Université des Sciences et Technologies de Lille
Maitrise de mathématiques, 1999-2000
Initiation au Calcul Scientifique (SCILAB)

Feuille d'exercices 5

1. On considère le problème aux limites

$$\mathcal{P}\begin{cases} -\dfrac{d^2u}{dx^2}+a(x)\dfrac{du}{dx}+b(x)u=f & \text{dans }]0,1[, \\ \\ \mathcal{C}.\mathcal{L}. & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où f est une fonction de $L^2(0,1)$ donnée Ainsi que $a(x)$ et $b(x)$; $\mathcal{C}.\mathcal{L}.$ est un ensemble de conditions aux limites non spécifiées pour l'instant. Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère V_h, le sous-espace vectoriel de $H^1(]0,1[)$:

$$V_h = \{v_h \in \mathcal{C}^0([0,1]) \ / \ v_h|_{[x_i,x_{i+1}]} \in P_1, \forall v_h \in V_h, \forall i=0,\cdots n\},$$

avec $K_i = [x_i, x_{i+1}]$ où $x_i = \dfrac{i}{n+1}$, $i = 0, \cdots, n+1$.

   (a) Les conditions aux limites sont de type Dirichlet homogènes : $\mathcal{C}.\mathcal{L}. = \{u(0) = u(1) = 0\}$.

      i. Après avoir écrit la formulation variationnelle $\mathcal{V}$ associée à $\mathcal{P}$ construire la matrice et le second membre du problème variationnel $\mathcal{V}_h$, posé dans $X_H^0 = \{v_h \in V_h, / v_h(0) = v_h(1) = 0\}$; on pourra construire un "programme" SCILAB dans lequel on aura pour paramètres, n et le vecteur second membre.

      ii. Application. Résoudre ce système pour $a = 1, b = 0$ et f de votre choix.

   (b) Mêmes questions avec $\mathcal{C}.\mathcal{L}. = \{u(0) = u(1),\ u'(1) = u'(0)\}$.

2. Méthode de différences finies.
A titre d'illustration, considérons à nouveau le problème modèle

$$\begin{cases} -\dfrac{d^2u}{dx^2} = f & \text{dans } I =]0,1[\\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

Soit à présent $N \in \mathbb{N}$. On définit les points du maillage, les points prédéfinis auxquels sera approchée la solution du problème, comme

$$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_N < x_{N+1} = 1$$

et on note u_i l'approximation de u au point x_i. On supposera dans la suite que les x_i sont régulièrement espacés.

L'EDP précédente est satisfaite en tout point de]0,1[(la solution est dans $H_0^1(I)$ et est donc continue) et donc en particulier aux points x_i, $i = 1, \cdots, N$. On a ainsi

$$\begin{cases} -\dfrac{d^2u}{dx^2}(x_i) = f(x_i) & \text{pour } i = 1, \cdots N \\ u(x_0) = u(x_{N+1}) = 0. \end{cases}$$

Les inconnues sont les quantités $u(x_i)$. Supposons que u soit suffisamment régulière et appliquons les formules de Taylor. Pour tout $x \in [0+h, 1-h]$, on obtient les relations

$$u(x+h) = u(x) + h\frac{du}{dx}|_x + \frac{h^2}{2}\frac{d^2u}{dx^2}|_x + \frac{h^3}{3!}\frac{d^3u}{dx^3}|_x + \frac{h^4}{4!}\frac{d^4u}{dx^4}|_x + \mathcal{O}(h^5)$$

$$u(x-h) = u(x) - h\frac{du}{dx}|_x + \frac{h^2}{2}\frac{d^2u}{dx^2}|_x - \frac{h^3}{3!}\frac{d^3u}{dx^3}|_x + \frac{h^4}{4!}\frac{d^4u}{dx^4}|_x + \mathcal{O}(h^5)$$

où l'on a posé $h = \dfrac{1}{N+1} = x_{i+1} - x_i$, $\forall i$. En considérant la somme de ces expressions, on trouve

$$\frac{d^2u}{dx^2}|_x = \frac{u(x+h) + u(x-h) - 2.u(x)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2).$$

On approche alors le laplacien de u au point x par le schéma

$$\frac{u(x+h) + u(x-h) - 2.u(x)}{h^2}$$

qui est d'ordre deux. En notant $f_i \simeq f(ih)$ et en prenant compte des conditions aux limites, ce qui revient à imposer

$$u_0 = u_{N+1} = 0,$$

la discrétisation du problème (EDP) pour $n = 1$, conduit au système linéaire :

$$A.U = h^2 F$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & . & . & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & . & . \\ 0 & -1 & 2 & -1 & . & . \\ . & . & . & . & . & 0 \\ . & . & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & . & . & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

et $U = (u_1, u_2, \cdots, u_N)^t$, $F = (f_1, f_2, \cdots, f_N)^t$.

(a) Mettre en œuvre cette méthode au moyen d'un programme en SCILAB.

(b) Le faire executer sur un exemple de votre choix et représenter graphiquement la solution.

3. On considère le problème

$$\mathcal{P}\begin{cases} -\dfrac{d^2u}{dx^2} + a(x)\dfrac{du}{dx} + b(x)u = f \quad \text{dans }]0,1[, \\ \\ u(0) = a, \ \ u(1) = b \end{cases}$$

On va le résoudre numériquement à l'aide de techniques d'équations différentielles. A cet effet, on va transformer $\mathcal{P}$ en un problème de conditions initiales :

$$\mathcal{T}\begin{cases} -\dfrac{d^2u}{dx^2} + a(x)\dfrac{du}{dx} + b(x)u = f \\ \\ u(0) = a, \\ \dfrac{du}{dx}(0) = \xi \end{cases}$$

où ξ devra être déterminé de sorte à ce que $u(1) = b$: c'est ce qu'on appelle la méthode de tir. On peut la mettre en œuvre de la façon suivante pour les équations linéaires :
Soient $u_1(x)$ et $u_2(x)$ les solutions de $\mathcal{T}$ pour $\xi = \xi_1$ et $\xi = \xi_2$ respectivement, $\xi_1 \neq \xi_2$.

La soultion u de $\mathcal{P}$ peut alors s'écrire comme

$$u(x) = \lambda_1 u_1(x) + \lambda_2 u_2(x).$$

(a) Quelles relations vérifient λ_1 et λ_2 (on construira un système linéaire 2 x 2 dont λ_1 et λ_2 sont solutions en considérant $u(0)$ puis $u(1)$).

(b) On réécrit l'équation du second ordre en deux équations couplées du premier ordre, d'inconnues u et $v = \dfrac{du}{dx}$. Ecrire le système obtenu.

(c) Proposer une méthode d'intégration de ce système

(d) Programmer en SCILAB un procédure de résolution et faire tourner le code sur l'exemple de l'exercice 1.

(e) Représenter sur un même graphe, u, u_1 et u_2.

(f) Quelles méthodes d'intégration[1] choisir pour u et pour v que la solution approchée obtenue coincide avec celle que donnerait une méthode de différences finies appliquée aux problème aux limites ?

[1]Euler implicite, Euler explicite, Runge Kutta $\cdots$

4. On considère l'EDP

$$\mathcal{P}\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega =]0,1[^2 \\ \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma = \partial\Omega \end{cases}$$

On se propose de résoudre numériquement ce problème par une méthode de différences finies. On se donne à cet effet un réseau de points (x_i, y_j) de $[0,1]^2$ régulièrement espacés et on approche $-\Delta u$ au point (x_i, y_j) par le schéma aux différences

$$-\Delta u(x_i, y_j) \simeq \frac{1}{h_x^2}(2u_{i,j} - u_{i-1,j} - u_{i+1,j}) + \frac{1}{h_y^2}(2u_{i,j} - u_{i,j+1} - u_{i,j+1}),\ i = 1, \cdots, N,\ j = 1, \cdots M,$$

avec $h_x = \dfrac{1}{N+1}$ et $h_y = \dfrac{1}{M+1}$. On approche alors u par la solution du système

$$\frac{1}{h_x^2}(2u_{i,j} - u_{i-1,j} - u_{i+1,j}) + \frac{1}{h_y^2}(2u_{i,j} - u_{i,j+1} - u_{i,j+1}) = f(i \cdot h_x, j \cdot h_y),\ i = 1, \cdots, N,\ j = 1, \cdots M,$$

(a) Programmer cette méthode en SCILAB.

(b) Résoudre le système obtenu pour une fonction f de votre choix.

(c) Représenter graphiquement la solution obtenue.