Université des Sciences et Technologies de Lille
Maitrise de mathématiques, 1999-2000
Initiation au Calcul Scientifique (SCILAB)

Feuille d'exercices 2

1. Soit $J = [a, b]$ et n un entier non nul. On définit la suite (x_n) par

$$x_k = a + k\frac{b-a}{n}, \quad k = 0, \cdots, n.$$

Soit f une fonction continue sur J. On se propose d'approcher l'intégrale

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx \text{ par } \int_a^b P_f(x)dx$$

où P_f est un certain polynôme.

   (a) On choisit ici de prendre pour P_f le polynôme d'interpolation de f aux points $x_k, \quad k = 0, \cdots, n$. Proposer une méthode pour calculer $I(f)$ de manière approchée et faire sa mise en œuvre en SCILAB. On fera au préalable un plan dans lequel seront mises en valeurs les différentes étapes à considérer.

   (b) A présent, on se donne un entier m et on découpe de manière régulière chaque sous-intervalle $[x_k, x_{k+1}]$ en $m+1$ intervalles de même longueur. Ainsi, pour tout k on pose

$$x_k^i = x_k + i\frac{x_{k+1} - x_k}{m}, \quad i = 0, \cdots, m.$$

   On note par P_f^k le polynôme (de degré $\leq m$) d'interpolation de f aux points x_k^i.

      i. On prend $m = 1$. Quelle méthode d'intégration obtient-on lorsqu'on approche $\int_{x_k}^{x_{k+1}} f dx$ par $\int_{x_k}^{x_{k+1}} P_f^k dx$?

      ii. Pour $m = 1$ toujours, écrire la formule d'approximation de l'intégrale de f sur $[x_k, x_{k+1}]$ puis en déduire une formule permettant d'approcher $I(f)$.

      iii. Mettre en œuvre cette méthode en SCILAB et la tester sur un exemple.

2. Soit f une fonction intégrable sur $[0, 1]$. On suppose que

$$0 \leq f(x) \leq 1 \;\; p.p \; x \in [0, 1].$$

On considère à présent t et u deux variables aléatoires indépendentes, de lio uniforme sur $[0,1]$ et on définit la va.r. X par

$$X(t,u) = \begin{cases} 1 & \text{si } u \leq f(t) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ainsi X prend les valeurs 1 et 0 avec des probabilités I et $1-I$ où

$$I = \int_0^1 f(s)ds$$

(a) Mettre en œuvre cette procédure sous forme de `function`

(b) Etendre ce procédé d'intégration approchée en dimension supérieure. Application au calcul approché de

$$I = \int_{[0,1]^2} f(u,v)dudv$$

avec

$$f(u,v) = |\sin(72 \cdot (1-u) \cdot (1-v) \cdot u \cdot v)|$$

On pourra au préalable tracer le graphe de cette fonction (`plot3d`).

3. On propose de mettre en œuvre en SCILAB la méthode de dichotomie. Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. On suppose que $f(a).f(b) < 0$. Le théorème des valeurs intermédiaires nous assure de l'existence d'un zéro de f dans $]a,b[$ i.e. d'un $\bar{x} \in]a,b[$ tel que $f(\bar{x}) = 0$. Nous supposerons que $\bar{x}$ est unique. On construit alors les deux suites a_n et b_n par

$$\begin{cases} a_0 = a, b_0 = b \\ c_0 = \frac{a_0+b_0}{2} \\ \\ \text{pour } n = 0, \cdots \\ \\ \text{Si } f(a_n).f(c_n) < 0 \text{ alors} & a_{n+1} = a_n,\ b_{n+1} = c_n \\ \\ \text{Si } f(a_n).f(c_n) > 0 \text{ alors} & a_{n+1} = c_n,\ b_{n+1} = b_n \\ \\ \text{Dans les deux cas :} & c_{n+1} = \frac{a_{n+1}+b_{n+1}}{2} \end{cases}$$

On montre que ces suites convergent vers $\bar{x}$.

(a) Définir un test d'arrêt et mettre en œuvre cette méthode en SCILAB.

(b) La tester sur un exemple de votre choix.

(c) Représenter graphiquement $|f(a_n)|$ en fonction de n. Quelle option de `plot2d` est-il préférable d'utiliser ?

4. On s'intéresse ici à la résolution numérique de l'équation

$$x = 0.8\sin(e^x) \text{ dans l'intervalle } I = [0.5,\ 1.3]$$

(a) On se propose de résoudre cette équation en termes de problème de point fixe.

  i. Mettre en œuvre en SCILAB la méthode des approximations successives (Méthode 1).

  ii. En utilisant les possibilités graphiques de SCILAB, proposer une donnée initiale.

  iii. Faire executer le programme pour une précision de 10^{-9} ; on rangera dans un tableau la valeur absolue du résidu à chaque itération.

(b) Le problème à résoudre peut se reformuler en recherche de racine, i.e., on cherche à résoudre numériquement l'équation

$$0 = x - 0.8 * \sin(e^x).$$

A cet effet, on considère la famille de méthodes itératives :

$$\begin{cases} \text{On se donne } x_0 \text{ arbitraire dansI.} \\ \text{Pour } n = 0, \cdots \\ \text{on définit } x_{n+1} \text{ en fonction de } x_n \text{ par} \\ x_{n+1} = x_n - \alpha_n f(x_n) - \beta_n f^2(x_n), \end{cases}$$

Ici la construction de α_n et de β_n n'est pas précisée.

  i. On choisit $\beta_n = 0$ et $\alpha_n = \frac{1}{f'(x_n)}$. Quelle méthode bien connue retrouve-t-on ? (Méthode 2)

  ii. La mettre en œuvre à l'aide de commandes SCILAB ; on partira de la même donnée initiale qu'auparavant et on cherchera à obtenir la même précision et on rangera dans un tableau la valeur absolue du résidu à chaque itération.

(c) i. On choisit $\alpha_n = \frac{1}{f'(x_n)}$ et $\beta_n = \frac{f''(x_n)}{2f'(x_n)^3}$ (Méthode 3).

  ii. Mettre cette méthode en œuvre à l'aide de commandes SCILAB ; on partira de la même donnée initiale qu'auparavant et on cherchera à obtenir la même précision et on rangera dans un tableau la valeur absolue du résidu à chaque itération.

(d) Comparaison des méthodes.

  i. Tracer dans une même fenêtre graphique les courbes des résidus (Méthodes 1,2 et 3) puis velles des résidus (Méthodes 2 et 3).

ii. Que constatez-vous ?

iii. Si on se donne en plus de x_0, x_1. Quelle méthode retrouve-t-on avec $\alpha_n = \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$ et $\beta_n = 0$? la mettre éventuellement en œuvre.