Université des Sciences et Technologies de Lille
Maitrise de mathématiques, 1998-1999
Initiation au Calcul Scientifique (SCILAB)

Feuille d'exercices 1

1. Pour calculer une approximation de $\sqrt{2}$, on considère la suite

$$a_0 = 5, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right)$$

   (a) Programmer cette suite en SCILAB (on effectuera un maximum de 100 itérations). Qu'observez-vous?

   (b) Modifier le programme en y incluant un test de sortie de boucle à l'aide de l'instruction `break`

   (c) Représenter graphiquement les résidus $|a_i - \sqrt{2}|$ en fonction des itérations i ; on pourra utiliser un échelle en log10 pour les ordonnées (voir l'instruction graphique `plot2d1('onl',X,Y)`).

2. Soit k un entier.

   (a) A l'aide d'une boucle `for`, écrire un programme en SCILAB pour calculer $k!$

   (b) Inclure la boucle précédente dans une structure `function`

3. Soient $x_1, \cdots, x_{n+1}$, $n+1$ réels deux à deux distincts. On supposera pour simplifier que $x_i < x_{i+1}, \forall\ i = 1, \cdots, n$. Soit f une fonction continue sur $[x_1, x_{n+1}]$.

   (a) On cherche à construire le polynôme d'interpolation $P_n(x) = \sum_{i=1}^{n+1} a_i x^{i-1}$, de degré $\leq n$, tel que

$$P(x_i) = f(x_i),\ \forall i = 1, \cdots, n+1.$$

   De quel systeme lineaire sont solution les nombres a_i ?

   (b) On définit les x_i par $x_i = \frac{i-1}{n}$. Construire en SCILAB la matrice associée au système linéaire.

(c) Résoudre ce système, pour une valeur donnée de n et pour une fonction de votre choix et en déduire l'expression de P_n.

(d) Verifier numériquement que les relations d'interpolation ont bien lieu.

(e) Soit $x \neq x_i,\ i = 1, \cdots, n+1$. Calculer $P_n(x)$ et comparer cette valeur avec $f(x)$. On pourra procéder à plusieur essais avec différentes valeurs de n et utiliser la commande `poly` pour manipuler P_n en SCILAB.

4. Le but de cet exercice est d'illustrer une des particularités de SCILAB : les calculs sont effectués en précision finie. Il faut donc en tenir compte pour interpréter les résultats obtenus.
Soit f une fonction continue sur $[0,1]$. On dénote par $\mathbb{P}_n$, l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n. On admettra que le problème

$$\text{Trouver } p \in \mathbb{P}_n \text{ tel que } \int_0^1 (p-f)^2 dx \leq \int_0^1 (q-f)^2 dx, \quad \forall q \in \mathbb{P}_n$$

admet une unique solution p caractérisée par

$$\int_0^1 pq dx = \int_0^1 qf dx,\ \forall p \in \mathbb{P}_n,$$

ou bien, de manière équivalente, en ayant posé $p = \sum_{i=1}^{n+1} a_i x^{i-1}$

$$\int_0^1 \left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i x^{i-1} \right) x^j dx = \int_0^1 f x^j dx,\ \forall j = 0, \cdots, n.$$

(a) Construire le système linéaire défini par les relations précédentes ; la matrice H de ce système s'appelle *matrice d'Hilbert*.

(b) L'inverse de H existe en SCILAB (commande `hilb`). Determiner H^{-1} pour une valeur donnée de n. Que remarquez-vous ?

(c) Calculer le déterminant de H.

(d) Déterminer en SCILAB les valeurs propres de H en utilisant la commande `gspec`.

(e) Déterminer en SCILAB les valeurs propres comme racines du polynôme caractéristique. Que remarquez-vous ?