Université des Sciences et Technologies de Lille
Maitrise de mathématiques, 1999-2000
Initiation au Calcul Scientifique (SCILAB)

Feuille d'exercices 4

1. Marche aléatoire.

   Soit $p \in]0,1[$. On considère la suite de variables aléatoires (indépendantes) $(x_i)_{i\geq 1}$:
   $$P(x_i = 1) = p,\ p(x_i = -1) = 1 - p,$$
   et on définit la *marche aléatoire* S_n par
   $$S_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

   (a) Construire S_n à l'aide d'une série de commandes `SCILAB` puis tracer S_n en fonction de n, pour $n \leq nmax$, avec $nmax = 100, 200$ par exemple.

   (b) On fixe désormais des bornes d'arrêt a et b : on décide de stoper le processus lorsque $S_n \geq b$ ou $S_n \leq a$. Transformer le programme pécédent et tracer S_n avec $p = q = \frac{1}{2}$.

2. Tracer en histogrammes.

   (a) Soit la suite de variables aléatoires indépendantes $(z_i)_{i\geq 1}$ de loi uniforme sur $[0, 100]$. Tracer en histogrammes les fréquences cummulées, dans les intervalles $[0, 11[$, $[11, 33]$, $[34, 69]$, $[70, 100]$.

   (b) Même question si la lio suivie est $\mathcal{N}(0,1)$ et les intervalles $]-\infty, -100]$, $]-100, -13]$, $]-13, -8],]i, i+1], i = -8, \cdots 8$, $]8, 72]$, $]72, +\infty[$.

3. Calcul d'un décalage.

   Dans une Université du Nord d'un pays de la CEE, on effectue une série de construction de piliers. La machine qu'utilise l'entreprise de travaux place ces piliers $(P_i)_{i\geq 1}$ à l'endroit calculé suivant une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. Malheureusement, la machine est faussée et un décalage constant D se produit systématiquement si bien qu'en fait le placement réel $(P_i')_{i\geq 1}$ de ces piliers suit la loi

$$P_i' = P_i + D$$

Connaissant les P_i', on peut déterminer D en considérant la moyenne arithmétique des P_i' :

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} P_i'}{n} = D + \frac{\sum_{i=1}^{n} P_i}{n} \longrightarrow D + E(x) = D.$$

Faire une simulation et observer la vitesse avec laquelle cette moyenne converge vers le décalage D, pour un D donné.

4. Mouvement Brownien (limite de la trajectoire d'une marche aléatoire avec renormalisation *ad hoc*) ; on peut en générer un comme suit :

$$x_i \equiv \mathcal{N}(0,1) \text{ alors } S_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\sqrt{n}} \longrightarrow (\text{ loi }) \text{ mvt brownien}$$

Tracer un graphe correspondant