Université des Sciences et Technologies de Lille
Maitrise de mathématiques, 1999-2000
Initiation au Calcul Scientifique (SCILAB)

Feuille d'exercices 3

1. Les calculs sont effectués, en SCILAB, en précision finie, en l'occurence en double précision (16 chiffres significatifs). Certains problèmes (même simples en apparance) sont très mal conditionnés, ce qui peut se traduire par un écart important entre deux résultats pour lesquels les données sont proches.

   (a) Pour $\eta > 0$, on considére la matrice 2×2

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1+\eta \end{pmatrix}, \text{ et les vecteurs } b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{et } b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+\eta \end{pmatrix},$$

      i. Calculer et comparer les vecteurs x_i solutions de $A.x_i = b_i$, $i = 1, 2$, pour différentes valeurs de η (par exemple $\eta = 10^{-6},\ 10^{-8}$).

      ii. Que constatez-vous ? Calculer le conditionnement de A.

   (b) On considère le polynôme $P(x) = \prod_{i=1}^{20}(x - i)$.

      i. Construire ce polynôme en SCILAB et déterminer numériquement ses racines en utilisant une commande SCILAB appropriée.

      ii. On perturbe P en lui ajoutant le terme $10^{-8}x^{20}$ et on pose $Q = P + 10^{-8}x^{20}$. Déterminer numériquement les racines de Q. Que constatez-vous?

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la matrice carrée $n \times n$ P_n par

$$P = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & . & . & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & . & 0 \\ 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ . & . & . & -1 & 2 & -1 \\ -1 & . & . & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

avec $h = \frac{1}{n}$. Soit $f = (f_1, f_2, \cdots, f_n)^t$, un vecteur de $\mathbb{R}^n$, tel que

$$\sum_{i=1}^{n} f_i = 0$$

On se propose ici de résoudre avec SCILAB le système différentiel

$$\frac{dX}{dt} = -A.X + f \qquad (1)$$
$$X(0) \text{ donné dans } \mathbb{R}^n \qquad (2)$$

(a) On se donne $f = 0$ et $X(0)$ tel que

$$\sum_{i=1}^{n} X(0)_i = 0 \qquad (1)$$

En utilisant la commande `expm` déterminer $X(t)$ et $\sum_{i=1}^{n} X(t)_i$ pour un ensemble de valeurs de t. Que remarque-t-on ?

(b) On veut maintenant approcher les valeurs $X(t)$ sans utiliser la commande `expm`. Pour cela, on se donne $\Delta t > 0$ et on génère par récurrence la suite X_n :

$$\begin{cases} \text{On pose } X_0 = X(0) \text{ et pour } n = 0, \cdots \\ \\ X_{n+1} = X_n + \Delta t\,(-A.X_n + f) \end{cases}$$

i. Calculer X_{n_*} pour n_* tel que $n_*.\Delta t = 1$ et pour différentes valeurs de Δt. Qu'observe-t-on ?

ii. Choisir Δt tel que la plus grande valeur propre en module de la matrice

$$Id - \Delta t A$$

soit strictement plus petite que 1 et calculer les n_* premiers termes de la suite X_n. Que peut on dire de

$$\sum_{i=1}^{n} (X_n)_i$$

(c) Soit $X(0) \neq 0$ vérifiant (1). On prend $f = 0$.

i. On reprend le Δt du (b). Calculer, par la méthode du (a) les normes euclidiennes de $X(k\Delta t)$, pour $k = 0, \cdots, n_*$; faire une représentation graphique de ces normes en fonction du temps $k.\Delta t$, on utilisera une échelle log10 en y.

ii. Effectuer un calcul similaire mais avec la méthode du (b). Représenter graphiquement l'évolution des normes euclidiennes.

iii. Comparaison des résultats.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la matrice carrée (inversible) $n \times n$: A_n définie par

$$A = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & . & . & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & . & 0 \\ 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ . & . & . & -1 & 2 & -1 \\ 0 & . & . & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

où l'on a posé $h = \frac{1}{n+1}$. Donnons nous à présent un vecteur B de $\mathbb{R}^n$. Le but de cet exercice est de mettre en œuvre quelques méthodes matricielles en vue de résoudre numériquement le système linéaire :

$$A.U = B \qquad\qquad (SYSL).$$

On considèrera des méthodes itératives (c'est à dire des méthodes consistant à construire une suite de vecteurs U_n qui converge vers la solution U). A cet effet on réecrit A sous la forme :

$$A = M - N$$

où M et N sont deux matrices carrées $n \times n$; M est supposée inversible. On considère alors la famille de méthodes

$$U^{(k+1)} = M^{-1}NU^{(k)} + M^{-1}B, \quad U^{(0)} \text{ donné}$$

On utilisera les notations suivantes :

D partie diagonale de A
E partie triangulaire inférieure stricte de $-A$
F partie triangulaire supérieure stricte de $-A$,

si bien que $A = D - E - F$.

(a) On choisit $M = D$, $N = E + F$. On considère la méthode (M1) :

$$U^{(k+1)} = D^{-1}(E+F)U^{(k)} + D^{-1}B, \quad U^{(0)} \text{ donné}$$

i. Vérifier que si la suite converge, elle converge bien vers U la solution de $(SYSL)$.
ii. Quels sont les coefficients de la matrice $D^{-1}(E+F)$?
iii. Construire cette matrice avec SCILAB et déterminer ses valeurs propres (pour $n \leq 10$). Quelle est la valeur propre de plus grand module (la calculer avec SCILAB) ? Que pouvez-vous alors dire de la méthode M1 ?
iv. Compléter la suite d'instruction de votre session SCILAB pour mettre en œuvre (M1).

v. Faire tourner le programme ainsi construit ; on donnera la valeur de la solution trouvée avec une précision de 10^{-9} et on représentera graphiquement (echelle log[1] en y) la norme euclidienne du résidu $r^{(k)} = AU^{(k)} - B$ ainsi que celle de l'erreur à l'étape k : $e^{(k)} = U^{(k)} - Uexact$ en fonction de k. On calculera `Uexact` comme `Uexact=inv(A)*B`, si `B` est un vecteur de type colonne.

(b) Mêmes questions avec

$$M = D + E \text{ et } N = F \qquad\qquad \text{méthode M2}$$

(c) On reste toujours dans le cadre décrit plus-haut. Soit α un réel strictement positif. On définit la méthode de Richardson (méthode M 3) par

$$U^{(k+1)} = U^{(k)} - \alpha(AU^{(k)} - B)$$

i. Que valent M et N dans ce cas ?

ii. pour $\alpha < \frac{2}{\Lambda_{Max}}$, où Λ_{Max} est la plus grande valeur propre de A (la calculer à l'aide de SCILAB), faire une étude comparable à celle du 1.

iii. On propose à présent de changer la valeur de α à chaque itération i.e. on considère la méthode :

$$U^{(k+1)} = U^{(k)} - \alpha_k(AU^{(k)} - B)$$

A. On définit $\alpha_k = \frac{(r^{(k)}, Ar^{(k)})}{(Ar^{(k)}, Ar^{(k)})}$ où $(.,.)$ désigne le produit scalaire euclidien et $r^{(k)}$ est définit plus haut. Mettre cette méthode en œuvre à l'aide de commandes SCILAB.

B. Faire executer avec toujours les mêmes données.

C. Que constatez-vous ?

(d) On prend toujours la même matrice A. On propose de construire les suites $U^{(k)}$ et λ_k, respectivement de vecteur de $\mathbb{R}^n$ et scalaire, définies par

$$\text{On se donne } Q^{(0)} \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \|Q^{(0)}\| = 1$$

$$U^{(k+1)} = AQ^{(k)}$$
$$\lambda_k = \frac{\|U^{(k+1)}\|}{\|Q^{(k)}\|}$$
$$Q^{(k+1)} = \frac{U^{(k+1)}}{\|U^{(k+1)}\|}$$

Ici $\|.\|$ désigne la norme euclidienne.

i. Mettre cette méthode en œuvre à l'aide de commandes en SCILAB.

ii. La suite λ_k semble-t-elle converger ? Que peut-on dire de la suite $U^{(k)}$?

iii. Déterminer les valeurs propres de A. Que constatez-vous ?

[1] on pourra utiliser le format `plot2d1('onl',X,Y) X : vecteur abscisse, Y : vecteur ordonnees`