Omega g \,\mathrm{d}\mu.$

Démonstration. Le cas $c < +\infty$ dans le a) est une conséquence immédiate de la définition 3.5 et de la proposition 3.3 i) et ne requiert pas le théorème de Beppo Levi. Pour traiter le cas $c = +\infty$, posons $f_n := nf$. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante dans $\mathcal{M}_+$. Sa limite est cf. En effet, si $f(\omega) = 0$, $cf(\omega) = (+\infty) \times 0 = 0$ et $f_n(\omega) = nf(\omega) = 0$ converge bien vers 0. Si $f(\omega) \in]0, +\infty]$, $cf(\omega) = (+\infty) \times f(\omega) = +\infty$ et $f_n(\omega) = nf(\omega)$ tend vers $+\infty$ puisque $f(\omega) > 0$. Par le théorème de Beppo Levi, $\int_\Omega cf \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega \lim_{n\to+\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu$. Par le cas $c < +\infty$ (avec $c = n$), $\int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu = n\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu$. Si $\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu > 0$, la limite de $n\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu$ est $+\infty$. Si $\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu = 0$, cette limite vaut 0. Dans les deux cas, cette limite s'écrit $(+\infty) \times \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu$ grâce à nos conventions sur la multiplication dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. Finalement on a bien $\int_\Omega (+\infty) \times f \,\mathrm{d}\mu = (+\infty) \times \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu$.

Pour prouver le b), le théorème 2.23 nous fournit deux suites croissantes (u_n) et (v_n) dans $\mathcal{E}_+$ convergentes vers f et g respectivement. Clairement la suite $(u_n + v_n)$ est alors croissante dans $\mathcal{E}_+$ et converge vers $f + g$. Par additivité de l'intégrale des fonctions étagées,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \int_\Omega (u_n + v_n)\,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega u_n\,\mathrm{d}\mu + \int_\Omega v_n\,\mathrm{d}\mu. \tag{3.18}$$

Une triple application du théorème de Beppo Levi nous donne quand n tend vers l'infini :

$$\int_\Omega (u_n + v_n)\,\mathrm{d}\mu \uparrow \int_\Omega (f+g)\,\mathrm{d}\mu, \quad \int_\Omega u_n\,\mathrm{d}\mu \uparrow \int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu, \quad \int_\Omega v_n\,\mathrm{d}\mu \uparrow \int_\Omega g\,\mathrm{d}\mu,$$

ce qui permet de conclure par passage à la limite dans (3.18). □

Corollaire 3.12 (Interversion série-intégrale dans $\mathcal{M}_+$). *Soit $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathcal{M}_+$. La fonction $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} f_k$ est aussi dans $\mathcal{M}_+$ et*

$$\int_\Omega \left(\sum_{k=0}^{+\infty} f_k\right)\mathrm{d}\mu = \sum_{k=0}^{+\infty}\int_\Omega f_k\,\mathrm{d}\mu \qquad \textit{(égalité dans } \overline{\mathbb{R}}_+\textit{)}. \tag{3.19}$$

Démonstration. Posons

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} f_k, \qquad s := \sum_{k=0}^{+\infty} f_k.$$

L'application s_n est mesurable positive comme somme d'un nombre fini d'applications mesurables positives. La suite (s_n) converge en croissant (dans $\overline{\mathbb{R}}_+$) vers s. L'additivité de l'intégrale vue au corollaire 3.11 b) pour la somme de deux éléments de $\mathcal{M}_+$ s'étend immédiatement à la somme d'un nombre *fini* quelconque de termes dans $\mathcal{M}_+$, d'où

$$\forall n \geq 1, \qquad \int_\Omega s_n\,\mathrm{d}\mu = \sum_{k=0}^{n}\int_\Omega f_k\,\mathrm{d}\mu. \tag{3.20}$$

Par le théorème de Beppo Levi, $s \in \mathcal{M}_+$ et $\int_\Omega s_n\,\mathrm{d}\mu$ converge en croissant dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ vers $\int_\Omega s\,\mathrm{d}\mu$. Ainsi le premier membre de (3.20) converge vers celui de (3.19). D'autre part, $\int_\Omega f_k\,\mathrm{d}\mu$ est dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ donc positif. Par conséquent la suite $\left(\sum_{k=0}^{n}\int_\Omega f_k\,\mathrm{d}\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante donc convergente dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ et sa limite est $\sum_{k=0}^{+\infty}\int_\Omega f_k\,\mathrm{d}\mu$. Le second membre de (3.20) converge ainsi vers celui de (3.19). L'égalité (3.20) étant vraie pour tout $n \geq 1$ nous donne donc l'égalité (3.19) par passage à la limite. □

Corollaire 3.13 (Lemme de Fatou). *Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite dans $\mathcal{M}_+$,*

$$\int_\Omega \liminf_{n\to+\infty} f_n\,\mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to+\infty}\int_\Omega f_n\,\mathrm{d}\mu. \tag{3.21}$$

Démonstration. Posons $g := \liminf_{n\to+\infty} f_n$. Par définition de la limite inférieure,

$$g = \lim_{n\to+\infty} \inf_{k\geq n} f_k = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geq n} f_k.$$

La fonction $g_n := \inf_{k\geq n} f_k$ appartient à $\mathcal{M}_+$ (cf. corollaire 2.20 i) et la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en croissant vers g. Par le théorème de Beppo Levi, on a donc

$$\int_\Omega g_n \,\mathrm{d}\mu \uparrow \int_\Omega g \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega \liminf_{n\to+\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu. \tag{3.22}$$

D'autre part, on a clairement pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g_n \leq f_n$, d'où par croissance de l'intégrale,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \int_\Omega g_n \,\mathrm{d}\mu \leq \int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu. \tag{3.23}$$

Nous ne savons pas si le second membre de (3.23) a une limite quand n tend vers l'infini, mais par contre sa limite inférieure existe toujours. On peut ainsi passer à la limite inférieure dans (3.23), ce qui nous donne par conservation de l'inégalité *large* :

$$\liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega g_n \,\mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu. \tag{3.24}$$

Par (3.22), on sait que la limite inférieure du premier membre de (3.24) est en fait une limite et vaut :

$$\liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega g_n \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega g_n \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega \liminf_{n\to+\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu,$$

d'où la conclusion. □

Remarque 3.14. Voici un exemple simple qui peut servir à mémoriser le sens de l'inégalité dans le lemme de Fatou et à montrer que celle-ci peut être stricte. Prenons $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{F} = \mathrm{Bor}(\mathbb{R})$ et $\mu = \lambda$, mesure de Lebesgue. Prenons pour (f_n) la suite de fonctions étagées

$$f_n = \begin{cases} \mathbf{1}_{[0,1]} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \mathbf{1}_{]1,2]} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Il est clair que $\liminf f_n$ est la fonction identiquement nulle sur $\mathbb{R}$, d'où $\int_\mathbb{R} \liminf f_n \,\mathrm{d}\lambda = 0$. D'autre part l'intégrale de fonction étagée $\int_\mathbb{R} f_n \,\mathrm{d}\lambda$ vaut $\lambda([0,1])$ pour n pair et $\lambda(]1,2])$ pour n impair, donc pour tout n, $\int_\mathbb{R} f_n \,\mathrm{d}\lambda = 1$ et la suite constante $(\int_\mathbb{R} f_n \,\mathrm{d}\mu)$ a pour limite inférieure 1. Finalement sur cet exemple nous avons

$$0 = \int_\mathbb{R} \liminf f_n \,\mathrm{d}\lambda < \liminf \int_\mathbb{R} f_n \,\mathrm{d}\lambda = 1.$$

Remarque 3.15. Une lecture rapide de la démonstration du lemme de Fatou pourrait laisser l'impression qu'elle s'adapte avec les limites supérieures au lieu des limites inférieures. Il n'en est rien. En écrivant $h_n := \sup_{k\geq n} f_k$, on voit immédiatement que $f_n \leq h_n$, d'où $\int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu \leq \int_\Omega h_n \,\mathrm{d}\mu$ et par conservation de l'inégalité large $\limsup \int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu \leq \limsup \int_\Omega h_n \,\mathrm{d}\mu$. La deuxième partie de la preuve s'adapte ainsi facilement. Par contre la première partie ne fonctionne plus. En effet h_n converge en *décroissant* vers $h = \limsup f_n$ et nous n'avons pas de théorème de Beppo Levi pour les suites décroissantes. Il n'est donc plus possible d'identifier $\limsup \int_\Omega h_n \,\mathrm{d}\mu$ comme $\int_\Omega h \,\mathrm{d}\mu$.

Remarque 3.16. Le fait que la *preuve* du lemme de Fatou ne s'adapte pas aux limites supérieures n'interdit pas l'existence d'une inégalité analogue pour les limites supérieures. La confrontation des deux exemples suivants montre qu'il faut renoncer définitivement à l'idée d'un lemme de Fatou pour les limites supérieures. Le premier est celui de la remarque 3.14, où $\limsup f_n = \mathbf{1}_{[0,2]}$ et

$$1 = \limsup \int_{\mathbb{R}} f_n \,\mathrm{d}\lambda < \int_{\mathbb{R}} \limsup f_n \,\mathrm{d}\lambda = 2.$$

Le second exemple est sur le même espace mesuré, la suite (g_n) de fonctions étagées définies par $g_n := \frac{1}{n}\mathbf{1}_{[0,+\infty[}$. Clairement $\limsup g_n = 0$ d'où $\int_{\mathbb{R}} \limsup g_n \,\mathrm{d}\lambda = 0$. Par contre, $\int_{\mathbb{R}} g_n \,\mathrm{d}\lambda = +\infty$ pour tout n, d'où $\limsup \int_{\mathbb{R}} g_n \,\mathrm{d}\lambda = +\infty$. Contrairement au premier exemple, nous avons ici

$$0 = \int_{\mathbb{R}} \limsup g_n \,\mathrm{d}\lambda < \limsup \int_{\mathbb{R}} g_n \,\mathrm{d}\lambda = +\infty.$$

3.3 Applications aux mesures

Nous étudions dans cette section quelques retombées du théorème de Beppo Levi pour la construction de nouvelles mesures et l'intégration par rapport à une mesure image.

3.3.1 Mesure à densité par rapport à une autre mesure

Théorème 3.17. *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *un espace mesuré et* $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}_+$*, mesurable* $\mathcal{F}$-$\mathrm{Bor}(\overline{\mathbb{R}}_+)$*. Définisssons la fonction d'ensembles*

$$\nu : \mathcal{F} \to \overline{\mathbb{R}}_+, \quad A \mapsto \nu(A) := \int_A f \,\mathrm{d}\mu.$$

a) ν *est une mesure sur* $(\Omega, \mathcal{F})$*. On dit qu'elle est de densité* f *par rapport à* μ*.*

b) Pour toute $g : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}_+$*, mesurable* $\mathcal{F}$-$\mathrm{Bor}(\overline{\mathbb{R}}_+)$*,*

$$\int_\Omega g \,\mathrm{d}\nu = \int_\Omega gf \,\mathrm{d}\mu. \tag{3.25}$$

Pour exprimer que ν est à densité f par rapport à μ, on pourra écrire *symboliquement* :

$$\mathrm{d}\nu = f \,\mathrm{d}\mu \quad \text{ou} \quad \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu} = f.$$

L'écriture $\frac{d\nu}{d\mu} = f$ est un peu abusive car elle sous-entend que lorsqu'il existe une densité f, celle ci est unique. Il est facile de voir pourtant que si h est mesurable $\mathcal{F}$-Bor$(\overline{\mathbb{R}}_+)$ et égale μ-presque partout à f, h est aussi une densité de ν par rapport à μ. Nous reviendrons sur cette question après la preuve du théorème.

Preuve du a). Calculons $\nu(\emptyset)$ en appliquant la définition de ν :

$$\nu(\emptyset) = \int_\emptyset f \, d\mu = \int_\Omega f \mathbf{1}_\emptyset \, d\mu = \int_\Omega 0 \, d\mu = 0.$$

Pour prouver la σ-additivité de ν, soit $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathcal{F}$, à termes deux à deux disjoints et A sa réunion. Nous commençons par vérifier que

$$\mathbf{1}_A = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathbf{1}_{A_i}. \tag{3.26}$$

Pour cela, comparons les images de $\omega \in \Omega$ par chacun des deux membres de l'égalité fonctionnelle (3.26).

- Ou bien ω n'appartient pas à A et alors il ne peut appartenir à aucun des A_i, donc $\mathbf{1}_A(\omega) = 0$ et $\mathbf{1}_{A_i}(\omega) = 0$ pour tout i. Dans ce cas $\mathbf{1}_A(\omega) = 0 = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathbf{1}_{A_i}(\omega)$.
- Ou bien $\omega \in A$ et dans ce cas il existe un *unique* $i_0 = i_0(\omega)$ tel que $\omega \in A_{i_0}$: l'existence vient de la définition de A comme réunion des A_i et l'unicité du fait que les A_i sont deux à deux disjoints. Dans ce cas on a $\mathbf{1}_A(\omega) = 1$, $\mathbf{1}_{A_{i_0}}(\omega) = 1$ et pour tout $i \neq i_0$, $\mathbf{1}_{A_i}(\omega) = 0$, d'où $\mathbf{1}_A(\omega) = 1 = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathbf{1}_{A_i}(\omega)$.

En appliquant la définition de ν et (3.26), on justifie la première ligne du calcul suivant :

$$\begin{aligned}
\nu\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\Big) = \int_A f \, d\mu = \int_\Omega \mathbf{1}_A f \, d\mu &= \int_\Omega \Big(\sum_{i\in\mathbb{N}} \mathbf{1}_{A_i}\Big) f \, d\mu \\
&= \int_\Omega \Big(\sum_{i\in\mathbb{N}} (\mathbf{1}_{A_i} f)\Big) \, d\mu && (3.27) \\
&= \sum_{i\in\mathbb{N}} \int_\Omega \mathbf{1}_{A_i} f \, d\mu && (3.28) \\
&= \sum_{i\in\mathbb{N}} \nu(A_i).
\end{aligned}$$

L'égalité (3.27) résulte de la distributivité de la multiplication sur l'addition dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ (noter que dans la série $\sum_{i\in\mathbb{N}} \mathbf{1}_{A_i}(\omega)$, il y a au plus un terme non nul). Pour chaque i, la fonction $\mathbf{1}_{A_i} f$ appartient à $\mathcal{M}_+$, ce qui permet d'appliquer le corollaire 3.12 pour légitimer (3.28). Ainsi la σ-additivité de ν est établie et ν est une mesure sur $(\Omega, \mathcal{F})$. □

Preuve du b). Décrivons d'abord la démarche utilisée pour prouver l'égalité (3.25), il s'agit d'une méthode standard d'usage courant dans ce cours. On commence par vérifier (3.25) pour les fonctions indicatrices $g = \mathbf{1}_A$, $A \in \mathcal{F}$. Par additivité et homogénéité, on étend cette égalité aux fonctions étagées. Enfin on obtient l'égalité pour les fonctions g

mesurables positives quelconques par un passage à la limite en les approximant par une suite de fonctions étagées. Voyons cela en détail.

L'égalité (3.25) est vraie pour toute g de la forme $g = \mathbf{1}_A$, $A \in \mathcal{F}$. En effet,

$$\int_\Omega \mathbf{1}_A \,\mathrm{d}\nu = \nu(A) = \int_A f \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega \mathbf{1}_A f \,\mathrm{d}\mu.$$

La première de ces égalités est simplement le calcul de l'intégrale de la fonction étagée $\mathbf{1}_A$ par rapport à la *mesure* ν, cf. (3.2). Les deux autres égalités sont la définition de ν et celle de l'intégrale sur A.

Soit maintenant $g \in \mathcal{E}_+$, de décomposition canonique $g = \sum_{i=1}^n y_i \mathbf{1}_{A_i}$. Son intégrale sur Ω par rapport à la mesure ν est par définition

$$\int_\Omega g \,\mathrm{d}\nu = \sum_{i=1}^n y_i \nu(A_i).$$

En utilisant successivement la définition de $\nu(A_i)$, celle de l'intégrale sur A_i, l'additivité et l'homogénéité de l'intégrale par rapport à μ dans $\mathcal{M}_+$, on en déduit :

$$\int_\Omega g \,\mathrm{d}\nu = \sum_{i=1}^n y_i \int_{A_i} f \,\mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^n y_i \int_\Omega \mathbf{1}_{A_i} f \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega \sum_{i=1}^n y_i \mathbf{1}_{A_i} f \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega g f \,\mathrm{d}\mu.$$

Ainsi (3.25) est vérifiée pour toute $g \in \mathcal{E}_+$.

Soit $g \in \mathcal{M}_+$ quelconque. Par le théorème 2.23, il existe une suite croissante (g_n) dans $\mathcal{E}_+$, convergeant vers g. La fonction f étant mesurable positive, le produit $g_n f$ est aussi mesurable positif (en général, ce n'est plus une fonction étagée, seulement un élément de $\mathcal{M}_+$). Par positivité de f et croissance de (g_n), la suite $(g_n f)$ est aussi croissante dans $\mathcal{M}_+$. Vérifions la convergence de $(g_n f)$ vers gf, c'est-à-dire la convergence dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ de $\big(g_n(\omega)f(\omega)\big)$ vers $g(\omega)f(\omega)$, pour tout $\omega \in \Omega$. Cette convergence résulte des règles classiques sur la limite d'un produit[1] lorsque le couple $\big(g(\omega), f(\omega)\big)$ n'est ni $(0, +\infty)$, ni $(+\infty, 0)$. Voyons donc ces deux cas particuliers. Si $g(\omega) = 0$ et $f(\omega) = +\infty$ alors, parce que la suite $\big(g_n(\omega)\big)$ est *croissante*[2] dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, tous les $g_n(\omega)$ sont nuls et $g_n(\omega)f(\omega) = 0 \times (+\infty) = 0$ converge trivialement vers $g(\omega)f(\omega) = 0 \times (+\infty) = 0$. Si $g(\omega) = +\infty$ et $f(\omega) = 0$, alors pour tout n, $g_n(\omega)f(\omega) = g_n(\omega) \times 0 = 0$ et cette suite nulle converge trivialement vers $0 = g(\omega)f(\omega) = (+\infty) \times 0$.

Les hypothèses du théorème de Beppo Levi sont donc satisfaites aussi bien par la suite (g_n) que par $(g_n f)$. L'application du théorème de Beppo Levi relativement à ν pour (g_n) et à μ pour $(g_n f)$ nous donne les convergences :

$$\int_\Omega g_n \,\mathrm{d}\nu \uparrow \int_\Omega g \,\mathrm{d}\nu, \qquad \int_\Omega g_n f \,\mathrm{d}\mu \uparrow \int_\Omega g f \,\mathrm{d}\mu. \tag{3.29}$$

[1] On pourrait dire aussi que la multiplication $m : (x, y) \mapsto xy$ est continue en tout point de $\overline{\mathbb{R}}_+^2$, sauf aux points $(0, +\infty)$ et $(+\infty, 0)$.

[2] Voici un contre-exemple simple montrant l'utilité de la croissance de g_n ici : si $f(\omega) = +\infty$ et $g_n(\omega) = 1/n$, alors $g_n(\omega)f(\omega) = +\infty$ (pour tout n) ne converge pas vers $g(\omega)f(\omega) = 0 \times (+\infty) = 0$.

Comme g_n appartient à $\mathcal{E}_+$, elle vérifie (3.25) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \int_\Omega g_n \,\mathrm{d}\nu = \int_\Omega g_n f \,\mathrm{d}\mu. \tag{3.30}$$

Les convergences (3.29) permettent de passer à la limite dans l'égalité (3.30) pour conclure que g vérifie (3.25). □

Proposition 3.18. *Soient f et g deux applications $\Omega \to \overline{\mathbb{R}}_+$, mesurables $\mathcal{F}$-$\mathrm{Bor}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ telles que*

$$\forall A \in \mathcal{F}, \qquad \int_A f \,\mathrm{d}\mu = \int_A g \,\mathrm{d}\mu. \tag{3.31}$$

On suppose de plus que $\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu < +\infty$. Alors $f = g$ μ-presque partout. La même conclusion reste vraie sous l'hypothèse plus générale de l'existence dans $\mathcal{F}$ d'une suite croissante $(\Omega_n)_{n\geq 1}$ de réunion Ω, telle que $\int_{\Omega_n} f \,\mathrm{d}\mu$ soit finie pour chaque n.

La démonstration est proposée en exercice de T.D. Cette proposition signifie que si ν est la mesure de densité f par rapport à μ, alors toute autre densité g de ν est égale à f μ-presque partout dans le cas où ν est finie ou plus généralement σ-finie.

Exemple 3.3. Soit ν la loi uniforme sur le borélien B de $\mathbb{R}^d$ $(0 < \lambda_d(B) < +\infty)$. Alors ν admet pour densité par rapport à λ_d la fonction $f = c\mathbf{1}_B$, avec $c := 1/\lambda_d(B)$. Réciproquement si une loi de probabilité ν sur $(\mathbb{R}^d, \mathrm{Bor}(\mathbb{R}^d))$ admet par rapport à λ_d une densité de la forme $f = c\mathbf{1}_B$, avec $c > 0$ et $B \in \mathrm{Bor}(\mathbb{R}^d)$, alors ν est la loi uniforme sur B, $0 < \lambda_d(B) < +\infty$ et $c = 1/\lambda_d(B)$.

Vérification. Par définition, si ν est la loi uniforme sur B, $\nu(A) = c\lambda_d(A \cap B)$ pour tout $A \in \mathrm{Bor}(\mathbb{R}^d)$, avec $c := 1/\lambda_d(B)$. En remarquant que $\mathbf{1}_{A\cap B} = \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B$, on a donc

$$\nu(A) = c\lambda_d(A \cap B) = c \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_{A\cap B} \,\mathrm{d}\lambda_d = c \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B \,\mathrm{d}\lambda_d = \int_A c\mathbf{1}_B \,\mathrm{d}\lambda_d.$$

Ces égalités étant vérifiées pour tout $A \in \mathrm{Bor}(\mathbb{R}^d)$, la mesure ν a pour densité $c\mathbf{1}_B$ par rapport à λ_d.

Réciproquement si une loi de probabilité ν sur $(\mathbb{R}^d, \mathrm{Bor}(\mathbb{R}^d))$ admet par rapport à λ_d une densité de la forme $f = c\mathbf{1}_B$, avec $c > 0$ et $B \in \mathrm{Bor}(\mathbb{R}^d)$, alors pour tout $A \in \mathrm{Bor}(\mathbb{R}^d)$,

$$\nu(A) = \int_A c\mathbf{1}_B \,\mathrm{d}\lambda_d = c \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B \,\mathrm{d}\lambda_d = c \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_{A\cap B} \,\mathrm{d}\lambda_d = c\lambda_d(A \cap B).$$

En particulier pour $A = \mathbb{R}^d$, on obtient $1 = \nu(\mathbb{R}^d) = c\lambda_d(B)$. Cette égalité impose la finitude et la stricte positivité de $\lambda_d(B)$ et nous donne $c = 1/\lambda_d(B)$. en revenant au cas général, on a donc $\nu(A) = \lambda_d(A \cap B)/\lambda_d(B)$, ce qui montre que ν est la loi uniforme sur B. □

Pour voir d'autres exemples intéressants de lois à densité par rapport à λ_d, il nous faudra attendre de savoir intégrer pratiquement par rapport à λ_d, ce qui sera vu aux chapitre 4 pour la dimension 1 et 5 pour $d > 1$.

3.3.2 Transfert

Nous étudions maintenant l'intégration par rapport à une mesure image. Le résultat fondamental est le *théorème de transfert*. Travaillant avec deux espaces mesurables $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$ et $(\Omega_2, \mathcal{F}_2)$, nous noterons pour $i = 1, 2$, $\mathcal{E}_+(\Omega_i)$ et $\mathcal{M}_+(\Omega_i)$ les ensembles de fonctions $\Omega_i \to \overline{\mathbb{R}}_+$ respectivement étagées mesurables ou mesurables $\mathcal{F}_i$-Bor$(\overline{\mathbb{R}}_+)$.

Théorème 3.19 (de transfert). *Soient $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$ et $(\Omega_2, \mathcal{F}_2)$ deux espaces mesurables et $\varphi : \Omega_1 \to \Omega_2$, une application $\mathcal{F}_1$-$\mathcal{F}_2$ mesurable. Soit μ une mesure sur $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$ et $\nu := \mu \circ \varphi^{-1}$ sa mesure image sur $(\Omega_2, \mathcal{F}_2)$. Alors pour toute $h \in \mathcal{M}_+(\Omega_2)$,*

$$\int_{\Omega_1} (h \circ \varphi) \, \mathrm{d}\mu = \int_{\Omega_2} h \, \mathrm{d}\nu. \tag{3.32}$$

Ce théorème est essentiellement un théorème de changement de variable dans l'intégrale sur un espace abstrait. En écrivant le premier membre de (3.32) sous la forme $\int_{\Omega_1} h\bigl(\varphi(\omega_1)\bigr) \, \mathrm{d}\mu(\omega_1)$, on voit qu'il suffit de poser $\omega_2 = \varphi(\omega_1)$ et de remplacer μ par sa mesure image $\nu = \mu \circ \varphi^{-1}$ pour effectuer le changement de variable et obtenir $\int_{\Omega_2} h(\omega_2) \, \mathrm{d}\nu(\omega_2)$. Autrement dit, *le changement de variable dans une intégrale abstraite se réduit à la détermination de la mesure image.* Remarquer que l'on ne fait aucune hypothèse sur φ, à part sa mesurabilité. En particulier, φ n'a nul besoin d'être bijective.

Démonstration. D'abord, puisque $h \in \mathcal{M}_+(\Omega_2)$ et φ est $\mathcal{F}_1$-$\mathcal{F}_2$ mesurable, $h \circ \varphi$ appartient à $\mathcal{M}_+(\Omega_1)$, donc le premier membre de (3.32) est bien défini. Nous utilisons à nouveau la méthode standard vue ci-dessus en vérifiant (3.32) successivement pour les indicatrices, les fonctions étagées et enfin les applications mesurables positives.
Cas des indicatrices : $h = \mathbf{1}_B$, $B \in \mathcal{F}_2$. Par mesurabilité de φ, $A := \varphi^{-1}(B)$ appartient à $\mathcal{F}_1$ et on a :

$$\int_{\Omega_2} \mathbf{1}_B \, \mathrm{d}\nu = \nu(B) = \mu\bigl(\varphi^{-1}(B)\bigr) = \mu(A) = \int_{\Omega_1} \mathbf{1}_A \, \mathrm{d}\mu.$$

Il ne reste plus qu'à vérifier que $\mathbf{1}_A = \mathbf{1}_B \circ \varphi$, ce qui résulte des égalités suivantes :

$$\forall \omega \in \Omega_1, \quad \mathbf{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in \varphi^{-1}(B) \\ 0 & \text{si } \omega \notin \varphi^{-1}(B) \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } \varphi(\omega) \in B \\ 0 & \text{si } \varphi(\omega) \notin B \end{cases} = \mathbf{1}_B\bigl(\varphi(\omega)\bigr).$$

Cas des fonctions étagées : $h \in \mathcal{E}_+(\Omega_2)$, de décomposition canonique $h = \sum_{i=1}^n y_i \mathbf{1}_{B_i}$. Alors $h \circ \varphi = \sum_{i=1}^n y_i (\mathbf{1}_{B_i} \circ \varphi)$. En utilisant l'additivité et l'homogénéité de l'intégrale par rapport à μ et à ν et l'égalité (3.32) pour les indicatrices, on obtient :

$$\int_{\Omega_1} (h \circ \varphi) \, \mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^n y_i \int_{\Omega_1} (\mathbf{1}_{B_i} \circ \varphi) \, \mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^n y_i \int_{\Omega_2} \mathbf{1}_{B_i} \, \mathrm{d}\nu = \int_{\Omega_2} \sum_{i=1}^n y_i \mathbf{1}_{B_i} \, \mathrm{d}\nu = \int_{\Omega_2} h \, \mathrm{d}\nu,$$

ce qui établit (3.32) pour $h \in \mathcal{E}_+(\Omega_2)$.

Cas des fonctions mesurables positives : $h \in \mathcal{M}_+(\Omega_2)$. Alors il existe une suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathcal{E}_+(\Omega_2)$, croissante et convergente vers h. On voit alors immédiatement que la suite $(h_n \circ \varphi)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans $\mathcal{E}_+(\Omega_1)$, croissante et convergente vers $h \circ \varphi$. L'égalité (3.32) établie ci-dessus pour les éléments de $\mathcal{E}_+(\Omega_2)$ nous donne :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \int_{\Omega_1} (h_n \circ \varphi) \, \mathrm{d}\mu = \int_{\Omega_2} h_n \, \mathrm{d}\nu. \tag{3.33}$$

Le théorème de Beppo Levi appliqué aux suites $(h_n \circ \varphi)$ et (h_n) permet de passer à la limite dans (3.33) pour obtenir $\int_{\Omega_1} (h \circ \varphi) \, \mathrm{d}\mu = \int_{\Omega_2} h \, \mathrm{d}\nu$ et achever ainsi la preuve du théorème. □

Voici une importante application du théorème de transfert aux calculs d'espérances. Nous l'énonçons dans le cas des vecteurs aléatoires $\Omega \to \mathbb{R}^d$, le lecteur pourra l'adapter à celui des variables aléatoires réelles en faisant $d = 1$, ou à celui des variables aléatoires complexes.

Corollaire 3.20 (Calcul d'espérance par transfert). *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ *un espace probabilisé et* $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$ *un vecteur aléatoire sur* $(\Omega, \mathcal{F})$. *Notons* $\mathbf{E}$ *l'espérance relativement à* $\mathbf{P}$ *et* P_X *la loi de* X *sous* $\mathbf{P}$. *Alors pour toute fonction mesurable positive* $h : \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}_+$,

$$\mathbf{E}h(X) = \int_\Omega h(X) \, \mathrm{d}\mathbf{P} = \int_\Omega (h \circ X) \, \mathrm{d}\mathbf{P} = \int_{\mathbb{R}^d} h \, \mathrm{d}P_X. \tag{3.34}$$

Vérification. Il suffit d'appliquer le théorème de transfert avec $\Omega_1 = \Omega$, $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}$, $\varphi = X$, $\Omega_2 = \mathbb{R}^d$, $\mathcal{F}_2 = \mathrm{Bor}(\mathbb{R}^d)$ et $\nu = P_X = \mathbf{P} \circ \varphi^{-1}$. □

Ce corollaire 3.20 est d'importance capitale. À lui seul il serait déjà une motivation suffisante pour notre entreprise de construction de l'intégrale abstraite. Le corollaire 3.20 montre que $\mathbf{E}h(X)$ ne dépend que de h et de la loi de X. On pourrait ainsi calculer cette espérance en ignorant tout de l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, pourvu que l'on connaisse la loi de X. De plus (3.34) ramène l'intégration sur l'espace abstrait Ω à une intégration sur l'espace beaucoup plus familier $\mathbb{R}^d$. Pour que ce procédé soit effectif, il reste à savoir identifier P_X et à savoir intégrer sur $\mathbb{R}^d$. Un cas important en pratique est celui où la loi de X a une densité par rapport à la mesure de Lebesgue.

Corollaire 3.21 (Espérances pour des lois à densité). *Si la loi du vecteur aléatoire* X *a une densité* f *par rapport à la mesure de Lebesgue* λ_d *de* $\mathbb{R}^d$, *alors pour toute fonction mesurable positive* $h : \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}_+$,

$$\mathbf{E}h(X) = \int_{\mathbb{R}^d} hf \, \mathrm{d}\lambda_d. \tag{3.35}$$

Vérification. L'égalité (3.35) résulte immédiatement de la combinaison du corollaire 3.20 et du théorème 3.17 b). □

Terminons par un corollaire qui aura son utilité dans les calculs effectifs de lois.

Corollaire 3.22 (Identification de lois). *Les vecteurs aléatoires X et Y à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ ont même loi si et seulement si pour toute $h : \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}_+$ mesurable positive,*

$$\mathbf{E}h(X) = \mathbf{E}h(Y).$$

Démonstration. Remarquons d'abord qu'il n'est pas nécessaire que X et Y soient définis sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Si X et Y ont même loi, cela signifie l'égalité des mesures P_X et P_Y définies sur $(\mathbb{R}^d, \mathrm{Bor}(\mathbb{R}^d))$. Alors pour toute $h \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^d)$, on a l'égalité d'intégrales $\int_{\mathbb{R}^d} h \,\mathrm{d}P_X = \int_{\mathbb{R}^d} h \,\mathrm{d}P_Y$ qui grâce au corollaire 3.20, s'écrit aussi $\mathbf{E}h(X) = \mathbf{E}h(Y)$.

Pour la réciproque, il suffit de noter que si ν_1 et ν_2 sont deux mesures sur $(\mathbb{R}^d, \mathrm{Bor}(\mathbb{R}^d))$ telles que pour toute $h \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^d)$, $\int_{\mathbb{R}^d} h \,\mathrm{d}\nu_1 = \int_{\mathbb{R}^d} h \,\mathrm{d}\nu_2$, alors $\nu_1 = \nu_2$, ce qui est évident en prenant des h de la forme $\mathbf{1}_B$, où B est un borélien quelconque de $\mathbb{R}^d$. □

3.3.3 Intégration par rapport à une série de mesures

Pour clore ce chapitre, nous examinons le calcul d'intégrales par rapport à une mesure de Dirac ou à une série de mesures, avec une application aux variables aléatoires discrètes.

Proposition 3.23 (Intégrale par rapport à une mesure de Dirac). *Soit δ_{ω_0} la mesure de Dirac au point $\omega_0 \in \Omega$.*

$$\forall f \in \mathcal{M}_+, \qquad \int_\Omega f \,\mathrm{d}\delta_{\omega_0} = f(\omega_0). \tag{3.36}$$

Démonstration. On utilise une nouvelle fois la méthode standard en vérifiant (3.36) successivement pour les indicatrices, les fonctions étagées, puis les fonctions mesurables positives.

Vérification pour $f = \mathbf{1}_A$, $A \in \mathcal{F}$. D'après (3.2) et la définition d'une mesure de Dirac (cf. Exemple 1.1, p. 13),

$$\int_\Omega \mathbf{1}_A \,\mathrm{d}\delta_{\omega_0} = \delta_{\omega_0}(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega_0 \in A \\ 0 & \text{si } \omega_0 \notin A \end{cases} = \mathbf{1}_A(\omega_0) = f(\omega_0).$$

Vérification pour $f \in \mathcal{E}_+$. Soit $\sum_{i=1}^n y_i \mathbf{1}_{A_i}$ la décomposition canonique de f. Par définition de l'intégrale sur $\mathcal{E}_+$,

$$\int_\Omega f \,\mathrm{d}\delta_{\omega_0} = \sum_{i=1}^n y_i \delta_{\omega_0}(A_i) = \sum_{i=1}^n y_i \mathbf{1}_{A_i}(\omega_0) = f(\omega_0).$$

Vérification pour $f \in \mathcal{M}_+$. Alors f est limite d'une suite croissante (f_n) d'éléments de $\mathcal{E}_+$. Comme (3.36) est vraie dans $\mathcal{E}_+$,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\delta_{\omega_0} = f_n(\omega_0).$$

Faisons tendre n vers $+\infty$ dans cette égalité. Le premier membre converge vers $\int_\Omega f \,\mathrm{d}\delta_{\omega_0}$ par le théorème de Beppo Levi, le second membre converge vers $f(\omega_0)$ par construction de f_n. Ainsi f vérifie elle aussi (3.36). □

Proposition 3.24 (Intégrale par rapport à une série de mesures). *Soient* $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *une suite de mesures sur le même espace mesurable* $(\Omega, \mathcal{F})$ *et* $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *une suite dans* $\mathbb{R}_+$*. La fonction d'ensembles*

$$\mu := \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k\mu_k$$

est une mesure sur $(\Omega, \mathcal{F})$ *et*

$$\forall f \in \mathcal{M}_+, \qquad \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu_k. \tag{3.37}$$

Démonstration. Le fait que μ soit une mesure a déjà été établi au chapitre 1 (exemple 1.2), en supposant la finitude des mesures μ_k. Le seul rôle de cette hypothèse était d'éviter un conflit du type $0 \times (+\infty)$ lorsque $a_k = 0$ et $\mu_k(A) = +\infty$ qui nous aurait empêché de définir la fonction d'ensembles $a_k\mu_k$. Ce conflit a été résolu par les conventions arithmétiques faites au chapitre 2 qui entraînent que $a_k\mu_k$ est la mesure nulle, que μ_k soit finie ou non. La restriction faite à l'exemple 1.2 n'a donc plus lieu d'être et la démonstration que μ est une mesure peut se recopier telle quelle.

Pour vérifier (3.37), on fait appel une dernière fois[3] à la méthode standard, réduite ici à deux étapes.

Vérification pour $f \in \mathcal{E}_+$. Soit $\sum_{i=1}^n y_i\mathbf{1}_{A_i}$ la décomposition canonique de f. Par définition de l'intégrale sur $\mathcal{E}_+$ et la propriété de sommation par paquets dans $\overline{\mathbb{R}}_+$,

$$\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^n y_i\mu(A_i) = \sum_{i=1}^n y_i \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k\mu_k(A_i) = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k \sum_{i=1}^n y_i\mu_k(A_i) = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu_k.$$

Vérification pour $f \in \mathcal{M}_+$. Alors f est limite d'une suite croissante (f_n) d'éléments de $\mathcal{E}_+$. Comme (3.37) est vraie dans $\mathcal{E}_+$,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k \int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu_k. \tag{3.38}$$

En appliquant le théorème de Beppo Levi (une infinité de fois !), on obtient les convergences :

$$\int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu \uparrow \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu, \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu_k \uparrow \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu_k. \tag{3.39}$$

Pour obtenir (3.37) par passage à la limite dans (3.38), il n'y a aucun problème avec le premier membre, grâce à la première des convergences (3.39). Par contre il reste à justifier le passage à la limite dans la série. En posant $u_{n,k} := a_k \int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu_k$ et $u_k := a_k \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu_k$, on a pour chaque k par (3.39), $u_{n,k} \uparrow u_k$ quand n tend vers l'infini. Pour conclure, il suffit alors d'appliquer le lemme suivant dont la preuve n'utilise pas la théorie de l'intégration et a été vue en introduction à ce cours. □

[3] Pour ce chapitre...

Lemme 3.25 (Théorème de Beppo Levi pour les séries). *Soit* $(u_{n,k};\ (n,k) \in \mathbb{N}^2)$ *une suite double dans* $\overline{\mathbb{R}}_+$ *telle que pour tout* $k \in \mathbb{N}$*, la suite simple* $(u_{n,k})_{n\in\mathbb{N}}$ *converge* en croissant *dans* $\overline{\mathbb{R}}_+$ *vers* u_k *(*$u_{n,k} \uparrow u_k \leq +\infty$*). Alors*

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} u_{n,k} = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k.$$

Corollaire 3.26 (Espérance d'une variable aléatoire positive discrète). *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ *un espace probabilisé et* X *une variable aléatoire positive discrète sur* $(\Omega, \mathcal{F})$*. Alors l'espérance de* X *sous* $\mathbf{P}$ *peut se calculer par*

$$\mathbf{E}X = \sum_{x\in X(\Omega)} x\mathbf{P}(X = x). \tag{3.40}$$

Démonstration. Une variable aléatoire positive discrète X sur $(\Omega, \mathcal{F})$ est une application $\Omega \to \overline{\mathbb{R}}_+$, telle que $X(\Omega)$ soit au plus *dénombrable* et X soit mesurable[4] $\mathcal{F}$-$\mathcal{P}(\overline{\mathbb{R}}_+)$. Elle est donc *a fortiori* mesurable $\mathcal{F}$-Bor$(\overline{\mathbb{R}}_+)$. La loi de X sous $\mathbf{P}$ est la mesure image $P_X = \mathbf{P} \circ X^{-1}$ et peut s'écrire (cf. Prop. 2.27) comme une série (ou une somme finie si $X(\Omega)$ est fini) de mesures :

$$P_X = \sum_{x\in X(\Omega)} \mathbf{P}(X = x)\delta_x.$$

En appliquant le théorème de transfert avec $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mu) = (\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, $\varphi = X$, $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, \nu) = (\overline{\mathbb{R}}_+, \mathrm{Bor}(\overline{\mathbb{R}}_+), P_X)$ et h égale à *l'identité* sur $\overline{\mathbb{R}}_+$, on obtient :

$$\mathbf{E}X = \int_\Omega X \,\mathrm{d}P = \int_{\overline{\mathbb{R}}_+} h \,\mathrm{d}P_X.$$

Numérotons les éléments de $X(\Omega)$ par des indices entiers $X(\Omega) = \{x_0, x_1, \dots, x_k, \dots\}$. Par la proposition 3.24 avec $a_k := \mathbf{P}(X = x_k)$ et $\mu_k := \delta_{x_k}$ et la proposition 3.23,

$$\int_{\overline{\mathbb{R}}_+} h \,\mathrm{d}P_X = \sum_{x_k\in X(\Omega)} a_k \int_{\overline{\mathbb{R}}_+} h \,\mathrm{d}\delta_{x_k} = \sum_{x_k\in X(\Omega)} \mathbf{P}(X = x_k)h(x_k) = \sum_{x_k\in X(\Omega)} \mathbf{P}(X = x_k)x_k.$$

Il ne reste plus qu'à dégraisser les notations en oubliant la numérotation entière de $X(\Omega)$ pour obtenir (3.40). □

[4]Cette mesurabilité équivaut ici à $\forall x \in X(\Omega)$, $X^{-1}(\{x\}) \in \mathcal{F}$, comme on peut le voir par une adaptation immédiate de la preuve du corollaire 2.11.