Première partie

Présentation

Travaux présentés

[Zh1] Développements asymptotiques q-Gevrey et séries Gq-sommables, *Ann. Inst. Fourier*, 49, no 1, 227-261 (1999).

• Pour un résumé de [Zh1], voir aussi *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 327, Série I, p. 349-352, 1998.

[Zh2] Sur un théorème du type de Maillet-Malgrange pour les équations q-différences-différentielles, *Asymptotic Analysis* 17, 309-314 (1998).

[Zh3] Sur la fonction q-Gamma de Jackson, *Aequationes Mathematicae*, à paraître.

[Zh4] La fonction thêta de Jacobi et la sommabilité des séries q-Gevrey, I. *Prépublication de La Rochelle*, 00-03 (2000).

• Pour un résumé de [Zh4], voir aussi *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 331, Série I, p. 31-34, 2000.

[Zh5] Sur les fonctions q-Bessel de Jackson, *Prépublication de La Rochelle*, 00-06 (2000).

[FZ] (avec A. Fruchard) Remarques sur les développements asymptotiques, *Ann. Fac. Sci. Toulouse*, Vol. VIII , no 1, 91-115 (1999).

[MZ] (avec F. Marotte) Multisommabilité des séries entières solutions formelles d'une équation aux q-différences linéaire analytique, *Ann. Inst. Fourier*, à paraître.

• Pour un résumé de [MZ], voir aussi *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 327, Série I, p. 715-718, 1998.

Description des travaux

Sommaire

1. Introduction

Nos recherches portent sur l'étude des équations aux q-différences linéaires et à coefficients analytiques. Soit q un nombre complexe non nul différent de 1 et soit

$$(E) \qquad \sum_{j=0}^{m} a_j(x)y(q^j x) = b(x)$$

une équation fonctionnelle où les fonctions $a_j(x)$, $b(x)$ sont analytiques au voisinage de l'origine $x = 0$ du plan complexe. L'un des problèmes auxquels nous nous intéressons consiste à faire correspondre à une série entière divergente solution formelle donnée de (E) une solution analytique dont la solution formelle est le développement asymptotique en 0.

(i) D'une manière générale, une équation aux q-différences peut être vue comme une équation différentielle discrétisée où l'on utilise, à la place de l'opérateur différentiel $\delta = x\frac{d}{dx}$, l'un des opérateurs fonctionnels δ_q et σ_q définis comme suit :

$$\delta_q = \frac{\sigma_q - 1}{q-1}; \quad \sigma_q \ : \ f(x) \mapsto f(qx).$$

Par exemple, à l'équation différentielle $(x\delta + 1)y = 0$ satisfaite par la fonction exponentielle $e^{1/x}$, on peut faire correspondre l'équation aux q-différences $(x\delta_q + 1)y = 0$, dont une solution est donnée par la série hypergéométrique basique $\sum_{n\geq 0} \frac{q^{n(n+1)/2}}{n!_q}(\frac{1}{x})^n$; ici, on note $0!_q = 1$ et

$$n!_q = \frac{1-q^n}{1-q}\,\frac{1-q^{n-1}}{1-q}\,...\,\frac{1-q}{1-q}$$

pour tout entier $n > 0$.

La version q-analogue $(x\sigma_q + 1)y = 0$ de l'équation différentielle précédente admet pour solution la série thêta de Jacobi $\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n q^{n(n-1)/2}x^n$. Cette dernière série converge dans le plan complexe des x privé de l'origine si $|q| < 1$; elle ne converge nulle part si $|q| > 1$. Notons en passant que $q^{-\log_q x(\log_q x-1)/2}$ est également solution de l'équation $(x\sigma_q + 1)y = 0$, où $\log_q x = \frac{\log x}{\log q}$, log désignant la détermination principale du logarithme.

Ainsi, comme dans la théorie des équations différentielles, la théorie des équations aux q-différences comporte plusieurs volets d'intérêt de recherche qui se trouvent en rapport avec d'autres thématiques telles que *Combinatoire*, *Fonctions Spéciales*, *Résommation*, *etc.* Euler, Gauss, Jacobi, Cauchy, Heine, Thomae, ..., étaient parmi les premiers animateurs du sujet ; pour une introduction à ce monde varié, voir, par exemple, le *Foreword* de R. Askey dans le livre encyclopédique récent [GR] et la synthèse [Ad] de Adams faite dans les années trente.

(ii) En parcourant les quelques 27 pages de références incluses dans le livre [GR] cité précédemment, on distingue deux périodes importantes de développement de la théorie des séries hypergéométriques basiques : la période entre 1900 et 1940 (Jackson, Ramanujan, Hardy, Watson, *etc*) et la période commençant par la fin des années 70 jusqu'à nos jours. Cette première période a été marquée par la création, au delà des exemples basiques connus autrement, de nombre d'objets d'étude et outils de maîtrise, précédés du symbole $q-$ et imitant l'Analyse Mathématique traditionnelle : q-intégrale, q-dérivation, fonctions q-exponentielles, q-Gamma, q-Bessel, *etc.* Une explosion de la théorie des q-séries est actuellement en train de se produire, et ce, depuis une bonne vingtaine d'années.

Cette double avancée dans la q-combinatoire ne se retrouve pas pour les systèmes dynamiques q-analogues. En effet, d'un point de vue de la théorie des systèmes dynamiques, G.D. Birkhoff [Bi] a initié, en 1913, un programme de recherche ayant pour objectif, entre autres, de classifier les équations aux q-différences du type (E) indiqué au début du paragraphe. En réalité, Birkhoff attendait une théorie des transformations analytiques pour ces équations fonctionnelles, théorie analogue à ce qu'on connaissait (ou voulait connaître) dans le cas des équations différentielles linéaires méromorphes dans le champ complexe ; voir aussi [Bi3]. Dans cette optique, dans les années trente, Trjitzinsky [Tr] tentait de fonder une théorie analytique des équations aux q-différences linéaires ; ses résultats reposaient essentiellement sur la théorie des développements asymptotiques de Poincaré.

Par ailleurs, depuis les deux dernières décennies, la théorie des développements asymptotiques de Watson [Wa] et la méthode de sommation exponentielle de Borel-Laplace, toutes deux datées du début du vingtième siècle, sont devenues un outil puissant pour étudier la singularité d'une équation différentielle méromorphe dans le champ complexe ([Ra1], [MR1], [MR2], [Ec], [Ba], [BBRS], ...). Il est naturel d'étudier les questions suivantes.

> *(1) Existe-t-il une théorie de développement asymptotique qu'on pourrait qualifier d'exacte (comme c'est le cas de la théorie de Watson) et qui serait applicable à l'incarnation d'une solution formelle en une vraie solution d'une équation aux q-différences du type* (E) *?*
>
> *(2) Comment appliquer une telle théorie de développement asymptotique, au problème des transformations analytiques de Birkhoff ?*

(3) Que peut-on apporter à la théorie des séries hypergéométriques basiques – qui satisfont chacune à une équation aux q-différences linéaire et à coefficients polynomiaux – au moyen d'une théorie de développement asymptotique adaptée ? Plus précisément, peut-t-on en déduire, par exemple, des nouveaux q-analogues, des représentations intégrales, des formules de connexions ?

(iii) Une réponse positive de la question (1) est donnée, dans notre article [Zh1], sous le nom de *développement asymptotique q-Gevrey.* Nous en déduisons une méthode de sommation q-exponentielle pour toute série entière solution formelle de (E), méthode que nous appelons *Gq-(multi)sommation* ([Zh1], [MZ]). Nous démontrons, en effet, que toute série entière satisfaisant à une équation aux q-différences linéaire analytique est Gq-multisommable.

Les questions (2) et (3) pourraient être considérées comme étant dans le champ d'application directe de nos résultats développés pour la question (1). Nous n'avons pas encore étudié en détail la question (2) ; quelques reflexions autour de la question (3) sont apportées sur les fonctions q-Gamma et q-Bessel.

La méthode de Gq-sommation remplace dans la méthode de Borel-Laplace la fonction exponentielle par la fonction "multiforme" $q^{\log_q x(\log_q x-1)/2}$ ($\log_q x = \frac{\log x}{\ln q}$). Dans [Zh3], nous appliquons, à l'équation aux q-différences vérifiée par la fonction q-Gamma de Jackson, une nouvelle méthode de sommation basée sur la fonction thêta de Jacobi ; ce procédé conduit à un nouveau q-analogue de la fonction Γ. Correspondant à une notion de développement asymptotique plus faible que celle proposée dans [Zh1], cette sommation, à caractère combinatoire, est en cours d'étude et certains résultats ([Zh4]) seront présentés dans ce Mémoire.

(iv) Décrivons maintenant l'organisation du reste de la présentation de nos travaux.

La partie 2 qui suit comporte deux paragraphes. Dans le premier, nous établissons quelques propriétés "élémentaires" sur une équation aux q-différences linéaire analytique, dont certaines sont bien connues depuis l'époque de G. D. Birkhoff et d'autres plus ou moins récentes. Un point clé dans notre étude consistera à utiliser l'existence d'une série entière convergente figurant dans un système fondamental de solutions formelles. Ceci nous permet de procéder à une factorisation analytique sur notre opérateur aux q-différences. Il est à noter que, dans [Tr], Trjitzinsky tentait, pour arriver à sa construction de solutions analytiques, de factoriser une équation aux q-différences mais que son travail n'en fournissait guère une réponse claire. Notre méthode, très élémentaire, précise ce résultat de Trjitzinsky et permet de redémontrer, entre autres, un résultat de J.P. Bézivin concernant le caractère q-Gevrey des solutions formelles [Bé].

Dans §2.2, nous examinons la convergence d'une série entière satisfaisant à une équation mélangeant la dérivation usuelle et la q-différence ; nous y donnons une version unifiée du théorème de Maillet (pour les équations différentielles) et du théorème de König (pour les équations aux q-différences non linéaires à coefficients constants).

Les parties 3 et 4 contiennent les résulats les plus importants concernant nos recherches sur les équations aux q-différences : on apporte une réponse affirmative à la question (1) posée plus haut. De façon plus détaillée :

Dans §3.1, nous commençons par quelques commentaires sur la théorie des développements asymptoptiques de Poincaré et sa version Gevrey due à Watson ; nous présentons également la méthode de sommation exponentielle de Borel-Laplace. La notion de développement asymptotique q-Gevrey et la méthode de Gq-sommation sont résumées respectivement dans les paragraphes §3.2 et §3.3.

Dans §4.1, au moyen de la factorisation analytique établie au §2.1, nous expliquons comment démontrer la version q-analogue suivante d'un théorème de J.P. Ramis : toute série entière solution formelle d'une équation du type (E) est Gq-sommable d'ordre un lorsque le polygone de Newton associé admet une et une seule pente positive qui vaut un. Une généralisation de ce dernier résultat est donnée dans §4.3, avec le procédé de Gq-multisommation.

Dans la partie 5, nous présentons une autre méthode de sommation pour les séries q-Gevrey. Il est à noter que, dans cette partie, les séries étudiées sont Gq-sommables au sens de la partie 3 mais qu'elles sont resommées avec un autre noyau intégral q-exponentiel qui est la fonction thêta de Jacobi. Un nouveau q-Gamma est exposé dans §5.3.

(v) En résumé, nous présenterons dans le reste du Mémoire les principaux résultats de nos *q-publications* réalisées au cours de ces cinq dernières années au sein du Laboratoire de Mathématiques Calcul Asymptotique (LMCA) de l'Université de La Rochelle. On trouvera ci-dessous une liste de mots clés :

§*2 ([Zh1], [Zh2], [MZ]) : Factorisation analytique d'un opérateur aux q-différences linéaire ; théorème du type König-Maillet-Malgrange pour une équation q-différences-différentielle.*

§*3 ([Zh1], [FZ]) : Développement asymptotique q-Gevrey ; transformations q-Borel-Laplace ; Gq-sommation.*

§*4 ([Zh1], [MZ]) : Toute série entière solution formelle d'une équation aux q-différences à coefficients analytiques à l'origine du plan complexe est Gq-multisommable.*

§*5 ([Zh3], [Zh4]) : Transformation de q-Borel-Laplace basée sur la fonction thêta de Jacobi ; fonction q-Gamma.*

Espérons que le Mémoire comporte quelques briques de base pour un programme de recherche portant sur une *q-analyse* qui fait intervenir à la fois l'Analyse classique (complexe, combinatoire), la notion d'algèbre différentielle et, éventuellement, le concept de groupe quantique : Classification analytique d'équations aux q-différences, Théorie de Galois q-différentielle, Formules de connexion et q-combinatoire, Fonctions q-spéciales, *etc.*

Nous donnerons enfin, dans la partie 6, quelques remarques sur des matières que l'on pourrait *immédiatement* traiter au coeur de ce programme. Une nouvelle approche sur les fonctions q-Bessel de Jackson sera brièvement résumée dans §6.2.

Domaine de q :

– Aux paragraphes §5.3, §6.2, où nous parlerons des fonctions q-Gamma et q-Bessel, q désignera un nombre réel strictement compris entre 0 et 1.

– Pour tous les autres paragraphes, q sera un nombre réel strictement supérieur à un.

2. Etude formelle d'une équation aux q-différences linéaire ou non

2.1 Cas linéaire –

Dans ce début du paragraphe, on entend par équation différentielle une équation différentielle linéaire, homogène et ayant pour coefficients des fonctions analytiques au voisinage de l'origine du plan complexe. Nous rappelons brièvement quelques *savoir-faire* en ce qui concerne la solution formelle d'une telle équation différentielle.

D'après un théorème classique de Cauchy, étant donnée une équation différentielle, il existe un système fondamental de solutions analytiques au voisinage de l'origine pourvu que le coefficient du terme d'ordre le plus élévé de l'équation (donnée sous une forme *simplifiée*) ne s'annule pas en ce point. Selon les cas où cette dernière hypothèse est satisfaite ou non, on dit respectivement que celui-ci est un point *régulier* ou *singulier* de l'équation.

D'un point de vue calcul formel, ce théorème de Cauchy n'affirme rien d'autre que toute équation différentielle ayant l'origine pour point régulier peut être résolue dans le cadre des séries convergentes. Un cas singulier qui reste pourtant bien proche du cas régulier correspond à ce que l'on appelle traditionnellement *le cas fuchsien* (local), pour lequel on a le théorème d'existence de type Cauchy suivant. Si $x = 0$ est un point singulier fuchsien d'une équation différentielle, toute solution de l'équation au voisinage de 0 est combinaison linéiare d'un nombre fini de séries convergentes, éventuellement ramifiées, précédées chacune d'un facteur de la forme $x^\alpha(\log x)^n$, où $\alpha \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$. Les équations hypergéométriques d'Euler-Gauss sont parmi les exemples basiques et bien connus de la théorie correspondante ; *cf* [WW], chapitre XIV.

Lorsque le point en l'origine est singulier non fuchsien, on dit aussi que celui-ci est une *singularité irrégulière*. Dans ce dernier cas, sans doute le plus difficile, la recherche d'un système de solutions au moyen des séries entières (ramifiées) conduit à utiliser, en plus des facteurs $x^\alpha(\log x)^n$, des fonctions exponentielles-polynomiales telles que $e^{P(1/x^{1/\nu})}$, où $P(t) \in \mathbb{C}[t]$ et $\nu \in \mathbb{N}^*$, les séries intervenues étant souvent divergentes. Comme exemple classique, citons la singularité irrégulière à l'infini de la famille des équations hypergémétriques confluentes de Kummer ; *cf* [WW], chapitre XVI.

C'est depuis l'article [Ca] de Carmichael que l'on sait démontrer l'existence d'un système fondamental de solutions formelles d'une équation aux q-différences linéaire à coefficients analytiques à l'origine du plan complexe. Pour donner une idée, résolvons d'abord *à la main* quelques équations aux q-différences du premier ordre simples :

$$\begin{aligned}
(E_1) \ &: \quad \sigma_q y = a(x)y,\ a(x) \in \mathbb{C}\{x\},\ a(0) \neq 0;\\
(E_2) \ &: \quad \sigma_q y = x^k y,\ k \in \mathbb{Z};\\
(E_3) \ &: \quad \sigma_q y = y + 1,
\end{aligned}$$

où σ_q désigne l'opérateur aux q-différences $y(x) \mapsto y(qx)$.

Pour l'équation (E_1), on a à distinguer les deux cas suivants : $a(0) = 1$ ou $a(0) \neq 1$. Si $a(0) = 1$, une solution analytique est donnée par le produit infini convergent $\prod_{j=1}^{\infty} a(q^{-j}x)$; sinon, on se fixe un $r \in \mathbb{C}$ vérifiant $q^r = a(0)$ et, avec $y = x^r z$, on se ramène au cas précédent. En conclusion, l'équation (E_1) admet toujours une solution de la forme $x^r \times$ une série entière ayant un rayon de convergence non nul.

L'équation (E_2) se réduit à l'équation (E_1), avec $a \equiv 1$, lorsque $k = 0$. Si $k = 1$, on trouve que $q^{(\log_q x)(\log_q x - 1)/2}$ est une solution, que nous qualifierons de *q-exponentielle*. On en déduit que (E_2) admet pour solution la fonction $q^{k(\log_q x)(\log_q x-1)/2}$, que l'on notera e_q^k dans la suite.

Pour la troisième, on peut se contenter de noter que la fonction $\log_q x$ est une solution, évidente, de l'équation.

Plaçons-nous maintenant dans un cadre général et soit donnée une équation fonctionnelle de la forme :

$$\Delta y = 0, \qquad \Delta = \sum_{j=0}^{m} a_j(x)\sigma_q^j \in \mathbb{C}\{x\}[\sigma_q]$$

où les a_j sont des germes de fonctions analytiques au voisinage de $x = 0$ dans $\mathbb{C}$ et où le produit $a_0(x)a_m(x)$ n'est pas identiquement nul. De manière analogue à ce que l'on vient de procéder pour les équations $(E_1 - E_3)$, on trouve une famille de m solutions formelles de $\Delta y = 0$, soit $\Sigma = (\hat{y}_1, ..., \hat{y}_m)$, dont chaque membre $\hat{y}_j$ soit de la forme

$$\begin{aligned}
&\hat{y}_j = x^{r_j} e_q^{-k_j} \sum_{\nu=0}^{m_j-1} (\log_q x)^\nu \hat{f}_{j,\nu}(x),\\
&r_j \in \mathbb{C},\ k_j \in \mathbb{Q},\ m_j \in \mathbb{N}^*,\\
&e_q = q^{(\log_q x)(\log_q x-1)/2},\ \hat{f}_{j,\nu} \in \mathbb{C}[[x^{1/d}]],\ d \in \mathbb{N}^*.
\end{aligned}$$

Ce résultat a été établi pour la première fois par Carmichael [Ca].

La famille Σ peut être choisie *fondamentale* au sens suivant : son q-Wronskien $W_q(\Sigma)$, défini par

$$W_q(\Sigma) = \det(\sigma_q^{i-1}\hat{y}_j)_{1\le i,j\le m},$$

n'est pas identiquement nul. Dans ce cas, étant donné un corps q-différentiel $\hat{\mathcal{F}}_q$ (c'est-à-dire un corps algébrique stable par l'opérateur σ_q) qui contient Σ, on peut exprimer toute solution $\hat{y}$ de l'équation $\Delta y = 0$ dans $\hat{\mathcal{F}}_q$ comme combinaison linéaire de $\hat{y}_j$ dans le corps des q-constantes correspondant noté $\mathcal{C}(\hat{\mathcal{F}}_q)$ $(= \{\hat{c} \in \hat{\mathcal{F}}_q\ : \sigma_q\hat{c} = \hat{c}\})$:

$$\hat{y} = \hat{c}_1\hat{y}_1 + ... + \hat{c}_m\hat{y}_m, \quad \hat{c}_j \in \mathcal{C}(\hat{\mathcal{F}}_q).$$

Les exposants (à signe près) k_j de e_q des $\hat{y}_j$ constituant le système Σ sont les pentes finies du polygone de Newton de Δ que l'on construit de la manière suivante. On développe les coefficients a_j de Δ en série de Taylor $\sum_{i\ge 0} a_{i,j}x^i$; on marque ensuite dans le plan $\mathbb{R}^2$ tous les points $M_{i,j}$ de coordonnées entières (i,j) vérifiant $a_{i,j} \neq 0$; on définit enfin le polygone de Newton de Δ, noté $PN(\Delta)$, comme étant l'enveloppe convexe engendrée par les demi-droites ascendantes partant des points $M_{i,j}$, $i \ge 0$, $j \in \{0, 1, ..., m\}$. Par exemple, l'équation (E_1) admet une seule pente $k = 0$ et (E_2) une pente égale à $(-k)$.

De façon analogue à la détermination de la valeur r pour l'équation (E_1) étudiée précédemment, les exposants r_j sont calculés au moyen de ce que l'on appelle équation caractéristique associée à chaque pente de $PN(\Delta)$. Les divers indices m_j correspondent à une notion de q-multiplicité de r_j (voir [Zh1], 5.1.7). En vue d'illustrer ces notions, considérons l'équation homogène suivante, déduite de l'équation (E_3) :

$$(\sigma_q^2 - 2\sigma_q + 1)y = 0.$$

Son polygone de Newton comporte une seule pente, nulle, et l'équation caractéristique associée est $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$, qui admet une racine double $\lambda = 1$, ce qui donne $r_1 = r_2 = 0$ (par exemple) et $m_0 = 1$, $m_1 = 2$.

Enfin, l'entier d utilisé dans Σ peut être choisi égal au (plus petit) dénominateur commun des pentes de $PN(\Delta)$. Quitte à faire une ramification $u = x^{1/d}$, on peut supposer, et c'est ce que nous ferons, que *toutes les pentes de $PN(\Delta)$ sont entières et que $d = 1$.*

Passons maintenant à une propriété importante de l'équation $\Delta y = 0$, qui n'a pas d'équivalent dans la théorie des équations différentielles linéaires méromorphes.

> *A la pente la plus grande de $PN(\Delta)$, soit k, correspond une solution de $\Delta y = 0$ de la forme $x^r e_q^{-k} \hat f(x)$ où $\hat f$ est une série entière de rayon de convergence non nul (voir [Zh1], Lemme 5.1.2).*

Ce résultat, que l'on pourrait qualifier de *classique* (connu au moins depuis les années trente), a été un peu oublié pendant plus d'un demi siècle ! Nous déduisons ([Zh1], proposition 5.1.4 ; [MZ], 5.1.2) de ce résultat la factorisation analytique d'un opérateur aux q-différences linéaires, à savoir :

$$\Delta = h_0(x)(x^{k_1}\sigma_q - \alpha_1)h_1(x)(x^{k_2}\sigma_q - \alpha_2)h_2(x)...(x^{k_m}\sigma_q - \alpha_m)h_m(x),$$

où $h_0 \in \mathbb{C}\{x\}$ (ayant en $x = 0$ la même valuation que le coefficient a_0 de σ_q^0 de Δ), k_1, ..., k_m sont les pentes de $PN(\Delta)$ rangées dans l'ordre croissant, $\alpha_j \in \mathbb{C}^*$ et où $h_j \in \mathbb{C}\{x\}$, $h_j(0) = 1$ pour $1 \leq j \leq m$.

A partir d'une telle factorisation et en raisonnant uniquement sur les opérateurs du premier ordre (à peine un peu plus compliqués que les équations $(E_1 - E_3)$), on peut former un système fondamental de solutions formelles de Carmichael [Ca], retrouver les théorèmes d'indices de Bézivin [Bé], en déduire la filtration q-Gevrey de solution formelle, *etc.* A peu de chose près, on entend par *filtration q-Gevrey* la propriété remarquable suivante :

> *Si $\hat f$ est une série entière qui est envoyée par Δ en une série entière convergente, alors soit $\hat f$ est convergente soit il existe une pente $k > 0$ de $PN(\Delta)$ telle que $\hat f \in \mathbb{C}[[x]]_{q;1/k}$ et que $\hat f \notin \mathbb{C}[[x]]_{q;s'}$ pour tout $s' < 1/k$.*

Ici, on a noté, pour tout réel $s > 0$:

$$\mathbb{C}[[x]]_{q;s} = \{\sum_{n\geq 0} \alpha_n x^n \in \mathbb{C}[[x]] : \sum_{n\geq 0} \alpha_n q^{-sn(n-1)/2} x^n \in \mathbb{C}\{x\}\};$$

c'est ce que l'on appelle la classe des *séries entières q-Gevrey d'ordre s.*

A titre d'exemple, nous mentionnons la série q-Gevrey d'ordre un

$$\hat f = \sum_{n\geq 0} (-1)^n q^{n(n+1)/2} x^{n+1},$$

qui vérifie la relation

$$(x\sigma_q + 1)\hat f = x.$$

Nous dirons que cette série est Gq-sommable dans toute direction sauf $\mathbb{R}^-$.

2.2 Cas non linéaire –

Que peut-on dire d'une série entière solution d'un opérateur aux q-différences non linéaire à coefficients analytiques ? Citons le théorème de König suivant ([Al], chapitres 3 et 4) :

> *Soit $g(x) = qx + \beta_2 x^2 + \dots$ un difféomorphisme local à l'origine du plan complexe, avec $|q \neq 1$. Alors il existe un difféomorphisme local (non trivial) à l'origine, f, tel que $f(qx) = g(f(x))$.*

Dans l'énoncé précédent, on peut interpréter la relation fonctionnelle $f(qx) = g(f(x))$ comme une équation aux q-différences non linéaire en f, à coefficients constants. De plus, on démontre facilement que toute série entière solution formelle de $y(qx) - g(y(x)) = 0$ est convergente. Vu le caractère q-Gevrey de la solution formelle d'une équation aux q-différences linéaire, il est clair que l'espace des séries convergentes ne suffit pas pour les équations aux q-différences non linéaires.

Dans l'article [Zh2], en nous inspirant d'une idée de B. Malgrange [Ma2] ("équation variationnelle" + théorème de fonctions implicites), nous avons étudié la nature de convergence d'une série entière vérifiant une équation analytique mélangeant l'opérateur différentiel $\delta = xd/dx$ et l'opérateur aux q-différences σ_q. L'énoncé suivant donne une réponse à la question posée au début du paragraphe.

> *Soit G une fonction analytique en $0 \in \mathbb{C}^{(m+1)(\ell+1)+1}$ non identiquement nulle et soit $\hat{f} = \sum_{n\geq 1} \alpha_n x^n$ une série entière sans terme constant vérifiant l'équation*
>
> $$G(x, \hat{f}, \delta\hat{f}, ..., \delta^m \hat{f}, ..., \sigma_q^\ell \hat{f}, \delta\sigma_q^\ell \hat{f}, ..., \delta^m \sigma_q^\ell \hat{f}) = 0.$$
>
> *Alors il existe $s \geq 0$, $\mu \geq 0$ tels que l'on ait :*
>
> $$\sum_{n\geq 1} \alpha_n q^{-sn(n-1)/2} (n!)^{-\mu} \in \mathbb{C}\{x\}.$$
>
> *En particulier, si $\hat{f}$ est solution formelle d'une équation aux q-différences non linéaire à coefficients analytiques, alors $\hat{f}$ est une série q-Gevrey.*

Le résultat central de [Zh2] précise, en effet, comment estimer les indices Gevrey s, μ à l'aide d'une notion de double polygone de Newton introduite dans [Na], l'un associé à l'opérateur différentiel δ, l'autre à σ_q. Cela unifie finalement le théorème de König et le théorème de Maillet-Malgrange ([Ma2].

Terminons cette partie "formelle" par l'équation mixte suivante :

$$x^2 y'(qx) + y(x) = x,$$

dont une solution formelle est la série

$$\hat{y} = \sum_{n\geq 0} (-1)^n n! q^{n(n+1)/2} x^{n+1},$$

qui n'est ni Borel-Laplace sommable, ni Gq-sommable ! Il faudrait un procédé de sommation plus complexe.

3. Théorie des développements asymptotiques q-Gevrey

3.1 Asymptotique Gevrey et sommation de Borel-Laplace –

Dans le chapitre précédent, on a vu que des équations différentielles ou aux q-différences admettent pour solutions formelles des séries divergentes. A ce sujet citons encore deux exemples historiquement importantes. La série entière $\sum_{n\geq 0}(-1)^n n! x^{n+1}$, solution formelle de $x^2y' + y = x$ (*cf* [In], page 174), porte le nom du grand mathématicien Euler tandis que la fameuse formule de Stirling sur la fonction Gamma finit par être complétée avec une série divergente (*cf* [Wo], pages 110-111 ; pour une approche moderne, voir [De]). C'est enfin Poincaré qui a fondé pour la première fois une définition rigoureuse de développement asymptotique d'une fonction en une série formelle. La définition adoptée au cas complexe peut être formulée comme suit : une fonction définie, analytique dans un secteur ouvert de sommet "l'origine" de $\tilde{\mathbb{C}}^*$ admet une série entière pour développement asymptotique si, quel que soit W sous-secteur relativement compact de V et quel que soit n entier naturel, l'écart entre la fonction et la somme partielle d'ordre $(n-1)$ de la série est *d'ordre* n sur W, c-à-d, du type $C_{n,W}|x|^n$, avec $C_{n,W} > 0$ une constante convenable.

Dans la défintion précédente, la détermination optimale des constantes $C_{n,W}$ relève de la nature de convergence de la série-développement et de la fonction elle-même. Si les $C_{n,W}$ peuvent être choisies égales à une suite géométrique $(A^n)_{n\geq 0}$, le développement n'est rien autre que la série de Taylor de la fonction en l'origine. Si la série est telle que $\sum_{n\geq 0}(-1)^n n! x^n$, les $C_{n,W}$ doivent être $\geq n!$; il en sera de même pour la série q-Gevrey $\sum_{n\geq 0}(-1)^n q^{n(n-1)/2} x^n$. Si aucune condition particulière ne s'impose sur $C_{n,W}$, un *théorème de Borel-Ritt* affirme que, étant donnés un secteur et une série entière, il existe des fonctions ayant la série pour développement asymptotique dans ce secteur.

La théorie des développements asymptotiques de Watson [Wa2], largement développée depuis les années 1970 par Malgrange [Ma0], Sibuya [Si], Ramis [Ra1], Balser [Ba], *etc*, étudie précisément le cas où l'on peut choisir $C_{n,W}$ de la forme $C_W(A_W)^n n!$ ou plus généralement de la forme $C_W(A_W)^n\Gamma(1+sn)$, $s > 0$ désignant l'ordre Gevrey. Dans ce cas, on dit que la fonction admet un *développement asymptotique Gevrey (d'ordre s)* dans V. Cela définit un cadre qui est suffisamment large pour l'étude des équations différentielles méromorphes car chaque solution formelle est Gevrey d'un certain ordre.

Dans notre travail [FZ], nous comparons la notion de l'aymptotique réelle (*i.e* dans une direction) et celle de l'asymptotique complexe (sur un secteur). Nous constatons qu'un argument du type principe du maximum suffit pour conclure l'asymptotique sur un secteur depuis l'asymptotique directionnelle, pourvu que la fonction soit bornée sur le secteur. C'est-à-dire :

> *Etant donnée une fonction analytique complexe bornée sur un secteur et admettant un développement asymptotique dans une direction du secteur, le domaine de validité du développement asymptotique s'étend à tout le secteur, et ce, respectivement dans le cas de l'asymptotique au sens de Poincaré et dans le cas Gevrey.*

L'asymptotique Gevrey est une asymptotique *exacte* au sens suivant (*cf* [Ra1]).

> *Si deux fonctions données admettent le même développement asymptotique Gevrey d'ordre un dans un secteur d'ouverture $> \pi$, alors elles sont égales.*

Le point clé pour démontrer ce résultat est le théorème de Phragmén-Lindelöf, qui demande à une fonction analytique d'être identiquement nulle lorsqu'elle est du genre $O(e^{-B/|x|})$ sur un secteur d'ouverture $> \pi$, où $B > 0$. En effet, la fonction exponentielle, $e^{1/x}$, ne décroît que dans le demi-plan à gauche quand x tend vers zéro.

La propriété suivante établit un lien entre l'asymptotique Gevrey et la méthode de sommation de Borel-Laplace (*cf* [Ma1], [Ra2]).

Si une fonction f admet un développement asymptotique $\hat f$ Gevrey d'ordre un sans terme constant sur un secteur $\{a < \arg x < b, 0 < |x| < R\}$ d'ouverture $> \pi$, alors elle peut être reconstituée, à partir de $\hat f$, par le procédé de sommation exponentielle de Borel-Laplace :

$$\hat f := \sum_{n\geq 0} \alpha_n x^{n+1} \xrightarrow{\hat{\mathcal{B}}} \hat\varphi := \sum_{n\geq 0} \frac{\alpha_n}{n!}\xi^n \xrightarrow{\mathcal{S}^d}$$

$$\xrightarrow{\mathcal{S}^d} \varphi := \mathcal{S}^d\hat\varphi \xrightarrow{\mathcal{L}^d} f := \int_0^{\infty e^{id}} \varphi(\xi)e^{-\xi/x}d\xi,$$

où d est l'une quelconque des directions comprises entre $a + \pi/2$ et $b - \pi/2$ et $\mathcal{S}^d$ désigne l'opérateur de prolongement analytique le long de la direction d'argument d.

Les $\hat{\mathcal{B}}\hat f$, $\mathcal{L}^d\varphi$ et f ci-dessus s'appellent respectivement *la transformée de Borel formelle de $\hat f$*, *la transformée de Laplace de φ dans la direction d'argument d* et *la Borel-somme de $\hat f$ dans la direction d* ; on dit aussi que $\hat f$ est *Borel-Laplace sommable* dans la direction d. Il est à noter que si $\hat f$ est solution formelle d'une équation différentielle, alors sa Borel-somme l'est aussi ; cela résulte de certaines propriétés algébriques de $\hat{\mathcal{B}}$ et de $\mathcal{L}^d$ (*cf* [Ma1]).

3.2 Asymptotique q-Gevrey exacte –

Dans son panorama [Ra2], pages 56-57, J. P. Ramis fait remarquer que la fonction q-exponentielle $q^{\log_q t(\log_q t-1)/2}$ répond au problème des moments associé à la suite divergente q-Gevrey $(q^{n(n-1)/2})_{n\geq 0}$, car :

$$\frac{q^{-1/8}}{\sqrt{2\pi \log q}}\int_0^\infty t^n q^{-\log_q t(\log_q t-1)/2}\frac{dt}{t} = q^{n(n-1)/2}.$$

C'est un joli analogue de la formule intégrale d'Euler sur la fonction Gamma que l'on rappelle ci-dessous :

$$\int_0^\infty t^n e^{-t}\frac{dt}{t} = \Gamma(n) \quad (n \geq 1),$$

laquelle est liée à la transformation de Laplace.

Contrairement aux comportements asymptotiques opposés qu'admet à l'infini la fonction exponentielle e^x dans les deux demi-plans $\Re x > 0$ et $\Re x < 0$, la fonction q-exponentielle $e_q(x)$ $(= q^{(\log_q x)(\log_x -1)/2})$ admet pratiquement la même croissance dans toute direction de $\mathbb{C}^*$ et même de $\tilde{\mathbb{C}}^*$. Par conséquent, si l'on remplace dans la définition de la transformation de Laplace le noyau intégral $e^{-\xi/x}$ par son homologue $1/e_q(\frac{\xi}{x})$ $(\neq e_q(-\xi/x))$, on obtiendra, quand l'intégrale converge sur un segment, une fonction définie sur un secteur d'ouverture aussi grande qu'on le désirera. C'est là où l'on va travailler pour aboutir à un critère d'unicité : on doit y imposer une condition sur la croissance angulaire.

Soit donc f une fonction définie, analytique dans un disque en colimaçon

$$\tilde{D}_R = \{x \in \tilde{\mathbb{C}}^* : 0 < |x| < R\}.$$

Par définition, nous disons que f admet $\sum_{n\geq 0} \alpha_n x^n$ pour *développement aymptotique q-Gevrey d'ordre un* dans une direction d'argument d si la condition suivante est remplie : pour tout $r \in]0, R[$, il existe des constantes $A > 0$, $C > 0$ telles que, quels que soient n entier et x élément de $\tilde{D}_r$, on ait ($\arg_q x = \Im(\log_q x)$) :

$$|f(x) - \sum_{p=0}^{n-1} \alpha_p x^p| < CA^n q^{[n(n-1)+(\arg_q(xe^{-id}))^2]/2} |x|^n.$$

Tout développement asymptotique q-Gevrey d'ordre un est nécessairement une série entière q-Gevrey d'ordre un ; le théorème de Borel-Ritt cité précédemment admet ici une version q-Gevrey : toute série q-Gevrey d'ordre un est le développement asymptotique q-Gevrey d'ordre un de certaines fonctions dans une direction arbitrairement fixée d'avance.

La notion de développement asymptotique q-Gevrey peut être qualifiée d'exacte au vu du résultat suivant.

> *Si deux fonctions admettent un même développement asymptotique q-Gevrey d'ordre un dans deux directions distinctes, alors elles sont égales.*

Céci étant, nous proposons la définition suivante. Une série q-Gevrey d'ordre un est dite *Gq-sommable d'ordre un dans une direction d'argument d* s'il existe une fonction, appelée *Gq-somme d'ordre un de la série dans cette direction*, qui admet la série pour développement asymptotique q-Gevrey d'ordre un dans toute direction suffisamment voisine de celle-ci. Notons que si une série est Gq-sommable dans une direction, alors elle l'est également dans toute direction assez proche.

En général, la Gq-somme d'une série est une fonction multiforme ; elle est uniforme si, et seulement si, la série correspondante admet un rayon de convergence non nul.

3.3 Transformation de q-Borel-Laplace –

En nous inspirant de la méthode de sommation exponentielle de Borel-Laplace classique, nous appelons *transformation formelle de q-Borel d'ordre un*, notée $\hat{\mathcal{B}}_{q;1}$, l'opérateur linéaire de $\mathbb{C}[[x]]$ dans $\mathbb{C}[[\xi]]$ qui envoie chaque monôme x^n en $q^{-n(n-1)/2}\xi^n$. On a $\hat{f} \in \mathbb{C}[[x]]_{q;1}$ si, et seulement si, $\hat{\mathcal{B}}_{q;1}\hat{f} \in \mathbb{C}\{\xi\}$. De plus, $\hat{f} \in \mathbb{C}\{x\}$ si, et seulement si, $\hat{\mathcal{B}}_{q;1}\hat{f}$ définit une fonction entière à croissance q-exponentielle d'ordre un à l'infini, *i.e*

$$\hat{\mathcal{B}}_{q;1}\hat{f}(\xi) = O(|\xi|^\mu e_q(|\xi|))$$

pour $|\xi| \to \infty$, où $\mu > 0$ désigne une constante convenable. Toute série convergente est Gq-sommable dans n'importe quelle direction ; le résultat suivant montre, entre autres, combien une série Gq-sommable ressemble à une série convergente.

Une série est Gq-sommable d'ordre un dans une direction donnée si, et seulement si, sa transformée de q-Borel formelle d'ordre un définit un germe de fonction analytique au voisinage de l'origine du plan complexe et qui peut être prolongé en une fonction analytique et à croissance q-exponentielle d'ordre un à l'infini dans un secteur ouvert bissecté par cette direction.

De plus, la Gq-somme d'une série Gq-sommable d'ordre un dans une direction d'argument d peut être obtenu par le procédé de Gq-sommation décrit ci-dessous :

$$\hat{f} \longrightarrow \hat{\varphi} = \hat{\mathcal{B}}_{q;1}\hat{f} \longrightarrow \varphi = \mathcal{S}^d\hat{\varphi} \longrightarrow$$
$$\longrightarrow \mathcal{S}^d_{q;1}\hat{f} = \mathcal{L}^d_{q;1}\varphi := \frac{q^{-1/8}}{\sqrt{2\pi \log q}} \int_0^{\infty e^{id}} \frac{\varphi(\xi)}{e_q(\frac{\xi}{x})}\frac{d\xi}{\xi},$$

où $\mathcal{S}^d$ désigne l'opérateur de prolongement analytique le long la direction d'argument d.

L'opérateur $\varphi \mapsto \mathcal{L}^d_{q;1}\varphi$ défini ci-dessus s'appelle *transformation de q-Laplace analytique d'ordre un dans la direction d*. Son inverse, noté $\mathcal{B}_{q;1}$, défini dans l'ensemble des Gq-sommes d'ordre un dans la direction d'argument d, vérifie la relation suivante :

$$\mathcal{B}_{q;1}f(\xi) = -i\frac{q^{1/8}}{\sqrt{2\pi \log q}} \int_{re^{-i\infty}}^{re^{i\infty}} e_q(\frac{x}{\xi})f(x)\frac{dx}{x},$$

où r est un nombre strictement compirs entre 0 et le rayon d'un disque en colimaçon sur lequel f est définie en tant que Gq-somme. L'opérateur $\mathcal{B}_{q;1}$ s'appelle *transformation de q-Borel analytique d'ordre un* ; voir §5.2 pour une extension de $\mathcal{B}_{q;1}$

4. Sommabilité dans une équation aux q-différences linéaire analytique

4.1 Cas d'un seul niveau –

Depuis le fondement de la théorie des développements asymptotiques de Poincaré, nombre de travaux de recherche portent sur l'existence et la construction de solution analytique asymptotique à une solution formelle d'une équation différentielle à point singulier irrégulier. Dans le Mémoire [Po], au moyen de la transfomation de Laplace, Poincaré lui-même a obtenu de telles solutions pour une famille particulière d'équations différentielles linéaires à singularité irrégulière. Dès lors et même auparavant, on voyait une place prévilégiée occupée par la transformation de Laplace dans la problématique de construire des solutions asymptotiques ; soulignons que cette approche a été particulièrement explorée par Birkhoff dans son papier [Bi2].

La méthode de sommation exponentielle de Borel-Laplace relève intimement d'une utilisation systématique de la transformation de Laplace. Chaque fois qu'elle peut s'appliquer à une série formelle solution d'une équation différentielle, on obtient des solutions analytiques ou dites *vraies solutions* de l'équation, ces dernières ayant la série pour développement asymptotique. Cela résulte d'une sorte de compatibilité de Borel-Laplace avec les opérations usuelles de fonctions analytiques telles que l'addition, le produit et la dérivation (*cf* [MR2]).

En 1980, J. P. Ramis [Ra1] a démontré la sommabilité au sens Borel-Laplace d'une série entière solution formelle d'une équation différentielle linéaire à coefficients analytiques lorsque le polygone de Newton de l'équation admet une seule pente strictement positive qui vaut un. Dans [RS], on démontre, entre autres, que cette condition basée sur la pente unique – d'où l'expression *un seul niveau* – est nécessaire pour la validité de champ d'application de la méthode de sommation de Borel-Laplace.

Dans la même optique, pour les équations aux q-différences cette fois, nous avons obtenu le résultat q-analogue suivant.

> *Soit $\Delta y = b(x)$ une équation aux q-différences linéaire à coefficients analytiques à l'origine du plan complexe et soit $\hat{f}$ une série entière satisfaisant à cette équation. Si le polygone de Newton $PN(\Delta)$ admet une seule pente strictement positive qui vaut 1, alors $\hat{f}$ est Gq-sommable dans toute direction de $\mathbb{C}$ sauf éventuellement un nombre fini ; en outre, toute Gq-somme de $\hat{f}$ est solution analytique de la même équation.*

En effet, en utilisant la factorisation analytique d'un opérateur aux q-différences établie au §2.1 et d'après nos hypothèses sur Δ, on a :

$$\Delta = \Delta_\ell\ \Delta', \quad \Delta' = (x\sigma_q - \alpha_{\ell+1})h_{\ell+1}(x)...(x\sigma_q - \alpha_m)h_m(x),$$

où Δ_ℓ est un opérateur aux q-différences linéaire d'ordre ℓ dont le polygone de Newton ne comporte aucune pente strictement positive. Par un calcul direct, on peut vérifier l'équivalence ci-dessous valable pour tout $\hat{f} \in \mathbb{C}[[x]]$:

$$\Delta\hat{f} \in \mathbb{C}\{x\} \iff \Delta'\hat{f} \in \mathbb{C}\{x\}.$$

Ceci étant, on peut supposer $\Delta = \Delta'$ et on procède par récurrence sur l'ordre de l'équation, donc sur le nombre de facteurs du type $(x\sigma_q - \alpha)h$. Avec la transformation de q-Borel analytique, on démontre que l'ensemble des séries Gq-sommables d'ordre un dans une direction donnée consititue un $\mathbb{C}\{x\}$-module. On obtient enfin la Gq-sommabilité de $\hat{f}$ grâce au lemme qui suit.

> *Soit $\hat{f}$ une série entière et $\hat{g}$ une série Gq-sommable d'ordre un dans une direction donnée. Si $(x\sigma_q - \alpha)\hat{f} = \hat{g}$, alors $\hat{f}$ est Gq-sommable d'ordre un dans la même direction pourvu que cette direction ne contienne pas le point d'affixe α.*

Pour ceci, on se sert de la relation $\hat{\mathcal{B}}_{q;1}(x\sigma_q) = \xi\hat{\mathcal{B}}_{q;1}$, qui donne :

$$\hat{\mathcal{B}}_{q;1}\hat{f} = \frac{1}{\xi - \alpha}\ \hat{\mathcal{B}}_{q;1}\hat{g},$$

laquelle montre que, dans le plan de (q-)Borel, les transformées $\hat{\mathcal{B}}_{q;1}\hat{f}$, $\hat{\mathcal{B}}_{q;1}\hat{g}$ ont les mêmes propriétés de prolongement analytique et de croissance q-exponentielle dans toute direction ne passant pas par le point d'affixe α.

Dans la cinquième partie de l'article [Zh1], nous avons précisé les éventuelles directions dans lesquelles la sommabilité n'a pas lieu, et, nous avons aussi calculé les multiplicateurs de Stokes associés.

A titre d'exemple d'illustration, considérons la série $\hat{f} = \sum_{n\geq 0}(-1)^n q^{n(n+1)/2} x^{n+1}$, solution de l'équation $xy(qx) + y(x) = x$. On a $\hat{\mathcal{B}}_{q;1}\hat{f} = \frac{\xi}{1+\xi}$; la série $\hat{f}$ est Gq-sommable dans toute direction sauf $\mathbb{R}^-$, d'argument $\pi \mod 2\pi$. Si l'on note f^+, resp. f^-, la Gq-somme de $\hat{f}$ calculée dans une direction d'argument légèrement inférieur à π, resp. supérieur à π, avec Cauchy on obtient (ici, on admet que $-1 = e^{i\pi}$) :

$$f^+(x) - f^-(x) = \frac{\sqrt{-2\pi}\ q^{-1/8}}{\sqrt{\log q}\ e_q(-\frac{1}{x})}.$$

4.2 Produit de q-convolution –

On vient d'évoquer la structure de $\mathbb{C}\{x\}$-module de l'ensemble des séries Gq-sommables d'ordre un dans une direction fixée. Cet ensemble *n'est pas stable par le produit* de deux séries. Essentiellement, cette instabilité provient du caractère rigide de la notion de la croissance q-exponentielle d'ordre un. En effet, le carré de la fonction q-exponentielle e_q $(= q^{\log_q x(\log_q x-1)/2})$ n'a pas une croissance q-exponentielle d'ordre un. En revanche, il a une croissance "q^2-exponentielle d'ordre DEUX", tenant compte de la relation suivante :

$$e_q(x)\ \times e_q(x) = e_{q^2}(x^2).$$

Suivant l'artcle [Ra3] de J. P. Ramis, on dit qu'une fonction est à croissance *q-exponentielle d'ordre $k > 0$* à l'infini si elle est du type $O(x^\mu(e_q(|x|))^k)$ quand $|x|$ tend vers l'infini, où $\mu > 0$ est une constante convenablement choisie pour la fonction.

En utilisant un théorème de J. P. Ramis [Ra3] sur la croissance d'une fonction entière solution d'une équation aux q-différences à coefficients polynomiaux, nous avons obtenu le résultat suivant [MZ].

> *Si $\hat{f}$ désigne le carré de la série entière $\sum_{n\geq 0}(-1)^n q^{n(n+1)/2} x^{n+1}$, alors la transformée $\hat{\mathcal{B}}_{q;1}\hat{f}$ définit une fonction analytique au voisinage de $\xi = 0$ et qui peut être prolongée en une fonction analytique, ayant à l'infini une croissance q-exponentielle d'ordre exact DEUX, dans tout secteur ouvert ne contenant pas $\mathbb{R}^-$.*

En vue de faciliter les calculs formels, nous avons introduit la notion suivante de *produit de q-convolution formel* $\hat{\star}_{q;1}$. L'idée de base consiste à obtenir une relation du style :

$$\hat{\mathcal{B}}_{q;1}(\hat{f}\hat{g}) = (\hat{\mathcal{B}}_{q;1}\hat{f})\hat{\star}_{q;1}(\hat{\mathcal{B}}_{q;1}\hat{g});$$

cela nous suggère la définition suivante. Si $\hat{\varphi} = \sum_{n\geq 0}\alpha_n\xi^n$ et $\hat{\gamma} = \sum_{n\geq 0}\beta_n\xi^n$, on définit :

$$\hat{\varphi}\hat{\star}_{q;1}\hat{\gamma}(\xi) = \sum_{n\geq 0}\sum_{j=0}^{n}\alpha_j\beta_{n-j}q^{-j(n-j)}\xi^n.$$

Puisque l'ensemble des séries q-Gevrey d'ordre un constitue un anneau, on obtient que le q-convolé de deux séries convergentes a un rayon de convergence non nul ; en d'autres termes, le convolé de deux fonctions analytiques à l'origine reste analytique en l'origine. Comment définir alors un produit de q-convolution analytique entre des fonctions éventuellement seulement analytiques dans un secteur ? Nous avons étudié le cas où une fonction est analytique à l'origine, soit $\varphi = \sum_{n\geq 0} \alpha_n \xi^n \in \mathbb{C}\{\xi\}$, et où l'autre est bornée dans un secteur V, soit γ ; dans ce cas, nous définissons :

$$\varphi \star_{q;1} \gamma(\xi) = \sum_{n\geq 0} \alpha_n \xi^n \gamma(q^{-n}\xi),$$

laquelle peut être interprétée en termes de q-intégrale (*cf* [GR], p. 19).

Par définition, nous appelons $\varphi \star_{q;1} \gamma$ le *produit analytique de q-convolution de φ et γ*. Si γ admet $\hat{\gamma}$ pour développement asymptotique dans le secteur V, un calcul direct montre que $\varphi \star_{q;1} \gamma$ admet $\hat{\varphi} \hat{\star}_{q;s} \hat{\gamma}$ pour développement asymptotique. Citons aussi la propriété suivante de l'opérateur $\star_{q;1}$ (*cf* Lemme 2.4.4 de [MZ]), qui est très importante dans l'étude de la multisommabilité q-Gevrey d'une solution formelle d'une équation aux q-différences.

> *Si φ est une fonction entière à croissance q-exponentielle d'ordre 1 et si γ est une fonction définie et analytique dans un secteur ouvert illimité V, bornée dans tout sous-secteur de rayon fini de V et qui admet, à l'infini dans V, une croissance q-exponentielle d'ordre $k \geq 1$, alors $\varphi \star_{q;1} \gamma$ admet au plus une croissance q-exponentielle d'ordre k à l'infini dans ce secteur.*

Ici, on a supposé que le facteur φ du produit $\varphi \star_{q;1} \gamma$ est une fonction entière munie d'une croissance q-exponentielle "modérée" par rapport à l'autre, γ. Dans notre étude précédente sur le carré de la série de terme général $(-1)^n q^{n(n+1)/2} x^{n+1}$, φ est la fonction rationnelle $\frac{\xi}{1+\xi}$, donc n'est pas analytique dans $\mathbb{C}$.

Nous reviendrons à ce sujet de q-convolution au §5.2.

4.3 Gq-multisommabilité –

Avec la série carrée $(\sum_{n\geq 0} (-1)^n q^{n(n-1)/2} x^{n+1})^2$, on conclut aussitôt que la méthode de Gq-sommation d'ordre un ne suffit pas pour sommer toute solution formelle d'une équation aux q-différences. Nous avons pensé alors à étendre l'ordre q-Gevrey un de Gq-sommation à l'ordre s quelconque puis à tenter de prouver que toute solution formelle d'une équation aux q-différences serait combinaison linéaire de séries Gq-sommables de différent ordre s. En adoptant les définitions :

$$\hat{\mathcal{B}}_{q;s} = \hat{\mathcal{B}}_{q^s;1}, \quad \mathcal{L}^d_{q;s} = \mathcal{L}^d_{q^s;1}, \quad etc,$$

nous parvenons à un procédé de sommation valable pour une classe de séries q-Gevrey d'ordre s. Ceci étant, l'énoncé qui suit dénonce par contre notre tentative de considérer simplement des combinaisons linéaires entre différents ordres q-Gevrey !

> *Pour toute suite finie de réels strictement positifs $(s_j)_{1\leq j\leq \ell}$ et toute direction de $\mathbb{C}$, il n'existe aucun ℓ-uplet $(\hat{f}_j)_{1\leq j\leq \ell}$, chaque $\hat{f}_j$ étant Gq-sommable d'ordre s_j dans cette direction, qui vérifie $(\sum_{n\geq 0} (-1)^n q^{n(n+1)/2} x^n)^2 = \hat{f}_1 + ... + \hat{f}_\ell$*

C'est un phénomène qui ne se produit pas dans la théorie des équations différentielles. Pensons alors à combiner "multiplicativement" des procédés de Gq-sommation d'ordre différent ; cette démarche s'inspire de ce que l'on appelle *la méthode d'accélération (élémentaire)* (*cf* [Ec], [MR]) (en réalité, la notion d'accélération sommatoire remonte à certains travaux d'Euler, *cf* [Kn]).

Par définition, nous disons qu'une série entière $\hat{f}$ est *Gq-multisommable dans une direction d'argument* d s'il existe une suite finie strictement croissante de réels > 0, $(s_1, ..., s_r)$, telle que $\hat{f}$ soit q-Gevrey d'ordre s_r et que l'on puisse effectuer successivement les opérations suivantes :

$$\hat{f} \overset{\hat{\mathcal{B}}_{q;s_r}}{\longrightarrow} \hat{\varphi} = \hat{\mathcal{B}}_{q;s_r}\hat{f} \overset{\mathcal{S}^d}{\longrightarrow} \varphi_r = \mathcal{S}^d\hat{\varphi} \overset{\mathcal{L}^d_{q;s_r-s_{r-1}}}{\longrightarrow} \dots$$
$$\overset{\mathcal{L}^d_{q;s_{j+1}-s_j}}{\longrightarrow} \varphi_j = \mathcal{L}^d_{q;s_{j+1}-s_j}\varphi_{j+1} \overset{\mathcal{L}^d_{q;s_j-s_{j+1}}}{\longrightarrow} \dots$$
$$\overset{\mathcal{L}^d_{q;s_2-s_1}}{\longrightarrow} \varphi_1 = \mathcal{L}^d_{q;s_2-s_1}\varphi_2 \overset{\mathcal{L}^d_{q;s_1}}{\longrightarrow} f = \mathcal{L}^d_{q;s_1}\varphi_1 \ ,$$

où $\mathcal{S}^d$ désigne l'opérateur de prolongement analytique le long de la direction d'argument d et où f s'appelle la *Gq-multisomme* de $\hat{f}$ dans la direction. La définition donnée ici est légèrement plus large que celle introduite dans [MZ], §2.3.4.

Toute série convergente est Gq-multisommable dans toute direction et la Gq-multisomme coïncide avec sa somme habituelle. Plus généralement, toute série Gq-sommable d'un certain ordre, simple, dans une direction donnée est nécéssairement Gq-multisommable dans la même direction. Des résultats de type taubérien sont également présentés dans notre article [MZ].

A l'aide de la factorisation analytique de §2.1 et du dernier résultat de §4.2 sur la croissance de $\varphi \star_{q;s} \gamma$ (en remplaçant respectivement $s = 1$ par un ordre $s > 0$ et $k > 1$ par $k > 1/s$), nous démontrons :

> *Si Δ est un opérateur aux q-différences linéaire à coefficients analytiques à l'origine du plan complexe et si $\hat{f} \in \mathbb{C}[[x]]$ est une série dont l'image par Δ soit une série convergente, alors $\hat{f}$ est Gq-multisommable dans toute direction sauf éventuellement un nombre fini, et son multi-ordre de sommabilité est composé des inverses respectifs des pentes strictement positives du polygone de Newton de Δ.*
> *En particulier, si Δ n'a pas de pente strictement positive et si $\Delta\hat{f} \in \mathbb{C}\{x\}$, alors $\hat{f}$ elle-même est convergente.*

En effet, d'après le théorème 3.3.2 de [MZ], toute équation $\Delta y = 0$ admet un système fondamental de solutions formelles où les séries entières intervenues sont Gq-multisommables dans presque toutes les directions. Ce dernier constitue une version q-analogue d'un résultat de [BBRS] sur les équations différentielles. Comme application, mentionnons la conclusion suivante :

> *La méthode de Gq-multisommation permet de construire un système fondamental de solutions analytiques asymptotiques pour une équation aux q-différences linéaire à coefficients analytiques à l'origine du plan complexe.*

5. q-analyse du point de vue combinatoire

5.1 Sommation au moyen de la fonction thêta de Jacobi –

Au §3.2, on a rappelé que la fonction q-exponentielle $e_q(t)$ est reliée à la suite q-Gevrey d'ordre un $(q^{n(n-1)/2})_{n\geq 0}$ via la relation :

$$\frac{q^{-1/8}}{\sqrt{2\pi \log q}} \int_0^\infty \frac{t^n}{e_q(t)} \frac{dt}{t} = q^{n(n-1)/2},$$

laquelle est une variante de l'intégrale de Gauss

$$\int_0^\infty e^{-t^2/2} dt = \sqrt{2\pi} \ .$$

Vu la croissance très forte de la suite $(q^{n(n-1)/2})_{n\geq 0}$, la solution au problème des moments correspondant n'est pas unique (*cf* [Be]) ; on a, en effet, l'égalité suivante (*cf* [GR] page 158, [Zh3] lemme 6.4) :

$$\frac{1}{\pi_q} \int_0^\infty \frac{t^n}{\theta_q(t)} \frac{dt}{t} = q^{n(n-1)/2}.$$

Ici, on a posé

$$\pi_q = \ln q \prod_{n\geq 0} (1 - q^{-n-1})^{-1}, \quad \theta_q(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} q^{-n(n-1)/2} t^n.$$

En adoptant la notation usuelle $(\alpha; q^{-1})_\infty = \prod_{n\geq 0}(1 - \alpha q^{-n})$ pour tout complexe $\alpha \in \mathbb{C}$, on trouve les écritures suivantes :

$$\pi_q = \ln q / (q^{-1}; q^{-1})_\infty, \quad \theta_q(t) = (q^{-1}; q^{-1})_\infty \ (-t; q^{-1})_\infty \ (-\frac{1}{qt}; q^{-1})_\infty,$$

la dernière portant le nom de *triple formule de Jacobi*.

La fonction $\theta_q(t)$ vérifie la même équation aux q-différences que $e_q(qt)$, à savoir : $y(qt) = qty(t)$; on en déduit que $\theta_q(t)/e_q(qt)$ est une fonction q-périodique, c-à-d invariante par l'opérateur σ_q, et, par suite, qu'elles ont toutes deux une même croissance q-exponeneielle à l'infini (et aussi en l'origine). Il importe de noter que, contrairement au comportement de $e_q(t)$ à la fois multivoque et "homogène" – même croissance dans toute direction – dans la sphère de Riemann du logarithme, la q-exponentielle $\theta_q(t)$ représente une fonction analytique dans le plan complexe privé de l'origine qui s'annule en tout point d'affixe $-q^n$, n décrivant l'ensemble des entiers relatifs. Il serait utilie d'imaginer que θ_q a "replié" le demi-plan à gauche en une ligne pointillée, demi-plan où la fonction exponentielle standard e^t décroît très vite à l'infini ; cette idée sera l'objet du §6.1 au moment où l'on parlera d'une troisième q-exponentielle.

Soit φ une fonction analytique au voisinage de zéro qui admet une croissance q-exponentielle d'ordre un à l'infini dans un secteur bissecté par une direction d'argument d, et posons :

$$\mathbf{L}_{q;1}^d \varphi(x) = \frac{1}{\pi_q} \int_0^{\infty e^{id}} \frac{\varphi(\xi)}{\theta_q(\frac{\xi}{x})} \frac{d\xi}{\xi}.$$

On obtient une fonction analytique, $\mathbf{L}_{q;1}^d \varphi$, dans un secteur du type

$$V_{d;\varepsilon,R} = \{d - \pi - \varepsilon < \arg x < d + \pi + \varepsilon, 0 < |x| < R\}$$

où $\varepsilon > 0$, $R > 0$ sont des constantes convenables ; nous appelons cette fonction *la transformée de Laplace de φ relative à θ_q dans la direction d'argument d.*

Si l'on désigne par f la fonction $\mathbf{L}_{q;1}^d\varphi$ précédemment définie, on a :

$$f(xe^{2\pi i}) - f(x) = \frac{2\pi i}{\pi_q} \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n q^{-n(n+1)/2} \varphi(-q^n x)$$

pour tout x appartenant au secteur $V_{d;\varepsilon,R} \cap V_{d-2\pi;\varepsilon,R}$.

De plus, f est l'unique fonction définie, analytique dans $V_{d;\varepsilon,R}$, ayant $\hat f$ pour développement asymptotique et dont la variation soit donnée par la formule ci-dessus, où $\hat f$ désigne la série entière, Gq-sommable dans la direction d'argument d, dont la transformée de q-Borel formelle d'ordre un est égale à la série de Taylor de φ en l'origine.

Le développement asymptotique ci-dessus est tel que, dans la définition de Poincaré rappelée au début de §3.1, les constantes $C_{q;W}$ peuvent être choisies égales à une suite de la forme $(CA^n q^{n(n-1)/2})_{n\geq 0}$. Celui-ci nous suggère à introduire une nouvelle asymptotique q-Gevrey, relativement faible par rapport à celle de §3.2, que nous appelons *développement asymptotique Gevrey d'ordre* $(q;1)$; *cf* [Zh4], §1.

En conclusion, on dispose d'une nouvelle version q-analogue de la méthode de sommation exponentielle de Borel-Laplace :

$$\hat f \;\longrightarrow\; \varphi = \mathcal{S}^d \hat{\mathcal{B}}_{q;1} \hat f \;\longrightarrow\; f = \mathbf{L}_{q;1}^d \varphi.$$

5.2 Transformation de q-Borel et produit de q-convolution –

Dans ce paragraphe, V désigne un secteur d'ouverture $> 2\pi$ et V_- le secteur des points x de V tels que $xe^{2\pi i} \in V$. Si f est une fonction définie sur V, on pose, pour tout $x \in V_-$:

$$\operatorname{var} f(x) = f(xe^{2\pi i}) - f(x).$$

Soit $\hat f$ une série q-Gevrey d'ordre un. D'après la version q-Gevrey du théorème de Borel-Ritt citée au §3.2, il existe des fonctions f, analytiques dans le secteur V et qui y admettent la série $\hat f$ pour développement asymptotique Gevrey d'ordre $(q;1)$. Puisque la fonction $\operatorname{var} f$ est asymptotique Gevrey $(q;1)$ à la série nulle, elle a une décroissance q-exponentielle d'ordre un sur V_-. Posons :

$$\mathcal{B}_{q;1} f(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \theta_q(\frac{\xi}{ax}) \operatorname{var} f(ax) \frac{dx}{x} + \int_0^{2\pi} \theta_q(\frac{\xi}{ae^{2\pi it}}) f(ae^{2\pi it}) dt,$$

où a est un point appartenent à la bissectrice du secteur V_-.

La fonction $\mathcal{B}_{q;1} f$ ci-dessus est définie, analytique au voisinage de l'origine du plan complexe et est indépendante du choix du point a sur la bissectrice de V_-.

En outre, si $\hat f$ est le développement asymtotique de f, alors $\hat{\mathcal{B}}_{q;1} \hat f$ est la série de Taylor de $\mathcal{B}_{q;1} f$ en l'origine.

En d'autres termes, l'opérateur $\mathcal{B}_{q;1}$ *efface* la différence entre toutes les fonctions ayant un même développement asymptotique Gevrey d'ordre $(q;1)$ sur un secteur d'ouverture $> 2\pi$. En particulier, $\mathcal{B}_{q;1}$ est l'opérateur inverse de $\mathcal{L}^d_{q;1}$ et également de $\mathbf{L}^d_{q;1}$! Nous appelons $\mathcal{B}_{q;1}$ *la transformation de q-Borel analytique d'ordre un* ([Zh4], §2).

Considérons maintenant f, g deux fonctions analytiques qui ont chacune un développement asymptotique Gevrey d'ordre $(q;1)$ sur V noté respectivement $\hat{f}$, $\hat{g}$. Du fait que le produit fg admet $\hat{f}\hat{g}$ pour développement asymptotique Gevrey $(q;1)$, nous proposons la définition suivante de produit de q-convolution analytique :

$$(\mathcal{B}_{q;1}f) \star_{q;1} (\mathcal{B}_{q;1}g) = \mathcal{B}_{q;1}(fg).$$

Une étude un peu détaillée de ce formalisme ferait l'objet naturel d'un travail ultérieur qui aurait pour but de prolonger certains résultats de [Zh4].

5.3 Un nouveau q-analogue de la fonction Gamma –

Dans ce paragraphe, nous supposons que q est un réel appartenant à l'intervalle ouvert $]0,1[$; en outre, on note :

$$\Theta_q(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{n(n-1)/2}t^n = (q;q)_\infty\ (-t;q)_\infty\ (-\frac{q}{t};q)_\infty\ .$$

La fonction q-Gamma de Jackson, notée Γ_q, est la fonction définie dans $\mathbb{C}\setminus q^{\mathbb{Z}}$ par :

$$\Gamma_q(x) = \frac{(q;q)_\infty(1-q)^{1-x}}{(q^x;q)_\infty};$$

elle satisfait à la relation fonctionnelle :

$$\Gamma_q(x+1) = [x]\Gamma_q(x), \quad \Gamma_q(1) = 1,$$

où l'on note $[x] = \frac{q^x-1}{q-1}$. En outre, Γ_q tend vers Γ quand $q \to 1$; en 1978, R. Askey [As1] a établi un théorème du type Bohr-Mollerup sur la log-conxité de Γ_q ; *cf* [As2] et [GR] pages 24-25.

Dans notre article [Zh3], nous commençons par établir la caractérisation suivante de Γ_q, qui imite un résultat de Wielandt sur Γ exposé dans [Re].

> *La fonction Γ_q est la seule fonction analytique sur le demi-plan à droite $\{\Re x > 0\}$, satisfaisant à la ralation fonctionnelle $y(qx) = [x]y(x)$, $y(1) = 1$ et qui admette à l'infini dans la bande verticale $\{1 \le \Re x \le 2\}$ une croissance exponentielle d'ordre 1 et de type $< 2\pi$.*

Au moyen de cette caractérisation, nous retrouvons de nombreuses formules concernant la fonction Γ_q, dont la suivante, due à Askey et *al* (*cf* [GR] p. 158) :

$$\int_0^\infty \frac{(-tq^w;q)_\infty(-q^{x+1}/t;q)_\infty}{(-t;q)_\infty(-q/t;q)_\infty}\frac{dt}{t} = \frac{\ln q}{q-1}\frac{\Gamma_q(x)\Gamma_q(w)}{\Gamma_q(x+w)},$$

où $\Re x > 0$, $\Re w > 0$. Cette dernière égalité, dont le seconde membre est clairement un q-analogue de la fonction Béta, ressemble fort à celle-ci :

$$B(x,w) = \int_0^\infty t^x (1+t)^{-x-w} \frac{dt}{t}.$$

En effet, cela consiste à substituer les couples suivants de fonctions q-analogues (*cf* [Zh3], §4) :

$$t^x \mapsto \frac{\Theta_q(t)}{\Theta_q(q^x t)} = \frac{(-t;q)_\infty(-q/t;q)_\infty}{(-q^x t;q)_\infty(-q/(q^x t);q)_\infty},$$
$$(1+t)^{x+w} \mapsto \frac{(-q^{x+w}t;q)_\infty}{(-t;q)_\infty}.$$

Revenons maintenant à la définition de la fonction Gamma d'Euler :

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^x e^{-t} \frac{dt}{t}, \quad \Re x > 0.$$

Du fait que la fonction $\exp_q(z)$ donnée par

$$\exp_q(z) = 1/((1-q)z;q)_\infty$$

est un q-analogue de la fonction exponentielle e^z (*cf* [GR], page 9), nous nous proposons de considérer le q-analogue suivant de Γ :

$$g_q(x) = \int_0^\infty \frac{\Theta_q(t)}{\Theta_q(q^x t)} \exp_q(-t) \frac{dt}{t}, \quad \Re x > 0,\ |\Im(x)| < \pi/|\ln q|.$$

La fonction $g_q(x)$ se prolonge en une fonction, notée encore $g_q(x)$, analytique sur le demi-plan $\{\Re x > 0\}$ et telle que l'on ait :

$$g_q(x) = \frac{(1-q)^x \Theta_q(\frac{1}{q-1})}{\Gamma_q(1-x)\Theta_q(q^x/(q-1))} \Big(-\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{2\pi \sin(2\pi \frac{\ln(1-q)}{\ln q})}{\lambda_q^n - 2\cos(2\pi\frac{\ln(1-q)}{\ln q}) + \lambda_q^{-n}} + $$
$$+ \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{2\pi\sin(2\pi x)}{\lambda_q^n - 2\cos(2\pi x) + \lambda_q^{-n}} \Big)$$

où $\lambda_q = e^{4\pi^2/\ln q}$.

En outre, on a :

$$\lim_{q\to 1, q<1} g_q(x) = \Gamma(x),$$

la convergence étant uniforme sur tout compact du demi-plan $\{\Re x > 0\}$.

Posons $u = q^x$, $G_q(u) = g_q(x)$; nous trouvons que :

La fonction $G_q(u)$ est la somme d'une série de Laurent solution formelle de l'équation fonctionnelle

$$y(qu) = \frac{1-u}{1-q}\ y(u),$$

somme déterminée par la méthode de sommation q-exponentielle au moyen de la fonction thêta de Jacobi (cf §5.1).

La série de Laurent évoquée dans l'énoncé précédent peut être calculée explicitement ; elle est composée d'une série entière convergente en $u = 0$ et d'une série entière de variable $1/u$ qui est soit un polynôme soit de rayon de convergence nul ; *cf* [Zh3], §6.

Nota – Terminons cette partie par une notice chronologique. Dans la Thèse [Sa], J. Sauloy a utilisé, à la place de la q-exponentielle e_q, la fonction θ_q pour sa théorie de Galois q-différentielle et pour ses théorèmes concernant la confluence d'une équation aux q-différences en une équation différentielle. Nous étions alors amené à savoir s'il serait possible d'étudier la sommation des séries q-Gevrey à l'aide de la fonction θ_q. Nous avons commencé, dans [Zh3], ce volet de q-analyse asymptotique en examinant l'équation aux q-différences vérifiée par la fonction q-Gamma de Jackson ; le travail [Zh4], exposé dans les §5.1-2 précédents, a été effectué après la redaction de [Zh3].

6. Quelques dernières remarques

6.1 De la suite $(q^{n(n-1)/2})_{n\geq 0}$ à $(n!_q)_{n\geq 0}$ –

Nous avons employé jusqu'à ici le q-analogue $(q^{n(n-1)/2})_{n\geq 0}$ de la suite $(n!)_{n\geq 0}$. En termes d'opérateurs fonctionnels, cette anologie réside dans une idée de faire correspondre σ_q à l'opérateur différentiel $x\frac{d}{dx}$, car :

$$\sigma_q^n x^n = q^{n(n-1)/2} x^n, \quad (x\frac{d}{dx})^n x^n = n! x^n.$$

Posons :

$$\delta_q = \frac{\sigma_q - 1}{q-1} \quad (q > 1);$$

on a :

$$(\delta_q)^n x^n = n!_q x^n, \quad n!_q = \frac{(q^n - 1)(q^{n-1} - 1)\dots(q-1)}{(q-1)^n}$$

(nous avons pris la notation $n!_q$ (et non $n_q!$) dans un article de Y. André ; *cf* [An]). J.P. Ramis et Y. André nous ont posé la question suivante : Est-ce que la suite $(n!_q)_{n\geq 0}$ aboutit à une sommation des séries q-Gevrey *équivalente* à notre Gq-sommation ? Notre réponse est donnée dans l'énoncé suivant.

Etant donnée $\sum_{n\geq 0} \alpha_n x^n$ une série entière, si sa transformée de q-Borel formelle d'ordre un, $\sum_{n\geq 0} \alpha_n q^{-n(n-1)/2}\xi^n$, définit un germe de fonction analytique en $\xi = 0$, prolongeable en une fonction analytique ayant à l'infini une croissance q-exponentielle d'ordre un dans un secteur, alors il en est de même de la transformée $\sum_{n\geq 0} \frac{\alpha_n}{n!_q}\xi^n$, et vice versa.

Ce résultat, non publié encore, objet d'un exposé à La Rochelle en Mai 1999, peut être démontré à l'aide de la représentation intégrale de type formule de Cauchy du produit de

Hadamard de deux germes de fonctions analytiques. Soit, en effet, φ la fonction somme de la première transformée $\sum_{n\geq 0} \alpha_n q^{-n(n-1)/2}\xi^n$ et γ la fonction *de pont* définie par

$$\gamma(\xi) = \sum_{n\geq 0} q^{n(n-1)/2}\ \frac{1}{n!_q}\ \xi^n.$$

Puisque γ vérifie une équation aux q-différences qui permet de lire le lieu des pôles de γ ainsi que sa croissance à l'infini, on obtiendra ce qu'il faut pour la seconde transformée. La réciproque se démontre d'une manière identique.

En conclusion, la méthode de Gq-sommation a une variante relevant de la suite q-Gamma $(n!_q)_{n\geq 0}$. Cette remarque pourrait entraîner des conséquences importantes sur la théorie des équations aux q-différences, notamment, sur le problème de la confluence d'une équation aux q-différences en une équation différentielle. Cela vaut dire qu'une troisième transformation de q-Laplace, qui utilise la fonction entière q-exponentielle suivante :

$$\mathrm{Exp}_q x = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!_q}\ x^n,$$

mériterait une attention particulière. Ceci est en cours d'étude.

6.2 Sommation et représentation intégrale –

La Gq-sommation et ses variantes relatives à θ_q ou à Exp_q permettent de représenter, sous une forme intégrale, une fonction analytique satisfaisant à une relation fonctionnelle aux q-différences. On pourrait en déduire une bonne liste de formules, classiques ou non, sur les fonctions q-spéciales.

A titre d'exemple, citons ici un point de vue sur les fonctions q-Bessel de Jackson.

Dans le reste du paragraphe, **nous supposerons que** $0 < q < 1$.

Introduisons d'abord quelques notations générales. Soit r un entier positif ou nul ; à tout r-uplet $(a_1, ..., a_r)$ de nombres complexes associons pour tout entier $n \in [0, +\infty]$:

$$(a_1, ..., a_r; q)_n = \prod_{\ell=1}^{r} (1 - a_\ell)...(1 - a_\ell\ q^{n-1})$$

avec la convention $(a_1, ..., a_r; q)_n = 1$ si $rn = 0$. Soit, en plus, $(b_1, ..., b_s)$ un s-uplet tel que $b_\ell \in q^{-\mathbb{N}}$, $\ell = 1$, ..., s ; posons

$${}_r\phi_s(a_1, ..., a_r; b_1, ..., b_s; x) = \sum_{n\geq 0} \frac{(a_1, ..., a_r; q)_n}{(q, b_1, ..., b_s; q)_n} q^{(s+1-r)n(n-1)/2} x^n;$$

c'est un analogue basique de la notation classique ${}_rF_s(...)$.

Comme dans [Is1] et [Is2], notons $J_\nu^{(1)}(x, q)$ et $J_\nu^{(2)}(x, q)$ les fonctions q-Bessel introduites par F.H. Jackson :

$$J_\nu^{(1)}(x; q) = \frac{(q^{\nu+1}; q)_\infty}{(q; q)_\infty}\ \big(\frac{x}{2}\big)^\nu\ {}_2\phi_1(0, 0; q^{\nu+1}; q, -\frac{x^2}{4}),$$
$$J_\nu^{(2)}(x; q) = \frac{(q^{\nu+1}; q)_\infty}{(q; q)_\infty}\ \big(\frac{x}{2}\big)^\nu\ {}_0\phi_1(—; q^{\nu+1}; q, -\frac{x^2 q^{\nu+1}}{4}),$$

où ν est un paramètre dans $\mathbb{R} \setminus \{-1,-2,-3,...\}$. La fonction $J_\nu^{(1)}(x;q)$ satisfait à l'équation ($p=\sqrt{q}$)

$$\big\{\sigma_q - (q^{\nu/2}+q^{-\nu/2})\sigma_p + (1+\frac{x^2}{4})\big\}y(x) = 0$$

tandis que l'autre est solution de l'équation

$$\big\{(1+q\frac{x^2}{4})\sigma_q - (q^{\nu/2}+q^{-\nu/2})\sigma_p + 1\big\}y(x) = 0.$$

Deux transferts sont à noter entre ces deux équations : on peut passer de la première à la seconde soit avec la substitution $y \to (-x^2/4;q)_\infty\ y$ soit par la transformation de q-Borel-Laplace. On en déduit :

$${}_0\phi_1(—;q^{\nu+1};q,-\frac{x^2q^{1/2}}{4}) = \mathcal{L}_{p;1}\ \big(\frac{{}_0\phi_1(—;q^{\nu+1};q,-x^2q^{\nu+1}/4)}{(-x^2/4;q)_\infty}\big)$$

où $\mathcal{L}_{p;1}$ est l'opérateur linéaire de $\mathbb{C}[[x]]$ qui envoie x^n en $p^{n(n-1)/2}x^n$.

En exprimant l'opérateur $\mathcal{L}_{p;1}$ en termes d'une intégrale de contour, et par le théorème des résidus, on trouve :

$$J_\nu^{(2)}(x;q) = \frac{1}{2\ (q,q;q)_\infty}\ \big(\frac{x}{2}\big)^\nu\ \big(\theta_p(-2p^{-\nu+1/2}i/x)\ h(1/x) + \theta_p(2p^{-\nu+1/2}i/x)\ h(-1/x)\big),$$

où $\theta_p(u) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} p^{n(n-1)/2}u^n$ et $h(t)$ est une série entière ayant 1/2 pour rayon de convergence et 1 pour valeur en l'origine. Cette expression de $J_\nu^{(2)}(x;q)$ implique que ses grands zéros sont proches des grandes racines de l'équation

$$\theta_p(-2p^{-\nu+1/2}i/x) = -\theta_p(2p^{-\nu+1/2}i/x).$$

Pour plus de détails, voir [Zh5].

6.3 q-Stokes, q-Galois $\cdots$

Une équations aux q-différences linéaire peut être *uniquement* déterminée à partir de la donnée d'un système fondamental de ses solutions formelles ; cette remarque permet d'établir une classification formelle de ces équations. Une classification analytique nécessiterait de saisir les obstacles des solutions formelles à la convergence ; autrement dit, on pourrait espérer que les multiplicateurs de Stokes, dans la Gq-sommation comme dans ses versions combinatoires (avec θ_q et Exp_q), seraient des q-invariants analytiques naturels.

Enfin, un prolongement de nos résultats pourrait s'orienter vers une théorie de Galois aux q-différences.

Références

[Ad] C.R. Adams, Linear q-Difference Equations, *Bull. A. M. S.*, 361-382 (1931).

[Al] D.S. Alexander, *A History of Complex Dynamics – From Schröder to Fatou and Julia*, Vol. E 24 "Aspect of Mathematics", Vieweg, 1994.

[An] Y. André, Séries Gevrey de type arithmétique, I: théorèmes de pureté et de dualité ; II: transcendance sans transcendance, *preprint*, 1997.

[As1] R. Askey, The q-gamma and q-beta functions, *Appl. Anal.* 8 , 125-141 (1978).

[As2] R. Askey, Ramanujan's extension of the gamma and beta functions, *Amer. Math. Monthly*, 87, 346-359 (1980).

[Ba] W. Balser, A different characterization of multisummable power series, *Analysis* 12, 57-65 (1992).

[BBRS] W. Balser, B.J.L. Braaksma, J.P. Ramis et Y. Sibuya, Multisummability of formal power series solutions of linear ordinary differential equations, *Asymptotic Analysis* 5, 27-45 (1991).

[Be] C. Berg, Moment problems and polynomial approximation, *Ann. Fac. Sci. Toulouse*, VI. Ser., Math. Spec. Iss., 9-32 (1996).

[Bé] J.P. Bézivin, Sur les équations fonctionnelles aux q-différences, *Aequationes Math.* 43, 159-176 (1993).

[Bi] G.D. Birkhoff, The Generalized Riemann Problem for Linear Differential Equations and the Allied Problems for Linear Difference and q-Difference Equations, *Proc. Am. Acad.*, 49, 521-568 (1913).

[Bi2] G.D. Birkhoff, Singular points of ordinary linear differential equations, *Trans. Amer. Math. Soc.* 10, 436-470 (1909).

[Bi3] G.D. Birkhoff, Déformations analytiques et fonctions auto-équivalentes, *Annales Inst. H. Poincaré* 10, 51-122 (1939).

[BG] G.D. Birkhoff et P.E. Güenther, Note on a canonical form from the linear q-difference system, *Proceeding of the National Academy of Sciences* 27, 218-222 (1941).

[CNP] B. Candelpergher, J.C. Nosmas et F. Pham, Approche de la résurgence, Hermann, 1993.

[Ca] R.D. Carmichael, The General Theory of Linear q-Difference Equations, *Am. Jour. Math.*, 34, 146-168 (1912).

[De] E. Delabaere, Résurgence de la fonction Gamma d'Euler, *Manuscrit*, 1995.

[Ec] J. Ecalle, *Introduction aux fonctions analysables et preuve constructive de la conjecture de Dulac*, Hermann, Paris, 1992

[GR] G. Gasper et M. Rahman, *Basic hypergeometric series*, Encycl. Math. Appl., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.

[In] E.L. Ince, *Ordinary differential equations*, Dover publications, Inc., 1956.

[Is1] M.E.H. Ismail, The basic Bessel functions and polynomials,*SIAM J. Math. Anal.* 12, 454-468 (1981).

[Is2] M.E.H. Ismail, The zeros of basic Bessel functions, the functions J(nu+ax)(x), and associated orthogonal polynomials, *J. Math. Anal. Appl.* 86, 1-19 (1982).

[Kn] K. Knopp, Über das Eulersche Summierungsverfahren, *Math. Zeits.* 15, 226-253 (1922).

[Li] J.E. Littlewood, On the asymptotic approximation to integral functions of zero order, *Proc. London Math. Soc.*, Serie 2, no 5, 361-410 (1907).

[Ma0] B. Malgrange, Sur les points singuliers des équations différentielles, *L'enseignement mathématique* 20, no 1-2, 147-176 (1974)

[Ma1] B. Malgrange, Sommation des séries divergentes, *Expositiones Mathematicae*, 13, no 2-3, 163-222 (1995).

[Ma2] B. Malgrange, Sur le théorème de Maillet, *Asymptotic Analysis* 2, 1-4 (1989).

[MR1] B. Malgrange et J.P. Ramis, Fonctions multisommables, *Ann. Inst. Fourier*, 42, 353-368 (1992).

[MR2] J. Martinet et J. P. Ramis, Elementary acceleration and multisummability I, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, Vol. 54, no 4, 331-401 (1991).

[Na] F. Naegelé (F. Marotte), Théorèmes d'indices pour les équations q-différences-différentielles, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 317, série I, 579-582 (1993).

[Ol] F.W. Olver, *Asymptotics and Special Functions*, Academic Press, 1974.

[Po] H. Poincaré, *Am. J. Math.* 7 (1885), p. 217 ; *Acta Math.* 8 (1886), p. 295.

[Ra1] J.P. Ramis, Les séries k-sommables et leurs applications, *Complex Analysis, Microlocal Calculus and Relativistic Quantum Theory, Lecture Notes in Physics*, 126, 178-199 (1980).

[Ra2] J.P. Ramis, *Séries divergentes et théories asymptotiques*, *Panoramas et synthèses*, Supplément au Bulletin de la S.M.F. 121, 1993.

[Ra3] J.P. Ramis, About the growth of entire functions solutions of linear algebraic q-difference equations, *Annales de la Fac. de Toulouse*, Série 6, Vol. I, no 1, 53-94 (1992).

[RS] J.P. Ramis et Y. Sibuya, Hukuhara domains and fundamental existence and uniqueness theorems for asymptotic solutions of Gevrey type, *Asymptotic Anal.* 2, No.1, 39-94 (1989)

[Re] R. Remmert, Wielandt's Theorem About the Γ-function, *Amer. Math. Monthly*, 103, 214-220 (1996).

[Si] Y. Sibuya, *Linear differential equations in the complex domain : problems of analytic continuation*, Translations of Mathematical Monographs, vol.82, AMS, 1990.

[Sa] J. Sauloy, Théorie de Galois des équations aux q-différences fuchsiennes, *Thèse de Toulouse*, 1999.

[Tr] W.J. Trjitzinsky, Analytic Theory of Linear q-Difference Equations, *Acta Mathematica*, 61, 1-38 (1933).

[Wa0] R. Wallisser, Über ganze Functionen, die in einer geometrischen Folge ganze Werte annehmen, *Monatshefte für Math.*, 100, 329-335 (1985).

[Wa1] W. Wasow, *Asymptotic expansions for ordinary differential equations*, Interscience, New-York, 1965.

[Wa2] G.N. Watson, A Theory of Asymptotics Series, Philosophical, *Trans. R. Soc. London*, Ser.A, Vol. CCXI, 279-313 (1911).

[WW] E.T. Whittaker et G.N. Watson, *A Course of Modern Analysis*, Cambridge Univ. Press, 1927.

[Wo] R. Wong, *Asymptotic approximations of integrals*, Academic Press, Inc., 1989.

Seconde partie

Articles

Sur un théorème du type de Maillet-Malgrange pour les équations q-différences-différentielles*

Résumé. On décrit la croissance des coefficients des séries entières solutions formelles d'une équation holomorphe mélangeant opérateurs différentiels et opérateurs aux q-différences. Suivant une idée de B. Malgrange [4], nous établissons une version généralisée du théorème de Maillet-Malgrange à l'aide du théorème des fonctions implicites.

Abstract – The growth of the coefficients of a formal power series satisfying a holomorphic q-difference-differential equation is described, where differential and q-difference operators are mixed. Following an idea of B. Malgrange [4] and using implicit function theorem, a generalization of the Maillet-Malgrange theorem is established.

(1) Le théorème de Maillet décrit le phénomène suivant : toute série entière solution formelle d'une équation différentielle algébrique à coefficients analytiques est convergente ou Gevrey. Une version plus générale et plus précise est donnée par B. Malgrange [4] ; pour la bibliographie correspondante, consulter l'article [4]. L'objectif de notre article est d'établir un résultat similaire pour les équations q-différences-différentielles.

Soit q un nombre complexe tel que $|q| > 1$. Pour $j \in \mathbb{Z}$, on note σ^j l'opérateur aux q-différences défini par $\sigma^j f(x) = f(q^j x)$. Soit $\delta = xd/dx$; on a $\delta\sigma = \sigma\delta$.

Soit m, n des entiers positifs ou nuls et soit $F(x, y_{ij})$ une fonction analytique au voisinage de $0 \in \mathbb{C}^{(m+1)(n+1)+1}$, où $0 \leq i \leq m$, $0 \leq j \leq n$. Pour toute série entière $\varphi \in \mathbb{C}[[x]]$ sans terme constant, on pose $F(x, \Phi) = F(x, \delta^i\sigma^j\varphi)$. On désigne par $L_{F,\varphi}$, ou simplement par L_φ, l'opérateur q-différences-différentiel linéarisé de F le long de φ, défini par $L_\varphi = \sum_{i,j} \frac{\partial F}{\partial y_{ij}}(x, \Phi)\delta^i\sigma^j \in \mathbb{C}[[x]][\delta, \sigma]$. Pour chaque entier $j \in [0, n]$, on pose $\ell_j = \inf_{0\leq i\leq m} \omega[\frac{\partial F}{\partial y_{ij}}(x, \Phi)] \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, la lettre ω désignant la valuation d'une série entière en $x = 0$. On définit le polygone de Newton de L_φ relatif à σ, noté $\mathcal{N}_q(L_\varphi)$, comme étant l'enveloppe convexe engendrée dans $[0, n] \times [0, \infty[$ par le point d'affixe $(0, \inf_{0\leq j\leq n} \ell_j)$ et les demi-droites ascendantes partant des points (j, ℓ_j), j variant de 0 à n. A chaque segment repéré par une pente $r \in]0, \infty]$ de $\mathcal{N}_q(L_\varphi)$ (à supposer qu'il en existe) est associé l'opérateur différentiel $D_r = \sum_{p,i} x^p\delta^i$ où la somme est étendue aux couples (p, i) pour lesquels il existe j avec : $\ell_j = \omega[\frac{\partial F}{\partial y_{ij}}(x, \Phi)]$ d'une part et (j, p) appartient au segement d'autre part (*cf* [5]). Le polygone de Newton associé à un opérateur différentiel linéaire D sera noté $\mathcal{N}(D)$.

Etant donnés s, μ des réels positifs ou nuls, on note $\mathbb{C}[[x]]_{q,s;\mu}$ l'espace des séries entières $\varphi = \sum_{p\geq 0} a_p x^p$ telles que $\sum_{p\geq 0} a_p (p!)^{-\mu}|q|^{-sp(p+1)/2}x^p \in \mathbb{C}\{x\}$. On a $\mathbb{C}[[x]]_{q,0;0} = \mathbb{C}\{x\}$, $\mathbb{C}[[x]]_{q,0;\mu} = \mathbb{C}[[x]]_\mu$ et $\mathbb{C}[[x]]_{q,s;0} = \mathbb{C}[[x]]_{q,s}$, ces deux derniers étant respectivement l'espace des séries Gevrey d'ordre μ et l'espace des séries q-Gevrey d'ordre s.

Ceci posé, on est en disposition d'énoncer le résultat central de notre article.

Théorème. *Soit F une fonction analytique en $0 \in \mathbb{C}^{(m+1)(n+1)+1}$ et soit φ une série entière telle que $\varphi(0) = 0$ et $F(x, \Phi) = 0$. On suppose qu'il existe un entier $i \in [0, m]$ avec*

* L'article est publié dans *Asymptotic Analysis* 17 (1998) 309–314.

AMS (1980) subject classification: Primary 39B10.

$\frac{\partial F}{\partial y_{in}}(x,\Phi)\neq 0$, *i.e* $\ell_n<\infty$. *Soit* $r\in]0,\infty]$ *(resp.* $\rho\in]0,\infty]$*) la plus petite pente strictement positive de* $\mathcal{N}_q(L_\varphi)$ *(resp.* $\mathcal{N}(D_r)$*). Alors on a* $\varphi\in\mathbb{C}[[x]]_{q,1/r;1/\rho}$ *(ici, on convient que* $1/\infty=0$*).*

Ce résultat est une généralisation du théorème 1.2 de [4] ; sa preuve peut être obtenue par une adaptation directe du raisonnement de B. Malgrange [4]. L'idée est la suivante : on choisit un entier k convenablement grand ; on note φ_k (resp. $x^k\psi$, avec $\psi(0)=0$) la somme partielle (resp. le reste) d'ordre k de φ, l'étude de la convergence de φ équivalant à celle de ψ. A l'aide de la formule de Taylor de $F(x,Y)$ en $Y=(\delta^i\sigma^j\varphi_k)$, on obtient une équation fonctionnelle en ψ, à laquelle on peut appliquer le théorème des fonctions implicites sur un espace de Banach muni d'une certaine norme Gevrey convenable des séries entières.

Afin d'alléger l'exposition, nous ne démontrerons notre théorème que dans le cas où $\mathcal{N}_q(L_\varphi)$ a des pentes finies strictement positives ; voir le paragraphe 3. Nous laissons au lecteur le soin de faire adapter la preuve pour le cas restant.

(2) Nous faisons ici quelques commentaires. Regardons d'abord une variante de notre théorème en remplaçant l'hypothèse '$\ell_n<\infty$' par 'F non identiquement nulle'.

Corollaire. *Soit* $F(x,y_{ij})$ *une fonction analytique au voisinage de* $0\in\mathbb{C}^{(m+1)(n+1)+1}$*, non identiquement nulle. Soit* φ *une série entière sans terme constant. Si* $F(x,\Phi)=0$*, alors il existe* $s\geq 0$*,* $\mu\geq 0$ *tels que* $\varphi\in\mathbb{C}[[x]]_{q,s;\mu}$*.*

En effet, s'il existe une paire d'entiers $(p,i)\in[1,\infty[\times[0,m]$ avec $\frac{\partial^p F}{\partial y_{in}^p}(x,\Phi)\neq 0$, on pose p' le plus petit de ces p, et le couple d'ordres Gevrey (s,μ) de φ résulte du théorème appliqué à la fonction $\frac{\partial^{p'-1}F}{\partial y_{in}^{p'-1}}$. Sinon, on a $\frac{\partial^p F}{\partial y_{in}^p}(x,\Phi)=0$ pour tout (p,i) ; on désigne par $\check{\Phi}_n$ la série vectorielle déduite de Φ en supprimant la série $(\delta^i\sigma^n\varphi)_{0\leq i\leq m}$. Utilisant la formule de Taylor de l'application $Y\mapsto F(x,\check{\Phi}_n,Y)$ au point $Y=(\delta^i\sigma^n\varphi)$, on en déduit que toute série entière vectorielle sans terme constant $\Psi\in(\mathbb{C}[[x]])^{m+1}$ vérifie l'équation $F(x,\check{\Phi}_n,\Psi)=0$; en particulier, on a $F(x,\check{\Phi}_n,(\lambda_i x))=0$ pour tout $(\lambda_i)\in\mathbb{C}^{m+1}$. Puisque F n'est pas identiquement nulle, on peut choisir des $\lambda_i\in\mathbb{C}$ tels que $F(x,\check{Y}_n,(\lambda_i x))\neq 0$ (*cf* le (ii) de la Section 2 de [4]), où $\check{Y}_n=(y_{ij})_{\substack{0\leq i\leq m\\ 0\leq j<n}}$. On considère la fonction $G(x,\check{Y}_n):=F(x,\check{Y}_n,(\lambda_i x))$ et on recommence le raisonnement avec l'équation $G(x,\Phi)=0$, où la fonction G est holomorphe en $0\in\mathbb{C}^{(m+1)n+1}$ et non identiquement nulle. Quand $n=0$, on est ramené au cas du théorème de Maillet-Malgrange. □

F. Naegelé [5] a obtenu des théorèmes d'indices pour les équations q-différences-différentielles linéaires analytiques dans des espaces de série entière similaires à notre $\mathbb{C}[[x]]_{q,s;\mu}$. On en déduit ainsi le double caractère Gevrey de la solution formelle de ses équations. En ce qui concerne les équations aux q-différences analytiques, notons le résultat suivant :

Remarque. *Toute série entière solution formelle d'une équation aux* q*-différences, linéaire ou non, à coefficients analytiques, est soit convergente soit* q*-Gevrey d'ordre* $s>0$*. De plus, la valeur de* s *peut être estimée en fonction du polygone de Newton de l'opérateur aux* q*-différences linéarisé correspondant.* □

Le résultat qui précède est connu dans le cas linéaire, grâce aux théorèmes d'indices de J.P. Bézivin [2], et nos récents travaux [6] montrent que, dans ce cas, φ est Gq-multisommable. Noter également que cette fois notre résultat (dans le cas non linéaire) contient comme cas particuliers certains résultats classiques en théorie des systèmes dynamiques complexes et en théorie des équations fonctionnelles (*cf* [1, Chapitre 3, 4], [3, Chapitre II]). Soit, par exemple, f une fonction analytique en 0 telle que $f(0)=0$ et $f'(0)=q$; on pose $F(x,y_0,y_1)=f(y_0)-y_1$. La relation fonctionnelle $\varphi(qx)=f(\varphi(x))$ ($\varphi(0)=0$, $\varphi'(0)=1$) s'identifie à l'équation $F(x,\varphi,\sigma\varphi)=0$, et $L_\varphi=-\sigma+f'(\varphi)$, $\mathcal{N}_q(L_\varphi)=[0,1]\times[0,\infty[$. De la remarque précédente, on déduit la convergence de φ ; ceci prouve le théorème de Königs.

Le cas où $0<|q|<1$ se traiterait de façon analogue. Si $|q|=1$, le fameux phénomène des petits diviseurs pourrait se produire naturellement.

(3) Démontrons le théorème de l'article dans le cas où $r<\infty$. On commence par la formule de Taylor de F à l'ordre 2 avec reste intégral (*cf* [4]) :

$$F(x,Y+Z)=F(x,Y)+\sum_{i,j}\frac{\partial F}{\partial y_{ij}}(x,Y)z_{ij}+\sum_{i,j;i',j'}H_{ij,i'j'}(x,Y,Z)z_{ij}z_{i'j'} \tag{3.1}$$

où $Y=(y_{ij})$, $Z=(z_{ij})$, $0\le i,\ i'\le m$, $0\le j,\ j'\le n$, et les $H_{ij,i'j'}$ sont des fonctions analytiques en $0\in\mathbb{C}^{2(m+1)(n+1)+1}$.

Pour tout entier $k\ge1$, on désigne par φ_k la somme partielle d'ordre k de φ ; on pose $\varphi=\varphi_k+x^k\psi$, avec $\psi(0)=0$. La formule (3.1) avec $Y=\Phi_k:=(\delta^i\sigma^j\varphi_k)$ et $Z=x^k\Psi:=x^k((\delta+k)^i(q^k\sigma)^j\psi)$ donne celle-ci :

$$\begin{aligned}0=F(x,\Phi_k)+&x^k\sum_{i,j}\frac{\partial F}{\partial y_{ij}}(x,\Phi_k)(\delta+k)^i(q^k\sigma)^j\psi+\\ &x^{2k}\sum_{i,j;i',j'}H_{ij,i'j'}(x,\Phi_k,x^k\Psi)((\delta+k)^i(q^k\sigma)^j\psi)((\delta+k)^{i'}(q^k\sigma)^{j'}\psi).\end{aligned} \tag{3.2}$$

On pose $\ell=\inf_{0\le j\le n}\ell_j$. Soit n' le maximum des abcisses des points situés au segment horizontal de $\mathcal{N}_q(L_\varphi)$; on a $\ell=\ell_{n'}$, $n'<n$. On désigne par m' le maximum des abcisses des points situés sur le côté horizontal de $\mathcal{N}(D_r)$. Ceci étant, on a, pour tout terme $x^p\delta^i\sigma^j$ figurant dans l'opérateur L_φ :

(i) $p\ge\ell_j\ge\ell$ si $0\le j\le n'$;

(ii) $p\ge\sup(\ell+r(j-n'),\ell+\rho(i-m'))$ si (j,p) appartient à l'arête de pente r de $\mathcal{N}_q(L_\varphi)$, où l'on convient que $\rho\times0=0$ quand $\rho=\infty$;

(iii) $p>\ell+r(j-n')$ si $j>n'$ et (j,p) n'appartient pas à l'arête de pente r de $\mathcal{N}_q(L_\varphi)$.

Soit $\alpha_{ij}x^\ell$ la partie homogène de degré ℓ de $\frac{\partial F}{\partial y_{ij}}(x,\Phi)$; on a $\alpha_{m'n'}\ne0$. Posons $\bar{L}(\zeta,\xi)=\sum_{i,j}\alpha_{ij}\zeta^i\xi^j$; on a $\bar{L}(\delta,\sigma)x^k=x^k\bar{L}(k,q^k)$ pour tout entier $k\ge0$. On choisit un entier $k_1\ge0$ tel que, pour tout entier $p\ge k_1$, $\bar{L}(p,q^p)\ne0$; ceci est possible car le module de la fonction $t\mapsto\bar{L}(t,q^t)$ tend vers l'infini avec l'entier t.

On choisit un entier k_2 avec $k_2\ge\sup(r(n-n'),\rho(m-m'))$. Par la formule de Taylor, on vérifie aisément que, si $k\ge\ell+k_2$, la plus petite pente positive du polygone de Newton $\mathcal{N}_q(L_{\varphi_k})$ est égale à r, celle de $\mathcal{N}_q(L_\varphi)$, et qu'il en est de même pour la valeur de ρ en ce qui concerne D_r. Avec les propriétés (i), (ii) et (iii) mentionnées en haut, on en déduit que, si l'on pose $x^{-\ell}L_{\varphi_k}=\bar{L}(\delta,\sigma)+L'(x,\delta,\sigma)$ avec $k\ge k_2+\ell$, les termes $x^p\delta^i\sigma^j$ figurant dans $L'(x,\delta,\sigma)$ vérifient les conditions suivantes :

(a) $p\ge1$ si $0\le j\le n'$;

(b) $p \geq \sup(1, r(j-n'), \rho(i-m'))$ si (j,p) appartient à l'arête de pente r de $\mathcal{N}_q(L_\varphi)$;

(c) $p > r(j-n')$ si $j > n'$ et (j,p) n'appartient pas à l'arête de pente r de $\mathcal{N}_q(L_\varphi)$.

On pose $k = \sup(k_1, 2k_2 + \ell + 1)$. On considère l'équation (3.2) avec cette valeur choisie de k. On remarque que $F(x, \Phi_k)$ est d'ordre $\geq k + l + 1$; en divisant (3.2) par x^{k+l}, on trouve que ψ est solution de l'équation

$$\bar{L}(\delta + k, q^k\sigma)\psi + x\tilde{L}(x, \delta, \sigma)\psi + xM(x, x^{k_2}\delta^i\sigma^j\psi) = 0 \tag{3.3}$$

où $\tilde{L}(x, \delta, \sigma) = x^{-1}L'(x, \delta + k, q^k\sigma)$, M est une fonction analytique en $0 \in \mathbb{C}^{(m+1)(n+1)+1}$.

La condition $\bar{L}(p, q^p) \neq 0$ pour tout $p \geq k$ entraîne que $\bar{L}(\delta + k, q^k\sigma)$ est un automorphisme de l'espace $\mathbb{C}[[x]]$. On en déduit que l'équation (3.3) admet pour solution formelle une et une seule série entière ψ, sans terme constant. Il reste à voir la convergence de cette série et ceci se fait avec la méthode de dilatation.

Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, on pose $\tilde{L}_\lambda(x, \delta, \sigma) = \tilde{L}(\lambda x, \delta, \sigma)$ et $M_\lambda(x, Y) = M(\lambda x, \lambda^{k_2}Y)$. On considère l'équation suivante déduite de (3.3) : $A(\lambda, \psi) = 0$ avec

$$A(\lambda, \psi) = \bar{L}(\delta + k, q^k\sigma)\psi + \lambda x\tilde{L}_\lambda(x, \delta, \sigma)\psi + \lambda xM_\lambda(x, x^{k_2}\delta^i\sigma^j\psi).$$

Soit $s = 1/r$ et $\mu = 1/\rho$; pour v, $\nu \geq 0$, on note $\mathcal{H}_{v,\nu}$ l'espace de Banach des séries entières sans terme constant $f := \sum_{p\geq 1} a_p x^p$ avec $\|f\|_{v,\nu} < \infty$, où l'on a posé $\|f\|_{v,\nu} := \sum_{p\geq 1} |a_p|(p!)^{-\mu}p^\nu|q|^{-sp(p+1)/2+vp}$ comme étant la norme de f. Pour tout triplet (p,i,j) vérifiant l'une des conditions (a), (b) et (c) précédentes ou tel que, p étant nul, le monôme $\delta^i\sigma^j$ figure dans l'opérateur $\bar{L}(\delta + k, q^k\sigma)$, l'application linéaire $x^p\delta^i\sigma^j : \mathcal{H}_{n',m'} \to \mathcal{H}_{0,0}$ est bien définie et admet pour norme :

$$\|x^p\delta^i\sigma^j\| \leq |q|^{-sp(p+1)/2} \sup_{t\geq 1} |q|^{(j-n'-sp)t}t^{i-m'-\mu p} < \infty,$$

l'inégalité "$\leq$" résultant du fait que $((p+p')!)^{-\mu} \leq (p'!)^{-\mu}(p')^{-p\mu}$ pour tout $p' \in \mathbb{N}^*$. De plus, p_1, p_2 désignant deux entiers ≥ 1, on a $\|x^{p_1+p_2}\|_{0,0} \leq \|x^{p_1}\|_{0,0} \times \|x^{p_2}\|_{0,0}$; il en résulte que $\|fg\|_{0,0} \leq \|f\|_{0,0} \times \|g\|_{0,0}$ pour tout couple $(f,g) \in \mathcal{H}_{0,0} \times \mathcal{H}_{0,0}$. Par conséquent, $A(\lambda, \psi)$ est une application définie et analytique au voisinage de $(0,0) \in \mathbb{C} \times \mathcal{H}_{n',m'}$, à valeurs dans $\mathcal{H}_{0,0}$. Ayant $\alpha_{m'n'}\delta^{m'}\sigma^{n'}$ comme 'terme dominant', la dérivée partielle $\frac{\partial A}{\partial \psi}(0,0) = \bar{L}(\delta + k, q^k\sigma)$: $\mathcal{H}_{n',m'} \to \mathcal{H}_{0,0}$ est inversible ; ainsi il existe $\psi_\lambda \in \mathcal{H}_{n',m'}\{\lambda\}$ vérifiant $A(\lambda, \psi_\lambda) = 0$, d'après le théorème des fonctions implicites. Ceci achève la preuve du théorème dans le cas où le polygone de Newton $\mathcal{N}_q(L_\varphi)$ admet des pentes finies strictement positives. $\square$

L'auteur tient à remercier le rapporteur pour ses remarques.

Références biliographiques.

[1] D.S. Alexander, *A History of Complex Dynamics – From Schröder to Fatou and Julia*, Vol. E 24 "Aspect of Mathematics", Vieweg, 1994.

[2] J.P. Bézivin, Sur les équations fonctionnelles aux q-différences, *Aequationes Math.* 43 (1993), 159-176.

[3] L. Carleson et T.W. Gamelin, *Complex Dynamics*, Springer-Verlag, 1993.

[4] B. Malgrange, Sur le théorème de Maillet, *Asymptotic Analysis*, 2 (1989), 1-4.

[5] F. Naegelé, Théorèmes d'indices pour les équations q-différences-différentielles, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 317, série I (1993), 579-582.

[6] C. Zhang, *Développements asymptotiques q-Gevrey et séries Gq-sommables*, Prépublication, La Rochelle, 1998 ; avec F. Marotte (F. Naegelé), *Multisommabilité des séries entières solutions formelles d'une équation aux q-différences linéaire analytique*, Prépublication, La Rochelle, 1998.

Développements asymptotiques q-Gevrey et séries Gq-sommables*

Résumé : Nous donnons une version q-analogue de l'asymptotique Gevrey et de la sommabilité de Borel, dues respectivement à G. Watson et E. Borel et systématiquement developpées par J.-P. Ramis, Y. Sibuya, etc... depuis une quinzaine d'années. Le but de ces auteurs était l'étude des équations différentielles dans le champ complexe. De même notre but est l'étude des équations aux q-différences dans le champ complexe, dans la ligne de G.D. Birkhoff et W.J. Trjitzinsky.

Plus précisément, nous introduisons une nouvelle notion d'asymptoticité que nous appelons développements asymptotiques q-Gevrey d'ordre 1. Elle est adaptée à la classe des séries entières q-Gevrey d'ordre 1 étudiée par J.-P. Bézivin [Bé], J.-P. Ramis [Ra2], etc. Nous définissons ensuite la classe des séries entières Gq-sommables d'ordre 1 et nous en donnons une caractérisation en terme de transformations de Borel et de Laplace q-analogues. Nous montrons que toute série entière solution formelle d'une équation aux q-différences linéaire à coefficients analytiques est Gq-sommable d'ordre 1 lorsque le polygone de Newton de l'équation possède une seule pente égale à 1. Une généralisation de ce travail quand le polygone de Newton est arbitraire fera l'objet d'un article ultérieur [MZ].

q-GEVREY ASYMPTOTIC EXPANSIONS, Gq-SUMMABLE SERIES AND APPLICATIONS TO q-DIFFERENCE EQUATIONS

Abstract : We give a q-analogous version of the Gevrey asymptotics and of the Borel summability respectively due to Watson and E. Borel and developped during the last fifteen years by J.-P. Ramis, Y. Sibuya .... The goal of these authors was the study of ordinary differential equations in the complex plane. In the same manner, our goal is the study of q-difference equations in the complex plane along the way indicated by G.D. Birkhoff and W.J. Trjitzinsky.

More precisely, we introduce a new notion of asymptoticity which we call q-Gevrey asymptotic expansions of order 1. This notion is well adapted to the class of q-Gevrey power series of order 1 studied by J.-P. Bézivin [Bé], J.-P. Ramis [Ra2] and others. Next, we define the class of Gq-summable power series of order 1 and give a characterization in terms of q-Borel-Laplace transforms. We show that every power series satisfying a linear analytic q-difference equation is Gq-summable of order 1 when the associated Newton polygon has an unique slope equal to 1. We shall study a generalisation of this work when the Newton polygon is arbitrary in a later paper [MZ].

---

* L'article est publié dans *Ann. Inst. Fourier* 49-1, p. 227 – 261, 1999.

Mots clés : Développement asymptotique – Equation aux q-différences – Sommabilité – Transformation de q-Borel – Transformation de q-Laplace – Phénomène de Stokes – Estimations Gevrey.

Key Words : Asymptotic expansion – q-difference equation – Summability – q-Borel transformation – q-Laplace transformation – Stokes phenomenon – Gevrey estimates.

A.M.S. Classification : 30E99 – 33D10 – 39B22 – 40G99.

0. Introduction.

0.1 Soit q un nombre complexe non nul. On note σ_q un opérateur linéaire défini sur certains espaces de fonctions ou de séries entières par $(\sigma_q f)(x) = f(qx)$. Notons $\mathbb{C}\{x\}$ l'ensemble des séries entières admettant un rayon de convergence non nul, que l'on identifiera souvent à l'espace des germes de fonctions analytiques en $x = 0$ de $\mathbb{C}$. On considère l'ensemble des polynômes non commutatifs en σ_q à coefficients dans $\mathbb{C}\{x\}$ (avec la relation $\sigma_q x = qx\sigma_q$), noté $\mathbb{C}\{x\}[\sigma_q]$. On appelle *opérateur aux q-différences* tout élément de $\mathbb{C}\{x\}[\sigma_q]$. On appelle *équation aux q-différences linéaire analytique*, ou tout simplement *équation aux q-différences*, toute équation fonctionnelle de la forme $\Delta y = c$, où $\Delta \in \mathbb{C}\{x\}[\sigma_q]$, $c \in \mathbb{C}\{x\}$ et y est une fonction inconnue. On dit qu'une équation aux q-différences est *d'ordre n* si son opérateur correspondant est de la forme $a_n\sigma_q^n + ... + a_1\sigma_q + a_0 \in \mathbb{C}\{x\}[\sigma_q]$ avec $a_0 a_n \not\equiv 0$.

0.2 Du point de vue géométrique, on constate une grande différence entre les cas $|q| = 1$ et $|q| \neq 1$. Comme dans la plupart des études réalisées dans ce domaine, on suppose que $|q| \neq 1$. Afin d'alléger la présentation de l'exposé, on suppose, en plus, que q **est un réel strictement supérieur à 1**. Nous donnerons à la fin de l'article quelques commentaires permettant de lever cette dernière hypothèse restrictive ; voir *6.2.2*.

Bien entendu, il y a un rapport très étroit entre les équations aux q-différences et les équations aux différences finies. Nous le discuterons au paragraphe *6.2.1*.

0.3 Dans la synthèse [Ad] de C. R. Adams, on trouve une description de l'état général des connaissances sur les équations aux q-différences au début des années 30. C'est depuis cette époque que l'on sait former, pour une équation aux q-différences, un système fondamental de solutions formelles en utilisant des séries entières (ramifiées) et des fonctions du type $(\log x)^m x^\alpha e^{-\frac{\mu}{2}\log^2 x}$, où $m \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{C}$ et $\mu \in \mathbb{Q}$. Les nombres μ sont les pentes du *polygone de Newton* associé à l'équation en question, dont la définition est rappelée ci-dessous.

0.3.1 Soit $\Delta \in \mathbb{C}\{x\}[\sigma_q]$ un opérateur d'ordre n ($n \geq 1$). On écrit Δ comme étant une somme formelle des monômes $\alpha_{i,j}x^j\sigma_q^i$, i variant de 0 à n et $j \in \mathbb{N}$. Soit $[\Delta]$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ constitué des demi-droites verticales ascendantes partant des points (i, j) tels que $\alpha_{i,j} \neq 0$. Le polygone de Newton de Δ, que l'on notera $PN(\Delta)$, est défini comme étant l'enveloppe convexe de $[\Delta]$ dans $\mathbb{R}^2$. $PN(\Delta)$ sera aussi appelé le polygone de Newton associé à l'équation $\Delta y = c$ ($c \in \mathbb{C}\{x\}$ arbitraire).

0.3.2 Par définition, on dit que Δ admet une *singularité irrégulière* (resp. *singularité fuchsienne*) en 0 si $PN(\Delta)$ contient des pentes finies non nulles (resp. si $PN(\Delta)$ n'a pas de pente finie non nulle). Dans ce cas, on dit aussi que Δ est singulier irrégulier (resp. singulier régulier) en 0.

0.3.3 En 1912, R. D. Carmichael [Ca] a établi l'existence d'un système fondamental de solutions analytiques (ramifiées) pour une équation aux q-différences $\Delta y = 0$ quand l'opérateur Δ est singulier régulier en 0. Dans ce cas, toutes les séries entières (ramifiées) figurant dans la solution formelle sont convergentes.

0.4 Soixante ans après la publication de [Ad], J.-P. Bézivin [Bé] a découvert des théorèmes d'indices pour les opérateurs aux q-différences sur les espaces $\mathbb{C}[[x]]_{q;s}$ ($s > 0$) de séries formelles q-Gevrey d'ordre s. Par définition, l'ensemble $\mathbb{C}[[x]]_{q;s}$ est formé des séries entières dont la suite des coefficients est dominée par une suite $(KA^n q^{sn^2/2})$ ($K, A > 0$ arbitraires).

Les théorèmes d'indices obtenus dans [Bé] ont notamment les conséquences importantes suivantes.

0.4.1 Toute série entière divergente $\hat{y}$ telle que $\Delta\hat{y} \in \mathbb{C}\{x\}$, appartient à une classe de séries entière q-Gevrey d'ordre précis (optimal) $s \in PN(\Delta) \cap]0, +\infty[$ (voir aussi [FJ]) ;

0.4.2 Toute fonction entière non polynomiale y telle que $\Delta y \in \mathbb{C}\{x\}$ (où Δ est un opérateur à coefficients polynômiaux), a une croissance q-exponentielle d'ordre précis, c'est-à-dire $y = O(e^{\frac{s}{2\log q}\log^2|x|}x^\mu)$ avec $s > 0$ "optimal" et $\mu \in \mathbb{R}$ ([Ra2]).

0.5 Du côté de l'*étude analytique*, dans la ligne d'un programme initié par G.D. Birkhoff [Bi], W.J. Trjitzinsky a publié en 1933 un article intitulé *Analytic theory of linear q-difference equations* ([Tr]). C'est l'un des premiers travaux consacrés à la recherche de solutions analytiques (dans des domaines convenables) asymptotiques aux solutions formelles obtenues antérieurement. Comme presque tous les mathématiciens à cette époque, l'auteur utilisait la notion classique de développement asymptotique due à Poincaré pour relier une fonction analytique et une série entière éventuellement divergente.

Depuis le début des années 80, on s'est aperçu que la notion de développement asymptotique Gevrey permet de décrire de façon avantageuse la structure (des solutions) des équations différentielles à coefficients analytiques. **L'objectif de cet article** est d'introduire par q-analogie une nouvelle notion de développement asymptotique adaptée cette fois à l'étude des équations aux q-différences analytiques. Ce travail est motivé par un programme de recherche formulé par Jean-Pierre Ramis dans le cadre de son séminaire à Strasbourg en 1990-91.

0.6 Nous avons commencé notre travail par l'étude d'une version tronquée d'une série thêta de Jacobi $\hat{f} := \sum_{n\geq 0} q^{n(n-1)/2}x^n$, qui vérifie formellement l'équation non homogène $xy(qx) - y(x) = -1$. Notons $\widetilde{\mathbb{C}}^*$ la surface de Riemann du logarithme. En utilisant la méthode de la variation des constantes et la transformation de Fourier-Laplace, on obtient pour cette équation une solution analytique sur $\widetilde{\mathbb{C}}^*$, notée f, qui possède la propriété suivante.

0.6.1 Etant donné $\eta \in]0, \pi[$, il existe $K > 0$, $A > 0$ tels que, pour tous $\theta \in]\eta, 2\pi - \eta[$, n entier naturel et x $(= |x|q^{i \arg_q x})$ de module $|x|$ suffisamment petit, on ait $|f(x) - \sum_{m=0}^{n-1} q^{m(m-1)/2}x^m| < KA^n q^{\frac{1}{2}(n^2+(\arg_q(xe^{-i\theta}))^2)}|x|^n$.

Rappelons que, entre la théorie des développements asymptotiques de Poincaré et sa version Gevrey, une différence essentielle apparaît pour le problème de l'*unicité* des fonctions analytiques asymptotiquement développables. Dans cette direction, on montrera que

0.6.2 Une fonction vérifiant la propriété 0.6.1 ci-dessus est déterminée de façon unique.

Cet exemple nous suggère une définition naturelle des *développements asymptotiques q-Gevrey d'ordre 1.* A partir de cette nouvelle notion d'asymptoticité, on décrira un procédé de resommation qui fait correspondre, à chaque membre d'une classe convenable de séries entières q-Gevrey (en général "très divergentes") et à une direction générique donnée, une *unique* fonction analytique sur un "disque" de centre 0 et de rayon $R > 0$ dans $\widetilde{\mathbb{C}}^*$. Cette classe de séries sera notée $\mathbb{C}\{x\}_{q;1}$; ses éléments seront appelés séries entières *Gq-sommables d'ordre 1* et les fonctions correspondantes leurs *Gq-sommes.* On aura les relations d'inclusion $\mathbb{C}\{x\} \subset \mathbb{C}\{x\}_{q;1} \subset \mathbb{C}[[x]]_{q;1}$.

0.7 Afin d'*obtenir* (ou même de *calculer numériquement*) la *Gq*-somme d'une série entière *Gq*-sommable dans une direction donnée, on utilisera des transformations de Borel et de Laplace q-analogues (*cf* [Ra3], p. 57).

0.8 Le résultat suivant, qui est le q-analogue d'un résultat de [Ra1], prouvera l'intérêt de cette méthode de sommation.

0.8.1 Toute série entière $\hat{y}$ telle que $\Delta\hat{y} \in \mathbb{C}\{x\}$, est Gq-sommable si le polygone de Newton de Δ n'a qu'une seule pente égale à 1.

Ce résultat n'est plus vrai pour un opérateur aux q-différences quelconque. Dans un article ultérieur [MZ], nous montrerons que toute série entière solution formelle d'une équation aux q-différences est *Gq–multisommable*. Ce dernier résultat est le q-analogue d'un résultat récent sur les solutions formelles des équations différentielles linéaires analytiques (*cf* [MR], [BBRS], ...).

0.8.2 Dans [A1, A2], Yves André introduit et étudie systématiquement la notion de série Gevrey de type *arithmétique*. Cette étude est basée sur la transformation de Laplace. Il suggère à la fin de [A1] (*cf* 6.3 d)) une version q-analogue basée sur la transformation de q-Laplace étudiée dans le présent travail. Dans cette direction il propose comme série modèle pour les q-E-fonctions la série de Tschakaloff $\sum_{n\geq 0} q^{-n(n-1)/2}x^n$. Cette dernière n'est autre que la série théta tronquée qui joue un rôle important dans notre article, où l'on a changé q en $1/q$. Ceci suggère que cette dernière pourrait être utilisée comme série modèle pour les q-$\ni$-fonctions (i.e. les q-analogues des $\ni$-fonctions de [A2]). En utilisant notre travail sur la Gq-sommabilité, on peut donc espérer développer une version q-analogue de [A2] 3. (*cf* [A2], Remarques 3.4 *ii)*).

0.9 La suite de cet article comprend six parties. Dans la première partie, on étudiera la série thêta de Jacobi tronquée mentionnée au **0.6** et établira la propriété *0.6.1.* Inspiré par cet exemple, on définira dans la seconde partie la notion de développement asymptotique q-Gevrey et on en donnera quelques propriétés relativement immédiates (q-analogue du théorème de Borel-Ritt-Gevrey, caractérisation des fonctions q-plates en terme de décroissance q-exponentielle, etc), dont l'une permet de prouver directement l'assertion *0.6.2.* On étudiera ensuite la transformation de Borel-Laplace q-analogue et on l'utilisera pour caractériser la classe des séries entières Gq-sommables.

Dans la cinquième partie, on établira l'assertion *0.8.1* (*cf* le théorème 5.3) et on définira pour chacun de nos opérateurs aux q-différences les multiplicateurs de Stokes associés. Dans la dernière partie, on étudiera les "petites" solutions analytiques dans $\widetilde{\mathbb{C}}^*$ d'une équation aux q-différences, i.e. les solutions vérifiant certaines conditions de croissance. Ces deux dernières parties devraient servir à l'étude du groupe de Galois aux q-différences local à l'origine (*cf* [FRZ]).

Remerciement – J'ai bénéficié depuis des années des conseils avisés et des encouragements constants de Jean-Pierre Ramis. Je le remercie vivement. Je tiens à remercier également Augustin Fruchard et Fabienne Marotte pour leurs conversations utiles et remercier Guy Wallet pour ses encouragements constants dont j'ai bénéficié durant la préparation de cet article. Je remercie enfin le rapporteur pour ses remarques importantes et sa lecture attentive.

1. Etude de la série $\sum_{n\geq 0} q^{n(n-1)/2}x^n$.

1.1 Soit $\hat{f} := \sum_{n\geq 0} q^{n(n-1)/2}x^n$ une série thêta de Jacobi tronquée. (La série thêta de Jacobi correspondante est $\sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{n(n-1)/2}x^n$.) Elle diverge pour tout x non nul ($q > 1$) et elle est solution formelle de l'équation non homogène aux q-différences

$$xy(qx) - y(x) = -1. \tag{1.1.1}$$

On voit clairement que $\hat{f}$ est la seule série entière vérifiant l'équation (1.1.1) et que cette équation n'a pas de solution dans $\mathbb{C}\{x\}$. Pour des propriétés classiques de la somme de la série de Jacobi correspondante (avec $|q|<1$), qui satisfait l'équation homogène associée (*cf* [Ra2]), voir par exemple [WW], Chapitre XXI.

1.1.2 Notons $\widetilde{\mathbb{C}}^*$ la surface de Riemann du logarithme. On fixe un relevé $1 \in \widetilde{\mathbb{C}}^*$ de $1 \in \mathbb{C}^*$. Cela fixe du même coup un isomorphisme $\log_q : \widetilde{\mathbb{C}}^* \cong \mathbb{C}$, dont l'inverse, composé avec la projection sur $\mathbb{C}^*$ n'est autre que $t \mapsto q^t = e^{t.\log q}$; la règle $\log_q(xy) = \log_q(x)+\log_q(y)$ définit un "produit" sur $\widetilde{\mathbb{C}}^*$ qui relève celui de $\mathbb{C}^*$. Pour tout $x \in \widetilde{\mathbb{C}}^*$ d'image $t \in \mathbb{C}$, on pose $|x| = q^{\Re t}$, $\arg_q x = \Im t$. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$; comme d'habitude, le symbole x^α désignera la fonction $e^{\alpha \log x}$ de $\widetilde{\mathbb{C}}^*$ dans $\mathbb{C}$.

Soit l'équation homogène associée à (1.1.1) :

$$xy(qx) - y(x) = 0, \tag{1.1.3}$$

dont une solution *évidente* est la fonction $q^{-\frac{1}{2}\log_q x(\log_q x - 1)}$ définie dans $\widetilde{\mathbb{C}}^*$. Cette fonction est un q-analogue de l'exponentielle [Ra2]. On a alors la remarque suivante.

1.1.4 Toute solution analytique dans $\widetilde{\mathbb{C}}^*$ de l'équation (1.1.3) est de la forme

$$y = q^{-\frac{1}{2}\log_q x(\log_q x-1)} C(x),$$

où la fonction C, appelée *q-constante analytique*, vérifie $C(qx) = C(x)$.

1.2 Une façon de résoudre l'équation (1.1.1) est d'utiliser le q-analogue de la méthode de la variation des constantes. En faisant le changement de fonction

$$y(x) = q^{-\frac{1}{2}\log_q x(\log_q x-1)} z(x)$$

dans l'équation (1.1.1), on obtient

$$z(qx) - z(x) = -q^{\frac{1}{2}\log_q x(\log_q x-1)},$$

qui se transforme en l'équation suivante :

$$u(t+1) - u(t) = -q^{\frac{1}{2}t(t-1)}, \tag{1.2.1}$$

en posant $x = q^t$ et $z(x) = u(t)$.

Résolvons l'équation (1.2.1) à l'aide de la transformation de Fourier (ou la transformation de Laplace). On appelle ici transformée de Fourier (resp. de Fourier inverse) d'une fonction φ, notée $\mathcal{F}\varphi$ (resp. $\mathcal{F}^{-1}\varphi$), la fonction définie par l'intégrale (supposée convergente) suivante : ($a \in \mathbb{R}$)

$$\mathcal{F}\varphi(\chi) := \frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \varphi(t)e^{-\chi t}dt \quad (\textit{resp. } \mathcal{F}^{-1}\varphi(t) := \int_{-\infty+ia}^{+\infty+ia} \varphi(\chi)e^{\chi t}d\chi).$$

On remarque que si $\mathcal{F}\varphi$ et $\mathcal{F}(\varphi(t+1))$ existent, alors $\mathcal{F}(\varphi(t+1)) = e^\chi \mathcal{F}\varphi$. On rappelle également que, pour des espaces de fonctions convenables, on a

$$\mathcal{F}\circ\mathcal{F}^{-1} = id, \quad \mathcal{F}^{-1}\circ\mathcal{F} = id. \tag{1.2.2}$$

Pour plus de détails dans le cadre qui nous intéresse ici, voir par exemple [Ma].

Soit w la transformée de Fourier de $q^{\frac{1}{2}t(t-1)}$; pour tout $\chi \in \mathbb{C}$, on a

$$w(\chi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \log q}}\ q^{-\frac{1}{2}(\frac{\chi}{\log q}+\frac{1}{2})^2}.$$

Pour vérifier cette dernière identité, il suffit de noter que, pour tout $\alpha > 0$ et tout $\beta \in \mathbb{C}$, on a

$$\text{(1.2.3)} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha t^2+\beta t} dt = \frac{e^{\beta^2/(4\alpha)}}{\sqrt{\alpha}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2} ds = \sqrt{\pi/\alpha}\ e^{\beta^2/(4\alpha)}.$$

En conséquence, l'équation (1.2.1) donne la relation

$$(\mathcal{F}u)(\chi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \log q}}\ \frac{q^{-\frac{1}{2}(\frac{\chi}{\log q}+\frac{1}{2})^2}}{1-e^\chi}.$$

En tenant compte de (1.2.2), on trouve une famille de solutions (u_θ) de (1.2.1) donnée par

$$u_\theta(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi \log q}} \int_{-\infty+i\theta}^{+\infty+i\theta} \frac{q^{-\frac{1}{2}(\frac{\chi}{\log q}+\frac{1}{2})^2}}{1-e^\chi} e^{\chi t} d\chi.$$

où $\theta \neq 0$ modulo 2π. Soit $\xi = e^\chi$ et $y_\theta(x) = q^{\frac{1}{2}\log_q x(\log_q x-1)} u_\theta(\log_q x)$; on obtient alors une famille de solutions analytiques sur $\widetilde{\mathbb{C}}^*$ de l'équation (1.1.1) :

$$\text{(1.2.4)} \qquad y_\theta(x) := \frac{q^{-1/8}}{\sqrt{2\pi \log q}} \int_{d_\theta} \frac{q^{-\frac{1}{2}\log_q \frac{x}{\xi}(\log_q \frac{x}{\xi}-1)}}{1-\xi} \frac{d\xi}{\xi},$$

où d_θ désigne la demi-droite $\{\xi \in \widetilde{\mathbb{C}}^* : \arg \xi = \theta\}$ dirigée vers l'infini.

1.2.5 Si θ_1 et θ_2 appartiennent à un même intervalle du type $]2k\pi, 2(k+1)\pi[$ avec $k \in \mathbb{Z}$, les fonctions y_{θ_1} et y_{θ_2} définies par (1.2.4) sont les *mêmes*, d'après le théorème de Cauchy ; on note f_k la fonction correspondante.

Théorème 1.3 *Conservant les notations f_k de 1.2.5, on a les assertions suivantes.*

1.3.1 La fonction f_0 vérifie la propriété énoncée au 0.6.1, c'est-à -dire : étant donné $\eta \in]0, \pi[$, il existe $K > 0$, $A > 0$ tels que, pour tous $\nu \in]\eta, 2\pi - \eta[$, n entier naturel et x de module suffisamment petit, on ait

$$\text{(1.3.1}a\text{)} \qquad |f_0(x) - \sum_{m=0}^{n-1} q^{m(m-1)/2} x^m| < KA^n q^{\frac{1}{2}(n^2+(\arg_q(xe^{-i\nu}))^2)} |x|^n.$$

1.3.2 Pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et tout $x \in \widetilde{\mathbb{C}}^*$, on a $f_k(x) = f_0(xe^{2k\pi i})$ et $f_k(x) - f_0(x) = q^{-\frac{1}{2}\log_q x(\log_q x-1)} C_k(x)$ avec

$$\text{(1.3.2}a\text{)} \qquad \begin{aligned} C_k(x) &= iq^{-1/8}\sqrt{\frac{2\pi}{\log q}} \sum_{j=1}^{k} (-1)^j q^{\frac{2\pi^2 j^2}{\log^2 q}} x^{\frac{2j\pi i}{\log q}} \quad \textit{si } k \in \mathbb{N}, \\ C_k(x) &= iq^{-1/8}\sqrt{\frac{2\pi}{\log q}} \sum_{j=k+1}^{0} (-1)^{j+1} q^{\frac{2\pi^2 j^2}{\log^2 q}} x^{\frac{2j\pi i}{\log q}} \quad \textit{si } -k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Preuve – On rappelle que, si $\xi \neq 1$, on a $\frac{1}{1-\xi} = 1 + ... + \xi^{n-1} + \frac{\xi^n}{1-\xi}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; or, d'après (1.2.3) on trouve

$$\frac{q^{-1/8}}{\sqrt{2\pi \log q}} \int_{d_\theta} q^{-\frac{1}{2}\log_q \frac{x}{\xi}(\log_q \frac{x}{\xi}-1)} \xi^{m-1} d\xi = q^{m(m-1)/2} x^m \tag{1.3.3}$$

pour tous $m \in \mathbb{N}$, $\theta \in \mathbb{R}$ et $x \in \widetilde{\mathbb{C}}^*$. Soit $\theta \in]0, 2\pi[$ et $D_\theta := dist(\{1\}; d_\theta)$ la distance entre le point d'affixe 1 et la demi-droite d_θ ; d'après ce qui précède (et (1.2.4), *1.2.5*) on obtient

$$\begin{aligned} |f_0(x) - \sum_{m=0}^{n-1} q^{m(m-1)/2} x^m| &\leq \frac{q^{-1/8}}{\sqrt{2\pi \log q}} \frac{1}{D_\theta} \int_0^{+\infty} \left|q^{-\frac{1}{2}\log_q \frac{x}{re^{i\theta}}(\log_q \frac{x}{re^{i\theta}}-1)}\right| r^{n-1} dr \\ &\leq \frac{1}{D_\theta} q^{\frac{1}{2}(n(n-1)+(\arg_q(xe^{-i\theta}))^2)} |x|^n, \end{aligned}$$

ce qui entraîne immédiatement l'assertion *1.3.1*.

Pour l'assertion *1.3.2*, on considère seulement le cas où $k = 1$. Soit $\theta \in]2\pi, 4\pi[$ fixé. En effectuant une rotation de (-2π) sur d_θ on obtient une demi-droite $d_{\theta'}$ avec $\theta' \in]0, 2\pi[$; la fonction correspondant à d_θ dans (1.2.4) est alors égale à la fonction $f_0(xe^{2\pi i})$. D'où la relation $f_1(x) = f_0(xe^{2\pi i})$.

Soit $\theta_0 \in]0, 2\pi[$ et $\theta_1 \in]2\pi, 4\pi[$. En appliquant le théorème des résidus à l'intégrale (ici $1 = e^{2\pi i}$!)

$$\left(\int_{d_{\theta_1}} - \int_{d_{\theta_0}}\right) \frac{q^{-\frac{1}{2}\log_q \frac{x}{\xi}(\log_q \frac{x}{\xi}-1)}}{1-\xi} \frac{d\xi}{\xi},$$

on obtient

$$f_1(x) - f_0(x) = iq^{-1/8} \sqrt{\frac{2\pi}{\log q}}\; q^{-\frac{1}{2}\log_q(xe^{-2\pi i})(\log_q(xe^{-2\pi i})-1)}. \qquad \square$$

1.3.4 On remarque que les fonctions $C_k(x)$ obtenues dans (1.3.2a) sont des q-constantes analytiques au sens de *1.1.4*.

1.4 Le théorème précédent sera considéré comme un cas particulier des résultats établis dans les parties **4** et **5**, où l'on dira simplement que la série $\hat{f}$ est Gq-sommable d'ordre 1 dans toute direction de $\widetilde{\mathbb{C}}^*$ sauf en celles congruentes à $\mathbb{R}^+$. Avant de passer à la partie suivante, nous ferons quelques commentaires.

1.4.1 W.J. Trjitzinsky [Tr] a déjà utilisé la même méthode que celle employée au paragraphe **1.2** (sauf l'utilisation de la transformation de Fourier lors de la présentation des résultats) pour établir l'existence de solutions analytiques d'une équation aux q-différences asymptotiques aux solutions formelles connues. Comme presque tous les mathématiciens de son époque, il ne s'intéressait pas à la recherche d'une asymptoticité *précisée*. Il serait intéressant de reactualiser ces travaux [Tr] dans le cadre de la notion de développement asymptotique introduite ici. Notons qu'en tout cas nos résultats et ceux de [MZ] permettent de redémontrer assez simplement les résultats de [Tr].

1.4.2 Posons, pour tout $x \in \widetilde{\mathbb{C}}^*$,

$$g(x) := \int_{-1/2-\infty i}^{-1/2+\infty i} \frac{q^{u(u-1)/2}}{1-e^{2\pi i u}} x^u du. \tag{1.4.2a}$$

L'intégrale précédente converge et définit sur $\widetilde{\mathbb{C}}^*$ une solution analytique de l'équation (1.1.1). De plus, lorsque $|x| \leq 1$, on a

$$(1.4.2b) \qquad |g(x) - \sum_{m=0}^{n-1} q^{m(m-1)/2} x^m| \leq K A^n q^{\frac{1}{2}(n^2 + \arg_q^2 x)} |x|^n,$$

où K, $A > 0$ sont indépendants de x et de n. Dans la partie suivante, on dira que g possède $\hat{f}$ pour développement asymptotique q-Gevrey d'ordre 1 dans la direction $\mathbb{R}^+$. Il serait intéressant de comparer la famille de solutions (f_k) étudiée dans le théorème 1.3 et les solutions $g_k := g(xe^{2k\pi i})$ $(k \in \mathbb{Z})$.

2. Les développements asymptotiques q-Gevrey d'ordre 1.

2.1 Soit $R > 0$; on note $\tilde{D}(0; R) := \{x \in \widetilde{\mathbb{C}}^* : 0 < |x| < R\}$ le disque de "centre" 0 et de rayon R dans $\widetilde{\mathbb{C}}^*$. On définit $\widetilde{\mathbb{O}}$ comme étant l'ensemble des fonctions définies et analytiques dans un disque $\tilde{D}(0; R)$ de $\widetilde{\mathbb{C}}^*$ ($R > 0$ quelconque) ; tout élément de $\widetilde{\mathbb{O}}$ sera appelé *(germe de) fonction analytique en "$0 \in \widetilde{\mathbb{C}}^*$".*

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On note $d_\theta := \{x \in \widetilde{\mathbb{C}}^* : \arg x = \theta\}$ la demi-droite d'argument θ dans $\widetilde{\mathbb{C}}^*$, qu'on appelle la direction d_θ. Etant donnés $n \in \mathbb{N}$ et $\hat{f} := \sum_{n \geq 0} a_n x^n \in \mathbb{C}[[x]]$, on note $\hat{f}_n := \sum_{0 \leq k \leq n-1} a_k x^k$ la n-ème somme partielle de $\hat{f}$.

Définition 2.1.1 Soit $\theta \in \mathbb{R}$, $\hat{f} \in \mathbb{C}[[x]]$ et $f \in \tilde{\mathbb{O}}$. On dit que f possède $\hat{f}$ pour *développement asymptotique q-Gevrey d'ordre 1 dans la direction d_θ* et on note $f \sim_{q;1}^{\theta} \hat{f}$, s'il existe $A > 0$, $K > 0$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \widetilde{\mathbb{C}}^*$ de module suffisamment petit, on ait

$$(2.1.1a) \qquad |f(x) - \hat{f}_n(x)| < K A^n q^{\frac{1}{2}(n^2 + \arg_q^2(xe^{-i\theta}))} |x|^n.$$

Soit $f \sim_{q;1}^{\theta} \hat{f}$; on vérifie immédiatement les deux assertions suivantes.

2.1.2 Pour tout secteur V d'ouverture *finie* et de sommet $0 \in \widetilde{\mathbb{C}}^*$, f admet $\hat{f}$ pour développement asymptotique dans V au sens de Poincaré. On en déduit que le développement $\hat{f}$ est *unique.*

2.1.3 On a $\hat{f} \in \mathbb{C}[[x]]_{q;1}$.

2.2 Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On note $\mathbb{A}_{q;1}^{\theta}$ l'ensemble des fonctions $f \in \widetilde{\mathbb{O}}$ qui possèdent un développement asymptotique q-Gevrey d'ordre 1 dans la direction d_θ. On considère J_θ l'application, linéaire, de $\mathbb{A}_{q;1}^{\theta}$ dans $\mathbb{C}[[x]]_{q;1}$, définie par la relation $J_\theta(f) = \hat{f}$, où $\hat{f}$ est le développement asymptotique q-Gevrey de f dans d_θ.

Proposition 2.2.1 Soit $\theta \in \mathbb{R}$. A tout $\hat{f} \in \mathbb{C}[[x]]_{q;1}$ correspond un $f \in \mathbb{A}_{q;1}^{\theta}$ tel que $f \sim_{q;1}^{\theta} \hat{f}$.

En d'autres termes, l'application $J_\theta : \mathbb{A}_{q;1}^{\theta} \to \mathbb{C}[[x]]_{q;1}$ est surjective.

Ce résultat sera démontré au paragraphe 4.2.1 au moyen d'une transformation de Laplace (tronquée) q-analogue. C'est une version Gevrey q-analogue du théorème de Borel-Ritt ou du théorème de Borel-Ritt-Gevrey (*cf* [To] pp. 10-12, [Ra1], [Ma]).

L'application J_θ est surjective, elle n'est par contre pas injective comme le montre le résultat suivant.

Proposition 2.2.2 Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathbb{A}_{q;1}^{\theta}$. On a $J_\theta(f) = 0$ si, et seulement si, il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que l'on ait, lorsque $|x| \to 0$,

$$f(x) = O\big(x^\mu q^{-\frac{1}{2}\log_q^2(xe^{-i\theta})}\big).$$

Définition 2.2.3 Une fonction $f \in \widetilde{\mathbb{O}}$ est dite *à décroissance q-exponentielle d'ordre 1 et de type fini dans une direction d_θ* si l'on a $f(x) = O\big(x^\mu q^{-\frac{1}{2}\log_q^2(xe^{-i\theta})}\big)$ pour $|x| \to 0$, où $\mu \in \mathbb{R}$.

Preuve de la proposition 2.2.2 – On rappelle que $J_\theta(f) = 0$ si, et seulement si, il existe $A > 0$, $K > 0$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, lorsque $|x| \to 0$ on ait

$$|f(x)| < KA^n q^{\frac{1}{2}(n^2+\arg_q^2(xe^{-i\theta}))}|x|^n.$$

Or, pour tout $\mu \in \mathbb{R}$, on a

$$x^\mu q^{-\frac{1}{2}\log_q^2(xe^{-i\theta})} = e^{i\mu\theta} q^{\mu^2/2} q^{-\frac{1}{2}\log_q^2(xe^{-i\theta}/(q^\mu))}.$$

Quitte à remplacer x par $\frac{x}{A}e^{i\theta}$, on peut alors supposer que $\theta = 0$ et $A = 1$.

Soit la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de $\tilde{\mathbb{C}}^*$ dans $]0, +\infty[$ définie par

$$U_n(x) = q^{\frac{1}{2}(n^2+\arg_q^2 x)}|x|^n.$$

On va montrer la propriété suivante : pour $|x| \to 0$, on a $|f(x)| \le \min_{n\in\mathbb{N}} U_n(x)$ si, et seulement si, $f(x) = O(x^{-1}q^{-\frac{1}{2}\log_q^2 x})$; ceci prouve évidemment notre proposition.

Soit $x \in \widetilde{\mathbb{C}}^*$ fixé. On note $E(-\Re(\log_q x) - 1/2)$ le plus petit entier relatif qui est supérieur ou égal à $(-\Re(\log_q x) - 1/2)$; on pose $n_x := \max(0, E(-\Re(\log_q x) - \frac{1}{2}))$. Puisque $\frac{U_{n+1}}{U_n}(x) = q^{n+1/2}|x|$, la suite numérique $(U_n(x))_n$ décroît jusqu'au rang n_x puis elle croît ; on a donc $U_n(x) \ge U_{n_x}(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Lorsque $|x| < \sqrt{q}$, on trouve aisément que $U_{n_x}(x) \le |x|^{-1}q^{-\frac{1}{2}\Re(\log_q^2 x)+\frac{1}{8}}$. $\square$

Proposition 2.2.4 Soit $\theta_j \in \mathbb{R}$, $f_j \in \mathbb{A}_{q;1}^{\theta_j}$, avec $j = 1, 2$. Si $J_{\theta_1}f_1 = J_{\theta_2}f_2$, alors il existe $\mu_j \in \mathbb{R}$, $K_j > 0$ ($j = 1, 2$) tels que

$$|f_1(x) - f_2(x)| < \sum_{j=1}^{2} K_j|x|^{\mu_j}\left|q^{-\frac{1}{2}(\log_q^2(xe^{-i\theta_j}))}\right|$$

pour tout $x \in \widetilde{\mathbb{C}}^*$ de module suffisamment petit.

Preuve – Il suffit de noter que, lorsque $|x| \to 0$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|f_1(x) - f_2(x)| \le \sum_{j=1}^{2} |f_j(x) - \hat{f}_n(x)| < \sum_{j=1}^{2} K_j A_j^n q^{\frac{1}{2}(n^2+\arg_q^2(xe^{-i\theta_j}))}|x|^n,$$

où les $A_j > 0$ sont des constantes indépendantes de x et de n. $\square$

Théorème 2.3 *Soit θ_1, $\theta_2 \in \mathbb{R}$. Si $\theta_1 \neq \theta_2$, alors* $\ker J_{\theta_1} \cap \ker J_{\theta_2} = \{0\}$.

Preuve – Soit $f \in \ker J_{\theta_1} \cap \ker J_{\theta_2}$. D'après la proposition 2.2.2, il existe $K_j > 0$, $\mu_j \in \mathbb{R}$ ($j = 1, 2$) tels que, lorsque $|x| \to 0$,

$$|f(x)| \le K_j |x|^{\mu_j} \left| q^{-\frac{1}{2}(\log_q^2(xe^{-i\theta_j}))} \right|.$$

Quitte à multiplier f par $x^{-\min(\mu_1,\mu_2)}$, on peut supposer que $\min(\mu_1, \mu_2) = 0$. En effectuant si nécessaire une rotation sur la variable x, on peut supposer que $\theta_2 > \theta_1 = 0$. De plus, on supposera que $\mu_2 \ge \mu_1 = 0$, le cas restant $\mu_2 < \mu_1$ étant similaire.

Soit $g(x) := f(x) q^{\frac{1}{2}\log_q^2 x}$ pour tout $x \in \tilde{D}(0; R)$, avec $R > 0$ suffisamment petit. D'après les hypothèses ci-dessus sur f, on a, pour tout $x \in \tilde{D}(0; R)$,

$$|g(x)| \le K_1, \quad |g(x)| \le K_2 e^{\theta_2^2/\log q} |x|^{\mu_2} |x^{i\theta_2/\log q}| \le K e^{-\theta_2 \arg_q x},$$

où $K = K_2 e^{\theta_2^2/\log q} R^{\mu_2}$.

Posons $G(z) := g(e^z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $\Re z < \log R$. La fonction G est analytique, bornée et majorée par $K|e^{i\theta_2 z/\log q}|$ sur le demi-plan à gauche $\{\Re z < \log R\}$. Par conséquent, la fonction $z \mapsto G(z) e^{-i\theta_2 z/(2\log q)}$ est bornée sur ce demi-plan et exponentiellement petite dans toutes les directions verticales. D'après le *lemme de Watson* (*cf* [Ma] p. 14), on obtient que $G(z) e^{-i\theta_2 z/(2\log q)}$, donc G elle-même, sont identiquement nulles. D'où g, et par suite f, sont identiquement nulles sur $\tilde{D}(0; R)$. □

2.3.1 L'assertion *0.6.2* découle immédiatement du théorème précédent.

3. Transformation de Borel-Laplace q-analogue.

3.1 Nous commençons par une transformation de Borel formelle q-analogue.

Définition 3.1.1 On appelle *transformation de q-Borel formelle*, notée $\hat{\mathcal{B}}_{q;1}$, l'application linéaire de $\mathbb{C}[[x]]$ dans $\mathbb{C}[[\xi]]$ qui envoie x^n en $q^{-n(n-1)/2}\xi^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On a $\mathbb{C}[[x]]_{q;1} = (\hat{\mathcal{B}}_{q;1})^{-1}(\mathbb{C}\{\xi\})$. Par un calcul direct, on vérifie les deux propriétés qui suivent.

3.1.2 Pour tout $\hat{f} \in \mathbb{C}[[x]]$, on a $\hat{\mathcal{B}}_{q;1}(x\sigma_q(\hat{f})) = \xi\sigma_q(\hat{\mathcal{B}}_{q;1}\hat{f})$; autrement dit, $\hat{\mathcal{B}}_{q;1}$ commute avec $x\sigma_q$:

$$\hat{\mathcal{B}}_{q;1}(x\sigma_q) = \xi\hat{\mathcal{B}}_{q;1}. \tag{3.1.2a}$$

3.1.3 Pour tout couple $(\hat{f}, \hat{g}) \in \mathbb{C}[[x]] \times \mathbb{C}[[x]]$, on a

$$\hat{\mathcal{B}}_{q;1}(\hat{f}\hat{g}) = \sum_{n\ge 0} a_n q^{-n(n-1)/2} \xi^n \hat{\mathcal{B}}_{q;1}\hat{g}(\xi q^{-n}), \tag{3.1.3a}$$

où les a_n sont les coefficients de $\hat{f}$.

Si $\hat{f} \in \mathbb{C}\{x\}$, $\hat{\mathcal{B}}_{q;1}\hat{f}$ représente une fonction entière.

Proposition 3.1.4 Soit $R > 0$, $\hat{f} \in \mathbb{C}[[x]]_{q;1}$ et φ la fonction somme de $\hat{\mathcal{B}}_{q;1}\hat{f}$. On suppose que φ est une fonction entière. Les conditions suivantes sont équivalentes.

(i) Le rayon de convergence de $\hat{f}$ est supérieur ou égal à R.

(ii) Pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\varphi(\xi) = O(q^{\frac{1}{2}\log_q|\xi|(\log_q|\xi|+1)+(-\log_q R+\varepsilon)\log_q|\xi|})$ lorsque $|\xi| \to +\infty$.

Preuve – Soit $\hat{f} := \sum_{n\geq 0} a_n x^n$. Quitte à effectuer une homothétie sur la variable x (et donc sur ξ), on peut supposer que $R = 1$ dans la proposition.

Traduisons la condition (i) de la manière suivante. Soit $\varepsilon > 0$; on a alors $|a_n| < K(1+\varepsilon)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, où $K > 0$ est une constante. On en déduit que, pour tout $\xi \in \mathbb{C}$,

$$|\varphi(\xi)| < K \sum_{n=0}^{+\infty} q^{-n(n-1)/2}((1+\varepsilon)|\xi|)^n.$$

Or, lorsque $|\xi|$ tend vers l'infini dans $\mathbb{C}$, on sait que (*cf* [Ra2], [ZZ])

$$1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{q^n}{(q-1)(q^2-1)\ldots(q^n-1)}|\xi|^n = O(e^{\frac{1}{2}\frac{\log^2|\xi|}{\log q}+\frac{\log|\xi|}{2}}),$$

soit donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} q^{\frac{1}{2}(-n^2+n)}|\xi|^n = O(e^{\frac{1}{2}\frac{\log^2|\xi|}{\log q}+\frac{\log|\xi|}{2}})$. Ainsi la condition (i) implique (ii).

Supposons maintenant la condition (ii) vérifiée. Soit $r > 0$ arbitraire. Appliquant les inégalités de Cauchy à la fonction φ sur le cercle centré en l'origine et de rayon r, on obtient

$$\left|a_n q^{-n(n-1)/2}\right| \leq r^{-n} \max_{|\xi||=r} |\varphi(\xi)| \leq K e^{\frac{1}{2}\frac{\log^2 r}{\log q}+(\varepsilon-n+1/2)\log r},$$

où $K > 0$ est indépendant de r et de n. Or, étant donné $\alpha > 0$, on a

$$\min_{r>0}(e^{\frac{1}{2}\frac{\log^2 r}{\log q}-\alpha\log r}) = q^{-\alpha^2/2}.$$

On en déduit que, pour $\varepsilon > 0$ et pour tout n assez grand, on a $|a_n| < K' q^{n\varepsilon}$, avec $K' > 0$ indépendant de n. Le nombre ε pouvant être arbitrairement petit, on en conclut que le rayon de convergence de $\hat{f}$ est supérieur ou égal à 1. $\square$

Définition 3.1.5 Soit φ une fonction définie et analytique sur un ouvert de $\widetilde{\mathbb{C}}^*$ qui contient une partie *connexe* V radialement non bornée. On dit que φ admet *une croissance q-exponentielle d'ordre 1 et de type fini dans* V s'il existe $K > 0$ et $\mu \in \mathbb{R}$ tels que, lorsque $|\xi| \to +\infty$ dans V, on ait

$$|\varphi(\xi)| < K|\xi|^\mu q^{\frac{1}{2}\log_q^2|\xi|}.$$

3.2 La proposition 3.1.4 montre que la fonction somme de la transformée de q-Borel d'une série convergente est à croissance q-exponentielle d'ordre 1 et de type fini à l'infini dans $\mathbb{C}$. Nous allons étudier une transformation de q-Laplace analytique qui peut être formellement considérée comme l'inverse de la transformation de q-Borel formelle.

Lemme 3.2.1 Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $\varphi \in \mathbb{C}\{x\}$. On suppose que φ peut se prolonger en une fonction analytique sur un ouvert contenant la direction d_θ et qui possède une croissance q-exponentielle d'ordre 1 et de type fini dans d_θ. On pose

$$\mathcal{L}_{q;1}^\theta \varphi(x) := \frac{q^{-1/8}}{\sqrt{2\pi\log q}} \int_{d_\theta} q^{-\frac{1}{2}(\log_q \frac{x}{\xi})(\log_q \frac{x}{\xi}-1)} \varphi(\xi)\frac{d\xi}{\xi}. \tag{3.2.1a}$$

Alors $x \mapsto \mathcal{L}_{q;1}^{\theta}\varphi(x)$ *définit une fonction analytique dans un disque* $\tilde{D}(0;R)$ *avec* $R>0$.

Définition 3.2.2 La fonction $\mathcal{L}_{q;1}^{\theta}\varphi$ définie ci-dessus s'appellera *la transformée de q-Laplace de* φ *le long de la direction* d_θ.

Preuve du lemme 3.2.1 – Quitte à faire une rotation sur la variable ξ, on peut supposer $\theta=0$. Il est clair que, pour tout $x\in\widetilde{\mathbb{C}}^*$, l'intégrale (3.2.1a) converge en $\xi=0$; il reste à regarder la convergence en $\xi=+\infty$.

Soit $\xi=q^t$ avec $t>0$; on a $|\varphi(\xi(t))|=O(q^{\frac12 t^2+\mu t})$ où $\mu\in\mathbb{R}$. Par conséquent, l'intégrale (3.2.1a) converge en $\xi=+\infty$ pour tout $x\in\widetilde{\mathbb{C}}^*$ qui vérifie la condition suivante : il existe $\delta>0$ tel que, pour tout $t>0$ suffisamment grand, on ait

$$-\frac12\Re((\log_q x-t)(\log_q x-t-1))+(\frac12 t^2+\mu t)<-\delta t.$$

Cette dernière condition sera vérifiée si $\log_q|x|<-\mu-\delta$, ce qui montre que $\mathcal{L}_{q;1}^{\theta}\varphi$ est bien définie dans un disque de $\widetilde{\mathbb{C}}^*$ centré en 0. L'analyticité de cette fonction est évidente. $\square$

A partir de (1.2.3), on obtient la relation suivante : pour tous $\theta\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$ et $x\in\tilde{\mathbb{C}}^*$,

$$\mathcal{L}_{q;1}^{\theta}(\xi^n)=q^{\frac12 n(n-1)}x^n; \tag{3.2.3}$$

autrement dit, on peut considérer $\mathcal{L}_{q;1}^{\theta}$ comme l'inverse de $\hat{\mathcal{B}}_{q;1}$ sur l'espace des fonctions polynômiales.

Définition 3.2.4 On appellera *transformation de q-Laplace formelle* et on notera $\hat{\mathcal{L}}_{q;1}$ l'opérateur inverse de $\hat{\mathcal{B}}_{q;1}$.

Définition 3.2.5 Soit $\theta\in\mathbb{R}$ et d_θ la direction d'argument θ dans $\widetilde{\mathbb{C}}^*$. On appellera *voisinage sectoriel de* d_θ tout secteur ouvert de la forme

$$S(\theta;\epsilon):=\{x\in\widetilde{\mathbb{C}}^*:|\arg x-\theta|<\epsilon\}\quad(\epsilon>0).$$

3.2.6 Soit $\theta\in\mathbb{R}$; on note $\mathbb{H}_{q;1}^{\theta}$ l'ensemble des germes de fonctions analytiques en $0\in\mathbb{C}$ qui peuvent se prolonger en une fonction analytique et admettant une croissance q-exponentielle d'ordre 1 et de type fini dans un voisinage sectoriel de d_θ.

3.2.7 Si $\varphi\in\mathbb{H}_{q;1}^{\theta}$, alors pour tout θ' suffisamment proche de θ, $\mathcal{L}_{q;1}^{\theta'}\varphi$ est bien définie et, de plus, $\mathcal{L}_{q;1}^{\theta'}\varphi=\mathcal{L}_{q;1}^{\theta}\varphi$.

Théorème 3.3 *Soit* $\theta\in\mathbb{R}$ *et* $\varphi\in\mathbb{H}_{q;1}^{\theta}$. *On pose* $f=\mathcal{L}_{q;1}^{\theta}\varphi$, $\hat f=\hat{\mathcal{L}}_{q;1}\varphi$ *et on note, pour tout* $n\in\mathbb{N}$, $\hat f_n$ *la fonction somme des* n *premiers termes de la série entière* $\hat f$.

Alors, il existe $\varepsilon>0$, $A>0$, $K>0$ *tels que, pour tout* $n\in\mathbb{N}$ *et tout* $\vartheta\in]\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon[$, *on ait*

$$|f(x)-\hat f_n(x)|<KA^nq^{\frac12(n^2+\arg_q^2(xe^{-i\vartheta}))}|x|^n,$$

ceci pour tout $x\in\widetilde{\mathbb{C}}^*$ *de module suffisamment petit.*

Preuve – Il suffit de copier la preuve suivante de la proposition 2.2.1 ; voir aussi la preuve du théorème 1.3. $\square$

3.3.1 Preuve de la proposition 2.2.1 – Quitte à effectuer une rotation sur la variable x, on peut supposer que $\theta=0$. Soit R le rayon de convergence de $\hat{\mathcal{B}}_{q;1}\hat f$ et φ la fonction somme de $\hat{\mathcal{B}}_{q;1}\hat{f}$ dans $D(0;R) \subset \mathbb{C}$. Fixons $r \in]0,R[$. Posons, pout tout $x \in \widetilde{\mathbb{C}}^*$, $f = \mathcal{L}^{0;r}_{q;1}\varphi$ la transformée de q-Laplace tronquée en r de φ dans la direction d_0 :

$$\mathcal{L}^{0;r}_{q;1}\varphi(x) = \frac{q^{-1/8}}{\sqrt{2\pi \log q}} \int_0^r q^{-\frac{1}{2}(\log_q \frac{x}{\xi})(\log_q \frac{x}{\xi}-1)} \varphi(\xi) \frac{d\xi}{\xi}$$

Il est clair que $f \in \widetilde{\mathbb{O}}$. On va montrer que $J_0(f) = \hat{f}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$; on note φ_n la n-ième somme partielle de $\hat{\mathcal{B}}_{q;1}\hat{f}$. D'après (3.2.3), on obtient $\hat{f}_n(x) = \mathcal{L}^0_{q;1}\varphi_n$. Ecrivons alors $f(x) - \hat{f}_n(x) = \delta_n(x) + \sigma_n(x)$, avec

$$\begin{aligned}
\delta_n(x) :&= \frac{q^{-1/8}}{\sqrt{2\pi \log q}} \int_r^{+\infty} q^{-\frac{1}{2}(\log_q \frac{x}{\xi})(\log_q \frac{x}{\xi}-1)} \varphi_n(\xi) \frac{d\xi}{\xi}, \\
\sigma_n(x) :&= \frac{q^{-1/8}}{\sqrt{2\pi \log q}} \int_0^r q^{-\frac{1}{2}(\log_q \frac{x}{\xi})(\log_q \frac{x}{\xi}-1)} (\varphi - \varphi_n)(\xi) \frac{d\xi}{\xi}.
\end{aligned}$$

Par un calcul élémentaire, on vérifie qu'il existe une constante $K > 0$, indépendante de n, satisfaisant les deux estimations ci-dessous :

(1) pour tout $\xi \geq r$, $|\varphi_n(\xi)| \leq K\xi^n$;

(2) pour tout $\xi \in]0,r[$, $|\varphi(\xi) - \varphi_n(\xi)| \leq K\xi^n$.

Ceci étant, on a

$$|f(x) - \hat{f}_n(x)| < 2K \frac{q^{-1/8}}{\sqrt{2\pi \log q}} \int_0^{+\infty} q^{-\Re(\frac{1}{2}(\log_q \frac{x}{\xi})(\log_q \frac{x}{\xi}-1))} \xi^{n-1} d\xi,$$

ce qui implique, d'après (1.2.3), l'estimation suivante :

$$|f(x) - \hat{f}_n(x)| < 2Kq^{\frac{1}{2}(n(n-1)+\arg_q^2 x)}|x|^n. \qquad \square$$

4. Les séries entières Gq-sommables d'ordre 1.

4.1 On dira que la série $\hat{f}$ étudiée dans le théorème 3.3 est sommable dans la direction d_θ au sens Gevrey q-analogue, ou Gq-sommable.

Définition 4.1.1 Soit $\theta \in \mathbb{R}$, $\hat{f} \in \mathbb{C}[[x]]$ et $f \in \widetilde{\mathbb{O}}$.

(1) On dit que $\hat{f}$ est *Gq-sommable (d'ordre 1), de Gq-somme f, dans la direction d_θ* s'il existe $\varepsilon > 0$, $A > 0$, $K > 0$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $\vartheta \in]\theta - \varepsilon, \theta + \varepsilon[$, on ait

$$|f(x) - \hat{f}_n(x)| < KA^n q^{\frac{1}{2}(n^2+\arg_q^2(xe^{-i\vartheta}))}|x|^n,$$

ceci pour tout $x \in \widetilde{\mathbb{C}}^*$ de module suffisamment petit.

(2) On dit que la direction d_θ est *singulière* pour la série $\hat{f}$, et on notera $\theta \in DS(\hat{f})$, si $\hat{f}$ n'est pas Gq-sommable dans cette direction.

(3) La série $\hat{f}$ est dite *Gq-sommable (d'ordre 1)* si l'intersection $[0,2\pi] \cap DS(\hat{f})$ est *finie.*

Lorsque $\hat{f}$ est Gq-sommable (*resp.* Gq-sommable dans la direction d_θ), on notera $\hat{f} \in \mathbb{C}\{x\}_{q;1}$ (*resp.* $\hat{f} \in \mathbb{C}\{x\}_{q;1}^{\theta}$). Il est clair que $\mathbb{C}\{x\} \subset \mathbb{C}\{x\}_{q;1}^{\theta} \subset \mathbb{C}[[x]]_{q;1}$ et que, si $\hat{f} \in \mathbb{C}\{x\}_{q;1}^{\theta}$, alors $\hat{f} \in \mathbb{C}\{x\}_{q;1}^{\theta'}$ et $\mathcal{S}_{q;1}^{\theta}\hat{f} = \mathcal{S}_{q;1}^{\theta'}\hat{f}$ pour tout θ' suffisamment proche de θ.

4.1.2 Compte tenu de la proposition 2.2.4, la différences de deux Gq-sommes, dans des directions différentes, d'une même série entière est majorée par une somme de deux fonctions *à décroissance q-exponentielle d'ordre 1 et de type fini.* De plus, *la Gq-somme dans une direction est unique*, d'après le théorème 2.3.

On notera respectivement $\mathcal{S}_{q;1}^{\theta}\hat{f}$ la Gq-somme de $\hat{f} \in \mathbb{C}\{x\}_{q;1}^{\theta}$ dans d_θ et $\mathbb{G}_{q;1}^{\theta}$ l'ensemble des fonctions Gq-sommes des séries entières Gq-sommables d'ordre 1 dans la direction d_θ.

4.1.3 Si $\hat{f} \in \mathbb{C}\{x\}_{q;1}^{\theta}$, alors pour tout $\theta_k = \theta + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, on a $\hat{f} \in \mathbb{C}\{x\}_{q;1}^{\theta_k}$; de plus, $\mathcal{S}_{q;1}^{\theta}\hat{f}(xe^{-2k\pi i}) = \mathcal{S}_{q;1}^{\theta_k}\hat{f}(x)$. Ceci entraîne une définition équivalente des séries entières Gq-sommables :

La série $\hat{f}$ est Gq-sommable *si et seulement si $DS(\hat{f})$ est un ensemble discret de* $\mathbb{R}$.

Toute série entière convergente est Gq-sommable dans toute direction d_θ de $\widetilde{\mathbb{C}}^*$ et sa Gq-somme est la fonction somme naturelle de $\hat{f}$. Plus précisemment, on a le résultat suivant.

4.1.4 Soit $\hat{f} \in \mathbb{C}[[x]]$. On a $\hat{f} \in \mathbb{C}\{x\}$ si, et seulement si, $DS(\hat{f}) = \emptyset$.

Pour vérifier l'assertion précédente, il suffit de noter que, si $DS(\hat{f}) = \emptyset$, alors pour tout couple $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$ on a $\mathcal{S}_{q;1}^{\theta}\hat{f} = \mathcal{S}_{q;1}^{\theta'}\hat{f}$; en particulier, avec $\theta' = \theta - 2\pi$ on obtient que $\mathcal{S}_{q;1}^{\theta}\hat{f}(x) = \mathcal{S}_{q;1}^{\theta}\hat{f}(xe^{2\pi i})$ (d'après *4.1.3*). La série $\hat{f}$ est alors le développement d'une fonction analytique en $0 \in \mathbb{C}$.

Théorème 4.2 *Soit $\theta \in \mathbb{R}$, $\hat{f} \in \mathbb{C}[[x]]_{q;1}$ et φ la fonction somme de $\hat{\mathcal{B}}_{q;1}\hat{f}$. On a $\hat{f} \in \mathbb{C}\{x\}_{q;1}^{\theta}$ si, et seulement si, $\varphi \in \mathbb{H}_{q;1}^{\theta}$.*

De plus, en notant $\mathcal{S}^\theta$ l'opérateur prolongement analytique dans la direction d_θ d'une série convergente, on a, sur $\mathbb{C}\{x\}_{q;1}^{\theta}$,

$$\mathcal{S}_{q;1}^{\theta} = \mathcal{L}_{q;1}^{\theta} \circ \mathcal{S}^{\theta} \circ \hat{\mathcal{B}}_{q;1}. \tag{4.2.1}$$

Idée de la preuve – D'après le théorème 3.3, la condition est *suffisante*. Pour montrer que la condition est *nécessaire*, on utilisera la *transformée de q-Borel analytique* introduite plus loin. La preuve du théorème s'obtiendra à l'aide de la proposition 4.2.3 ci-dessous. □

Soit $\rho > 0$; on note r_ρ la courbe, positivement orientée, paramétrée par $]-\infty, +\infty[\to \widetilde{\mathbb{C}}^*$, $t \mapsto \rho q^{it}$. C'est le bord du disque $\tilde{D}(0; \rho)$. A partir de (1.2.3), on déduit aisément l'identité suivante :

$$-i\frac{q^{1/8}}{\sqrt{2\pi \log q}} \int_{r_\rho} q^{\frac{1}{2}\log_q \frac{x}{\xi}(\log_q \frac{x}{\xi} - 1)} x^{n-1} dx = q^{-\frac{1}{2}n(n-1)} \xi^n, \tag{4.2.2}$$

où $n \in \mathbb{N}$ et $\xi \in \widetilde{\mathbb{C}}^*$.

Proposition 4.2.3 *Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Soit $\hat{f} \in \mathbb{C}\{x\}_{q;1}^{\theta}$, de Gq-somme $f \in \mathbb{G}_{q;1}^{\theta}$. Pour tout $\rho > 0$ suffisamment petit, on pose*

$$\mathcal{B}_{q;1}^{\rho} f(\xi) := -i\frac{q^{1/8}}{\sqrt{2\pi \log q}} \int_{r_\rho} q^{\frac{1}{2}\log_q \frac{x}{\xi}(\log_q \frac{x}{\xi} - 1)} f(x) \frac{dx}{x}. \tag{4.2.3a}$$

Alors l'intégrale ci-dessus converge pour tout ξ dans un voisinage sectoriel de la direction d_θ. De plus, l'application $\xi \mapsto \mathcal{B}^\rho_{q;1} f(\xi)$ peut se prolonger en une fonction, encore notée $\mathcal{B}^\rho_{q;1} f$, qui appartient à $\mathbb{H}^\theta_{q;1}$ et qui est égale à la fonction somme de $\hat{\mathcal{B}}_{q;1}\hat{f}$ au voisinage de $0 \in \mathbb{C}$.

Preuve – Il est clair que ρ doit être choisi inférieur au rayon du disque $\tilde{D}(0;R)$ sur lequel f est définie. Si l'intégrale en question converge en un point $\xi \in \widetilde{\mathbb{C}}^*$, alors la valeur de l'intégrale est indépendante du choix de la valeur de ρ ($\rho < R$), d'après le théorème de Cauchy. Pour simplifier, on supposera que $\rho = 1$ (donc $R > 1$).

Soit $\varepsilon > 0$ satisfaisant la condition de la définition 4.1.1 (1). Pour tout $x \in \tilde{D}(0;1)$ et tout $\vartheta \in]\theta - \varepsilon, \theta + \varepsilon[$, on a $|f(x)| < Kq^{\frac{1}{2}\arg_q^2(xe^{-i\vartheta})}$, ce qui implique que, pour $t \in \mathbb{R}$, $|f(e^{it})| < Ke^{\frac{1}{2\log q}(t-\vartheta)^2}$. Il en résulte que, pour $\xi \in \widetilde{\mathbb{C}}^*$ et $t \in \mathbb{R}$,

$$\left|q^{\frac{1}{2}\log_q\frac{e^{it}}{\xi}(\log_q\frac{e^{it}}{\xi}-1)}f(e^{it})\right| < K'e^{t(\arg\xi-\vartheta)}q^{\frac{1}{2}\Re(\log_q\xi(\log_q\xi+1))},$$

où $K' = K\max_{|\vartheta-\theta|<\varepsilon} e^{\vartheta^2/\log q}$. On obtient que l'intégrale en question converge pour tout $\xi \in S(\theta;\varepsilon)$ et que la fonction correspondante est à croissance q-exponentielle d'ordre 1 et de type fini.

Il reste à étudier $\mathcal{B}^1_{q;1} f$ au voisinage de l'origine. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $f_n := f - \hat{f}_n$. Puisque $|f_n(x)| < Kq^{\frac{1}{2}(n^2+\arg_q^2(xe^{-i\vartheta}))}|x|^n$ et que $\mathcal{B}^1_{q;1}(f_n) = \mathcal{B}^\rho_{q;1}(f_n)$ pour tout $\rho \in]0,1[$, on trouve, pour tout $\xi \in S(\theta;\varepsilon)$:

$$|\mathcal{B}^1_{q;1}(f_n)(\xi)| = |\mathcal{B}^{q^{-n}}_{q;1}(f_n)(\xi)| < K'|\xi|^n q^{\frac{1}{2}(-n^2+\Re(\log_q^2\xi))},$$

avec $K' > 0$ indépendant de n et de ξ. Lorsque $n \to +\infty$, on a $\mathcal{B}^1_{q;1}(f_n)(\xi) \to 0$. Or, d'après (4.2.2), $\mathcal{B}^1_{q;1}(f_n) = \mathcal{B}^1_{q;1} f - (\hat{\mathcal{B}}_{q;1}\hat{f})_n$, ce qui implique que, en désignant par φ la fonction somme de $\hat{\mathcal{B}}_{q;1}\hat{f}$ dans $D(0;1)$, on a $\varphi(\xi) = \mathcal{B}^1_{q;1} f(\xi)$ pour tout $\xi \in S(\theta;\varepsilon) \cap D(0;1)$. D'où $\mathcal{B}^1_{q;1} f(\xi)$ peut se prolonger en une fonction appartenant à $\mathbb{H}^\theta_{q;1}$ qui est égale à φ au voisinage de 0. $\square$

Définition 4.2.4 La fonction $\mathcal{B}^\rho_{q;1} f \in \mathbb{H}^\theta_{q;1}$ définie dans (4.2.3a) sera notée $\mathcal{B}_{q;1} f$ et sera appelée *la transformée de q-Borel analytique de f (en $0 \in \widetilde{\mathbb{C}}^*$).*

Théorème 4.2a *Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Pour tout $f \in \mathbb{G}^\theta_{q;1}$, on a $\mathcal{L}^\theta_{q;1} \circ \mathcal{B}_{q;1} f \equiv f$.*

Preuve – Soit $\hat{f}$ la série entière telle que $f = \mathcal{S}^\theta_{q;1}\hat{f}$. D'après la proposition 4.2.3, on a $\mathcal{B}^\rho_{q;1} f \in \mathbb{H}^\theta_{q;1}$ pour $\rho > 0$ assez petit. En tenant compte du théorème 3.3, on obtient $\mathcal{L}^\theta_{q;1} \circ \mathcal{B}^\rho_{q;1} f = \mathcal{S}^\theta_{q;1}\hat{f}$. $\square$

4.3 On étudie maintenant la structure algébrique de $\mathbb{C}\{x\}_{q;1}$ et celle de $\mathbb{C}\{x\}^\theta_{q;1}$ ($\theta \in \mathbb{R}$).

Proposition 4.3.1 Soit $\hat{f} \in \mathbb{C}\{x\}$ et $\hat{g} \in \mathbb{C}\{x\}^\theta_{q;1}$, avec $\theta \in \mathbb{R}$. On note $f := \mathcal{S}\hat{f}$ la fonction somme de $\hat{f}$. Alors $\hat{f}\hat{g} \in \mathbb{C}\{x\}^\theta_{q;1}$ et $\mathcal{S}^\theta_{q;1}(\hat{f}\hat{g}) = f\ \mathcal{S}^\theta_{q;1}\hat{g}$.

Si, de plus, $\hat{g} \in \mathbb{C}\{x\}_{q;1}$, on a $\hat{f}\hat{g} \in \mathbb{C}\{x\}_{q;1}$ et $DS(\hat{f}\hat{g}) \subset DS(\hat{g})$.

Preuve – Soit $g := \mathcal{S}^\theta_{q;1}\hat{\mathcal{B}}_{q;1}\hat{g}$. On vérifie aisément que la tranformée de q-Borel analytique de fg, $\mathcal{B}_{q;1}(fg)$, définit une fonction appartenant à la classe $\mathbb{H}^\theta_{q;1}$. On en déduit que $\hat{\mathcal{L}}_{q;1}\mathcal{B}^\rho_{q;1}(fg) \in \mathbb{C}\{x\}^\theta_{q;1}$, d'après le théorème 3.3. Par un calcul formel, on trouve que

$\hat{\mathcal{L}}_{q;1}\mathcal{B}^{\rho}_{q;1}(fg) = \hat{f}\hat{g}$. D'où $\mathcal{S}^{\theta}_{q;1}(\hat{f}\hat{g}) = f\ \mathcal{S}^{\theta}_{q;1}\hat{g}$. Le reste de la proposition 4.3.1 découle directement de ce qui précède. $\square$

Rappelons que l'ensemble $\mathbb{C}[[x]]_{q;1}$ est stable pour l'addition et la multiplication usuelles des séries entières formelles. En ce qui concerne les séries Gq-sommables, on vérifie facilement le résultat suivant.

4.3.2 Les ensembles $\mathbb{C}\{x\}^{\theta}_{q;1}$ et $\mathbb{C}\{x\}_{q;1}$ sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{C}$. De plus, pour tous $\hat{f} \in \mathbb{C}\{x\}^{\theta}_{q;1}$ et $\hat{g} \in \mathbb{C}\{x\}^{\theta}_{q;1}$, on a $\mathcal{S}^{\theta}_{q;1}(\hat{f}+\hat{g}) = \mathcal{S}^{\theta}_{q;1}\hat{f} + \mathcal{S}^{\theta}_{q;1}\hat{g}$.

4.3.3 Cependant, l'ensemble $\mathbb{C}\{x\}^{\theta}_{q;1}$ *n'est pas stable* pour la multiplication. Voir *4.3.8* ci-dessous.

Considérons, par exemple, le carré de la série $\hat{f} := \sum_{n\geq 0} q^{n(n-1)/2}x^n$. On a $\hat{\mathcal{B}}_{q;1}\hat{f} = 1/(1-\xi)$ et donc $\hat{f} \in \mathbb{C}\{x\}_{q;1}$. Utilisant la relation (3.1.3a), on obtient

$$\hat{\mathcal{B}}_{q;1}(\hat{f}^2)(\xi) = \sum_{n\geq 0} \frac{\xi^n}{1-q^{-n}\xi};$$

d'où, $\hat{\mathcal{B}}_{q;1}(\hat{f}^2)$ représente, dans le disque unité $|\xi| < 1$, une fonction analytique que l'on notera φ. En plus, étant donné $m \in \mathbb{N}$, on a l'identité

$$\sum_{n\geq 0} \frac{\xi^n}{1-q^{-n}\xi} = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\xi^k}{1-q^{-k}\xi} + \xi^m \sum_{n\geq 0} \frac{(q^{-m}\xi)^n}{1-q^{-n}\xi}, \tag{4.3.4}$$

laquelle implique que φ peut se prolonger dans le disque $|\xi| < q^m$ en une fonction méromorphe dont les pôles, simples, sont $\xi = 1$, ..., q^{m-1}. On en déduit que la fonction φ peut se prolonger en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ avec des pôles simples dans $\{q^n : n \in \mathbb{N}\}$. Soit $\tilde{\varphi}$ cette fonction méromorphe ; il existe alors une fonction entière P telle que

$$\tilde{\varphi}(\xi) = \frac{P(\xi)}{\prod_{n\geq 0}(1-q^{-n}\xi)},$$

où $\prod_{n\geq 0}(1-q^{-n}\xi)$ est une fonction entière à croissance q-exponentielle d'ordre 1 et de type fini (*cf* [Ra2]). Notons $E_q = \prod_{n\geq 1}(1-q^{-n})$; compte tenu du résidu de la fonction $\tilde{\varphi}$ en chacun de ses pôles q^n, on a

$$P(q^n) = E_q q^{n^2} \prod_{k=1}^{n}(1-q^k) = (-1)^n E_q q^{3n^2/2+n/2} \prod_{k=1}^{n}(1-q^{-k}). \tag{4.3.5}$$

Définition 4.3.6 Soit $k > 0$; on dit qu'une fonction définie et analytique dans un ouvert connexe non borné de $\mathbb{C}$ a une *croissance q-exponentielle d'ordre k et de type fini* lorsqu'elle est du type $O(q^{\frac{k}{2}\log_q^2|\xi|+\mu\log_q|\xi|})$ avec $\mu \in \mathbb{R}$, pour ξ tendant vers l'infini dans ce secteur.

D'après des calculs directs (comme ceux de la preuve de la proposition *4.3.9* ci-dessous), on vérifie que $\tilde{\varphi}$ a une croissance q-exponentielle d'ordre 2 et de type fini dans tout voisinage sectoriel de $\mathbb{R}^-$ ne contenant pas $\mathbb{R}^+$. On en déduit que P est une fonction entière à croissance q-exponentielle d'ordre 3 et de type fini dans ce type de voisinage sectoriel. Ceci implique que P est *à croissance exponentielle d'ordre zéro* dans $\mathbb{C}$ (On pourrait également raisonner de la façon suivante : $\hat{f}^2$ est solution formelle d'une équation aux q-différences, $\hat{\mathcal{B}}_{q;1}(\hat{f}^2)$ vérifie donc une équation aux q-différences. On obtiendra que P est solution entière d'une équation aux q-différences à coefficients polynômiaux ; la croissance de P sera donnée par un théorème de Ramis [Ra2]. Voir [MZ] pour plus de détails).

Lemme 4.3.7 ([Li]) *Soit F une fonction entière à croissance exponentielle d'ordre zéro (on dit aussi à croissance sous-exponentielle). On note, pour chaque $r > 0$, $M(r) = \max_{|\xi|=r} |F(\xi)|$ et $m(r) = \min_{|\xi|=r} |F(\xi)|$. Alors pour tout $\eta > 0$ (petit), il existe une suite (r_n) de réels strictement positifs telle que*

$$(4.3.7a) \qquad r_n \to +\infty, \quad m(r_n) \geq (M(r_n))^{1-\eta} \qquad \square$$

En appliquant ce lemme à la fonction P et d'après la formule (4.3.5), on obtient que l'ordre de croissance q-exponentielle de P ne peut être inférieur à 3 dans aucun voisinage sectoriel de $\mathbb{R}^-$. En conclusion, $\tilde{\varphi}$ est à croissance q-exponentielle d'*ordre exact* 2 et de type fini dans tout voisinage sectoriel de $\mathbb{R}^-$ qui ne contient pas $\mathbb{R}^+$. D'où l'énoncé suivant :

4.3.8 Le carré de la série $\sum_{n\geq 0} q^{n(n-1)/2}x^n$ n'est Gq-sommable d'ordre 1 dans aucune direction de $\widetilde{\mathbb{C}}^*$.

Ceci prouve l'énoncé *4.3.3*.

Proposition 4.3.9 Soit $\hat{f} \in \mathbb{C}\{x\}^{\theta}_{q;1}$ et $\hat{g} \in \mathbb{C}\{x\}^{\theta}_{q;1}$. La fonction somme de la série $\hat{\mathcal{B}}_{q;1}\hat{f}\hat{g}$ peut être analytiquement prolongée dans un voisinage sectoriel de d_θ en une fonction qui possède une croissance q-exponentielle d'ordre 2 et de type fini.

Preuve – Notons $\hat{f} := \sum_{n\geq 0} a_n x^n \in \mathbb{C}\{x\}^{\theta}_{q;1}$, $\hat{g} := \sum_{n\geq 0} b_n x^n \in \mathbb{C}\{x\}^{\theta}_{q;1}$. Quitte à faire une homothétie sur la variable ξ (ou sur x au départ), on suppose que $a_n q^{-n^2/2} = O(1)$, $b_n q^{-n^2/2} = O(1)$ lorsque $n \to +\infty$. Sous ces hypothèses les séries entières $\hat{\mathcal{B}}_{q;1}\hat{f}$, $\hat{\mathcal{B}}_{q;1}\hat{g}$ et $\hat{\mathcal{B}}_{q;1}(\hat{f}\hat{g})$ convergent dans le disque unité.

Etant donné $m \in \mathbb{N}$, on notera $\hat{g}_m$ la m-ième somme partielle de $\hat{g}$. On pose $\hat{g}_{m+} = \hat{g} - \hat{g}_m$. D'après la formule (3.1.3a), on a

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{B}}_{q;1}(\hat{f}\hat{g}) &= \hat{\mathcal{B}}_{q;1}(\hat{f}\hat{g}_m) + \sum_{n\geq 0} a_n q^{-n(n-1)/2}\xi^n \hat{\mathcal{B}}_{q;1}\hat{g}_{m+}(\xi q^{-n}) \\ &= \sum_{n=0}^{m-1} b_n q^{-n(n-1)/2}\xi^n \hat{\mathcal{B}}_{q;1}\hat{f}(\xi q^{-n}) + \sum_{n\geq 0} a_n q^{-n(n-1)/2}\xi^n \hat{\mathcal{B}}_{q;1}\hat{g}_{m+}(\xi q^{-n}).\end{aligned}$$

Soit $S := S(\theta;\varepsilon)$ un voisinage sectoriel de d_θ sur lequel la fonction somme de $\hat{\mathcal{B}}_{q;1}\hat{f}$ (*resp.* $\hat{\mathcal{B}}_{q;1}\hat{g}$, $\hat{\mathcal{B}}_{q;1}\hat{g}_m$, $\hat{\mathcal{B}}_{q;1}\hat{g}_{m+}$) peut se prolonger analytiquement en une fonction, notée φ (*resp.* γ, γ_m, γ_{m+}), qui possède une croissance q-exponentielle d'ordre 1 et de type fini. Avec ces notations la formule précédente s'écrit

$$\mathcal{S}\hat{\mathcal{B}}_{q;1}(\hat{f}\hat{g})(\xi) = \sum_{n=0}^{m-1} b_n q^{-n(n-1)/2}\xi^n \varphi(\xi q^{-n}) + \sum_{n\geq 0} a_n q^{-n(n-1)/2}\xi^n \gamma_{m+}(\xi q^{-n}),$$

où $\mathcal{S}\hat{\mathcal{B}}_{q;1}(\hat{f}\hat{g})$ désigne la fonction somme de $\hat{\mathcal{B}}_{q;1}(\hat{f}\hat{g})$ dans le disque unité (comparer cette dernière formule à (4.3.4)).

Pour tout $m \in \mathbb{N}$, l'expression finie $\sum_{n=0}^{m-1} b_n q^{-n(n-1)/2}\xi^n \varphi(\xi q^{-n})$ définit une fonction analytique dans le domaine $S \cup D(0;1)$; cette fonction sera notée υ_m. Etant donné un point $\xi \in S \cup D(0;1)$, on désigne par m_ξ le nombre entier naturel le plus petit tel que $|\xi q^{-m_\xi}| < 1$. Lorsque $n \to +\infty$, on a $\gamma_{m_\xi +}(\xi q^{-n}) = O((\xi q^{-n})^{m_\xi})$. On en déduit que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n q^{-n(n-1)/2}\xi^n \gamma_{m_\xi +}(\xi q^{-n})$ est convergente. Considérons alors la fonction υ définie sur $S \cup D(0;1)$ par

$$\upsilon(\xi) := \upsilon_{m_\xi}(\xi) + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n q^{-n(n-1)/2}\xi^n \gamma_{m_\xi +}(\xi q^{-n}).$$

Il est clair que υ est analytique dans $S \cup D(0;1)$ et qu'elle coïncide avec la fonction $\mathcal{S}\hat{\mathcal{B}}_{q;1}(\hat f \hat g)$ dans $D(0;1)$. Par conséquent, on a obtenu un prolongement analytique de cette dernière fonction $\mathcal{S}\hat{\mathcal{B}}_{q;1}(\hat f \hat g)$ dans le secteur S.

Vérifions maintenant que υ possède une croissance q-exponentielle d'ordre 2 et de type fini dans S. Soit $\xi \in S$ arbitrairement fixé. On choisit $m \in \mathbb{N}$ tel que $q^{m-1} \le |\xi| < q^m$; on pose $m_\xi = m$. Vue la croissance de φ dans S, on a $|\varphi(\xi q^{-n})| < K q^{\frac12 (m-n)^2 + \mu(m-n)}$ pour tout entier naturel n strictement inférieur à m, où K et μ sont des constantes dépendant uniquement de φ et S. Il en résulte que $|\upsilon_{m_\xi}(\xi)| < K_1 q^{m^2 + \mu_1 m}$, avec K_1, μ_1 des constantes convenables. Un calcul similaire montrerait que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n q^{-n(n-1)/2}\xi^n \gamma_{m_\xi +}(\xi q^{-n})$ est dominée également par une quantité du type $K_2 q^{m^2+\mu_2 m}$. D'où la proposition. $\square$

4.3.10 Dans un article ultérieur ([MZ]), on démontrera que le produit de deux séries Gq-sommables d'ordre 1 est *Gq-multisommable* en deux niveaux (1 et 2).

5. Sommabilité des séries entières solutions formelles d'une équation aux q-différences.

5.1 L'une des séries Gq-sommables et non convergentes les plus simples est la série suivante : $\hat f := \sum_{n\ge 0} q^{n(n-1)/2} x^n$. Elle a été l'objet de notre étude dans la première partie de l'article. La fonction somme de sa transformée de q-Borel formelle est égale à $\frac{1}{1-\xi}$. Du théorème 4.2, on déduit que $\hat f \in \mathbb{C}\{x\}_{q;1}$ et $DS(\hat f) = \{2\pi k : k \in \mathbb{Z}\}$; voir le théorème 1.3 et l'énoncé *4.1.4*.

Soit $\Delta \in \mathbb{C}\{x\}[\sigma_q]$; on note $PN(\Delta)$ le polygone de Newton de Δ. Pour la définition, voir le paragraphe 0.3.1. Dans la suite, on supposera le plus souvent que $PN(\Delta)$ n'a qu'une seule pente et que celle-ci est égale à un. Nous allons étudier la sommabilité des séries entières $\hat f$ telles que $\Delta \hat f \in \mathbb{C}\{x\}$.

5.1.1 Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Les $\mathbb{C}[x]$-modules $\mathbb{C}[[x]]_{q;1}$, $\mathbb{C}\{x\}_{q;1}^\theta$, $\mathbb{G}_{q;1}^\theta$, $\mathbb{H}_{q;1}^\theta$ sont stables par σ_q et les opérateurs $\hat{\mathcal{B}}_{q;1}$, $\mathcal{B}_{q;1}$, $\mathcal{L}_{q;1}^\theta$, $\mathcal{S}_{q;1}^\theta$ commutent avec toute homothétie de rapport réel telle que σ_q.

Par conséquent, si $\hat f \in \mathbb{C}\{x\}_{q;1}^\theta$ est une solution, *formelle*, d'une équation aux q-différences, alors sa somme $\mathcal{S}_{q;1}^\theta \hat f$ l'est aussi et c'est une **solution analytique**.

Lemme 5.1.2 Soit Δ un opérateur aux q-différences d'ordre $n \ge 1$ et soit μ la pente la plus grande de $PN(\Delta)$. On suppose que $\mu \in \mathbb{Z}$. Alors il existe $r \in \mathbb{C}$ et $f \in \mathbb{C}\{x\}$ tels (1) $f(0) = 1$; (2) $y := q^{-\frac{\mu}{2}\log_q x(\log_q x - 1)} x^r f$ vérifie $\Delta y = 0$.

Preuve – Posons $e_{q;\mu} = q^{-\mu(\log_q x)(\log_q x-1)/2}$; on a $\sigma_q^j e_{q;\mu} = q^{-\mu j(j-1)/2}x^{-j\mu}e_{q;\mu}$ pour tout $j \in \mathbb{N}$. Avec $y = e_{q;\mu}z$ et $N = \min(0, -n\mu)$, on note $\bar{\Delta} \in \mathbb{C}\{x\}[\sigma_q]$ l'opérateur aux q-différences vérifiant $\Delta y = x^N e_{q;\mu}\bar{\Delta}z$. Par un calcul facile, on trouve que la plus grande pente de $PN(\bar{\Delta})$ est nulle. Sans perdre de généralité, on peut alors supposer que $\mu = 0$.

Soit donc $\Delta = \sum_{j=0}^{n}(\sum_{k\geq 0} a_{j,k}x^k)\sigma_q^j \in \mathbb{C}\{x\}[\sigma_q]$, où $a_{n,0}a_{j,0} \neq 0$ pour un certain $j < n$. On pose, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P_k(X) = \sum_{j=0}^{n} a_{j,k}X^j \in \mathbb{C}[X]$ de sorte que $\Delta = \sum_{k\geq 0} x^k P_k(\sigma_q)$ dans $\mathbb{C}[[x, \sigma_q]]$. Pour toute expression du type $\hat{y} =: x^\lambda \sum_{l\geq 0}\alpha_l x^l \in x^\lambda\mathbb{C}[[x]]$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$, on a $\Delta\hat{y} = x^\lambda \sum_{k,l\geq 0}\alpha_l P_k(q^{\lambda+l})x^{k+l}$. Soit alors q^r un zéro du polynôme P_0, tel que aucun nombre de la forme q^{r+l}, avec $l \in \mathbb{N}^*$, n'annule P_0. On obtient qu'il existe une solution formelle et une seule de $\Delta\hat{y} = 0$ de la forme $x^r(1 + \sum_{l\geq 1}\alpha_l x^l)$, les α_l étant déterminés successivement par : $\alpha_0 = 1$ et

$$(R_l) \ : \quad \alpha_l = -\frac{1}{P_0(q^{r+l})}\sum_{j=0}^{l-1}\alpha_j P_{l-j}(q^{r+j}) \quad \text{si } l \geq 1.$$

Puisque chacune des séries $\sum_{k\geq 0} a_{j,k}x^k$, $0 \leq j \leq n$, a un rayon de convergence non nul, les suites $(a_{j,k})_{k\in\mathbb{N}}$ peuvent être majorées par une suite géométrique. On en déduit aisément que pour $k < l$, k, $l \in \mathbb{N}$, on a $|P_k(q^{r+l-k})/P_0(q^{r+l})| \leq CA^k$, où C, A sont des constantes positives. Avec la relation de récurrence (R_l), on a $|\alpha_l| \leq C\sum_{j=0}^{l-1}|\alpha_j|A^{l-j}$. Soit alors $(\beta_l)_{l\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\beta_0 = 1$, $\beta_l = C\sum_{j=0}^{l-1}\beta_j A^{l-j}$ si $l \geq 1$. Posons $U(x) = \sum_{l\geq 0}\beta_l x^l \in \mathbb{C}[[x]]$; on a $U(x) = 1 + CxU(x)/(1 - Ax)$, *i.e* $U(x) = (1 - Ax)/(1 - Ax - Cx)$. Il en résulte que $U(x)$, donc $\sum_{l\geq 0}\alpha_l x^l$, ont un rayon de convergence non nul. D'où le lemme. □

Le résultat du lemme précédent a été déjà démontré par C. R. Adams (*cf* [Ad] p 375). Pour simplifier, on notera $\mathbb{C}\{x\}^1$ l'ensemble des séries entières de rayon de convergence non nul et qui valent 1 en $x = 0$.

Lemme 5.1.3 Etant donné $g \in \mathbb{C}\{x\}^1$, il existe une unique série $h \in \mathbb{C}\{x\}^1$ vérifiant la relation $h(qx)g(x) = h(x)$.

Preuve – La fonction définie par $h(x) := \prod_{n\geq 1} g^{-1}(xq^{-n})$ est analytique et vérifie l'équation fonctionnelle $h(qx)g(x) = h(x)$. Puisque toute série entière solution formelle $\hat{f}$ de cette équation est uniquement déterminée par la donnée du coefficient constant de $\hat{f}$, on obtient l'unicité de f. □

Proposition 5.1.4 Soit Δ un opérateur aux q-différences dont 1 est la seule pente du polygone de Newton. Alors il existe h_1, ..., $h_n \in \mathbb{C}\{x\}^1$ et α_1, ..., $\alpha_n \in \mathbb{C}^*$ tels que

$$(5.1.4a) \quad \Delta = \alpha_{n+1}x^m h_n^{-1}(qx)(x\sigma_q - \alpha_n)h_n...h_j^{-1}(qx)(x\sigma_q - \alpha_j)h_j...h_1^{-1}(qx)(x\sigma_q - \alpha_1)h_1,$$

où on désigne par $\alpha_{n+1}x^m$ le premier terme non nul du développement de Taylor de la fonction coefficient de σ_q^0 de Δ.

Preuve – Soit $y_0 := q^{-\frac{1}{2}\log_q x(\log_q x-1)}x^r f$ une solution de $\Delta y = 0$ obtenue dans le lemme 5.1.2 ; il existe alors un opérateur aux q-différences d'ordre $(n-1)$, noté Δ', tel que

$$(5.1.5) \qquad \Delta = \Delta'(\sigma_q - \frac{y_0(qx)}{y_0(x)}).$$

Soit $\frac{y_0(qx)}{y_0(x)} = \alpha x^{-1}g(x)$ avec $\alpha \in \mathbb{C}^*$, $g \in \mathbb{C}\{x\}^1$. D'après le lemme 5.1.3, on a $\sigma_q - \alpha x^{-1}g(x) = (xh(qx))^{-1}(x\sigma_q - \alpha)h$, où $h \in \mathbb{C}\{x\}^1$; la relation (5.1.5) devient alors $\Delta = \Delta_1(h_1^{-1}(qx))(x\sigma_q - \alpha)h$ où Δ_1 est un opérateur dont le polygone de Newton possède une seule pente. La décomposition (5.1.4a) s'obtient en itérant ce processus. $\square$

5.1.6 Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{C}^*$. On dit que α et β sont *q-congruents* et on note $\alpha \equiv_q \beta$, s'il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $\alpha = q^n\beta$. On a la propriété suivante : si $\alpha \not\equiv_q \beta$, alors pour tout couple $(f,g) \in \mathbb{C}\{x\}^1 \times \mathbb{C}\{x\}^1$, il existe $(u,v) \in \mathbb{C}\{x\}^1 \times \mathbb{C}\{x\}^1$ tel que

$$(x\sigma_q - \alpha f)(x\sigma_q - \beta g) = (x\sigma_q - \beta u)(x\sigma_q - \alpha v).$$

Cependant, cette propriété peut ne pas être assurée lorsque $\alpha \equiv_q \beta$. Ceci se voit dans la preuve du lemme 5.1.2.

5.1.7 Soit $IM(\Delta)$ l'ensemble des α_j obtenus dans la proposition 5.1.4. Soit $\alpha \in IM(\Delta)$. On note CQ_α la classe d'équivalence de α dans $IM(\Delta)$ pour la relation $\equiv_q$; le nombre d'éléments de CQ_α sera appelé la *q-multiplicité* de α relative à Δ. On a une partition $IM(\Delta) = CQ_{\alpha_1} \cup ... \cup CQ_{\alpha_\nu}$ de $IM(\Delta)$. Il est possible de vérifier que, dans la plupart des cas, $IM(\Delta)$ constitue un système complet d'*invariants formels* de Δ ; *cf 0.3.3* et [Ca].

Soit $DM(\Delta) := \{\arg \alpha_j + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}, j = 1, ..., n\}$. Etant donné $\theta \in DM(\Delta)$, on note $[\theta]$ l'ensemble des “plus grands représentants” de $d_\theta \cap IM(\Delta)$ pour la relation d'équivalence $\equiv_q$. En d'autres termes, pour tout $\alpha \in IM(\Delta) \cap d_\theta$, il existe un et un seul $\alpha' \in [\theta]$ tel que $\alpha = \alpha' q^m$ avec $-m \in \mathbb{N}$ ($\mathbb{N} \neq \mathbb{Z}$!).

5.1.8 Quitte à remplacer les *éléments simples* $(x\sigma_q - \alpha_j)$ par des termes du type $(x^k\sigma_q - \alpha)$ ($k \in \mathbb{Q}$, $\alpha \in \mathbb{C}^*$), on peut décomposer, en utilisant le lemme 5.1.2, *tout* opérateur aux q-différences sous la forme (5.1.4a) ; voir [MZ] pour plus de détails.

5.2 Afin de se servir de la proposition 5.1.4 , on va établir quelques résultats sur les opérateurs du premier ordre.

Lemme 5.2.1 Soit $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et $\hat{f} \in \mathbb{C}[[x]]$. On pose $\hat{c} := (x\sigma_q - \alpha)\hat{f}$. Si $\hat{c} \in \mathbb{C}\{x\}_{q;1}$, alors $\hat{f} \in \mathbb{C}\{x\}_{q;1}$ et $DS(\hat{f}) \subset \{\arg \alpha + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\} \cup DS(\hat{c})$.

Preuve – D'après la relation (3.1.2a), on a $\hat{\mathcal{B}}_{q;1}\hat{c} = (\xi - \alpha)\hat{\mathcal{B}}_{q;1}\hat{f}$, soit

$$\hat{\mathcal{B}}_{q;1}\hat{f} = (\hat{\mathcal{B}}_{q;1}\hat{c})/(\xi - \alpha). \tag{5.2.2}$$

En conséquence, la série $\hat{\mathcal{B}}_{q;1}\hat{f}$ a les mêmes propriétés d'analyticité et de croissance à l'infini que $\hat{\mathcal{B}}_{q;1}\hat{c}$ sauf dans la direction passant par le point d'affixe α. D'où le lemme. $\square$

Définition 5.2.3 Soit $\hat{f} \in \mathbb{C}\{x\}_{q;1}$ et soit $\theta \in DS(\hat{f})$. On définit $\mathcal{S}_{q;1}^{\theta+}\hat{f}$ (resp. $\mathcal{S}_{q;1}^{\theta-}\hat{f}$) comme étant la fonction Gq-somme de $\hat{f}$ dans une direction $d_{\theta'}$ infiniment voisine de $d_{\theta'}$ et qui reste *au-dessus* (resp. *au-dessous*) de d_θ : $\theta' > \theta$ (resp. $\theta' < \theta$).

Lemme 5.2.4 Conservons les notations du lemme 5.2.1. On suppose, en plus, que $\hat{c} \in \mathbb{C}\{x\}$. Alors, pour tout $\theta \in \{\arg \alpha + 2\pi k \ : \ k \in \mathbb{Z}\}$ on a

$$\mathcal{S}_{q;1}^{\theta+}\hat{f}(x) - \mathcal{S}_{q;1}^{\theta-}\hat{f}(x) = \lambda q^{-\frac{1}{2}(\log_q(x/\alpha_\theta)(\log_q(x/\alpha_\theta)-1)}, \tag{5.2.4a}$$

où λ désigne une constante, indépendante du choix de la valeur de $\theta \in \mathbb{R} \setminus DS(\hat{f})$, et $\alpha_\theta = |\alpha|e^{i\theta}$.

Preuve – On note φ la fonction somme de $\hat{\mathcal{B}}_{q;1}\hat{c}$, qui est une fonction entière. Soit $\theta = \arg\alpha + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. On fixe θ_-, $\theta_+ \in \mathbb{R}$ "infiniment proches" de θ tels que $\theta_- < \theta < \theta_+$. D'après la définition 5.2.3 et la relation (4.2.1), on obtient :

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{q;1}^{\theta-}\hat{f}(x) - \mathcal{S}_{q;1}^{\theta+}\hat{f}(x) &= \mathcal{L}_{q;1}^{\theta_-}(\frac{\varphi}{\xi-\alpha})(x) - \mathcal{L}_{q;1}^{\theta_+}(\frac{\varphi}{\xi-\alpha})(x)\\ &= \frac{q^{-1/8}}{\sqrt{2\pi\log q}}(\int_{d_{\theta_-}} - \int_{d_{\theta_+}})q^{-\frac{1}{2}(\log_q\frac{x}{\xi})(\log_q\frac{x}{\xi}-1)}\frac{\varphi(\xi)}{\xi-\alpha}\frac{d\xi}{\xi},\end{aligned}$$

ce qui donne, d'après la formule de Cauchy (ici $\alpha \equiv \alpha_\theta$ dans $\widetilde{\mathbb{C}}^*$),

$$\mathcal{S}_{q;1}^{\theta-}\hat{f}(x) - \mathcal{S}_{q;1}^{\theta+}\hat{f}(x) = iq^{-1/8}\sqrt{2\pi/\log q}\,\frac{\varphi(\alpha)}{\alpha}q^{-\frac{1}{2}\log_q(x/\alpha_\theta)(\log_q(x/\alpha_\theta)-1)}.$$

D'où la formule (5.2.4a). $\square$

5.2.5 Soit $\mathbb{E}$ l'ensemble des fonctions entières qui possèdent une croissance q-exponentielle d'ordre 1 et de type fini. On a évidemment $\mathbb{E} = \cap_{\theta\in[0,2\pi]}\mathbb{H}_{q;1}^{\theta}$.

Lemme 5.2.6 Soit $h \in \mathbb{C}\{x\}$ et $\hat{f} \in \mathbb{C}\{x\}_{q;1}$. On suppose que $\hat{\mathcal{B}}_{q;1}\hat{f} = \gamma/(\xi-\alpha)^n$, avec $\gamma \in \mathbb{E}$, $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors la somme de $\hat{\mathcal{B}}_{q;1}(h\hat{f})$ est donnée par l'expression suivante :

$$\sum_{m\geq 0}\big(\Phi_m + \sum_{j=1}^{n}\frac{a_{j,m}}{(q^{-m}\xi-\alpha)^j}\big) + \Phi \tag{5.2.6a}$$

avec $\Phi \in \mathbb{E}$, $\Phi_m \in \mathbb{C}[x]$ et $a_{j,m} \in \mathbb{C}$, la sommation étant uniformément convergente sur tout compact de $\mathbb{C}$ ne contenant aucun point de $\{\alpha q^m : m \in \mathbb{N}\}$.

Preuve – En développant γ au point $\xi = \alpha$, on obtient

$$\hat{\mathcal{B}}_{q;1}\hat{f} = \frac{a_1}{\xi - a} + ... + \frac{a_n}{(\xi-a)^n} + \Gamma$$

où $a_j \in \mathbb{C}$ et $\Gamma \in \mathbb{E}$. Soit $h = \sum_{m\geq 0} h_m x^m$; d'après la relation (3.1.3a), on a $\hat{\mathcal{B}}_{q;1}(h\hat{f})(\xi) = \sum_{m\geq 0} h_m q^{-m(m-1)/2}\xi^m\hat{\mathcal{B}}_{q;1}\hat{f}(q^{-m}\xi)$. Posons $\Phi = \hat{\mathcal{B}}_{q;1}(h\hat{\mathcal{L}}_{q;1}\Gamma)$; on a $\Phi \in \mathbb{E}$, d'après la proposition 3.1.4. On en déduit l'écriture suivante :

$$\hat{\mathcal{B}}_{q;1}(h\hat{f}) = \sum_{m\geq 0} h_m q^{-m(m-1)/2}\xi^m\big(\sum_{j=1}^{n}\frac{a_j}{(q^{-m}\xi-\alpha)^j}\big) + \Phi;$$

ici, la convergence de la sommation est évidente, grâce à la convergence de h. On obtient alors la formule (5.2.6a), avec

$$a_{j,m} = h_m q^{m(m+1)/2}\sum_{k=0}^{\max(m,n-j)}\binom{m}{k}a_{j+k}\alpha^k. \qquad \square \tag{5.2.7}$$

Théorème 5.3 *Soit Δ un opérateur aux q-différences dont 1 est la seule pente du polygone de Newton. Soit $\hat{f} \in \mathbb{C}[[x]]$ telle que $\Delta\hat{f} \in \mathbb{C}\{x\}$. On suppose que Δ est factorisé* *sous la forme (5.1.4a). On note* $DM(\Delta) = \{\arg \alpha_j + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}, 1 \leq j \leq n\}$. *On a les assertions suivantes.*

*5.3.1 (Gq-*sommabilité*)* $\hat{f} \in \mathbb{C}\{x\}_{q;1}$ *et* $DS(\hat{f}) \subset DM(\Delta)$.

*5.3.2 (*Multiplicateurs de Stokes*) Soit* $\theta \in DM(\Delta)$ *; pour tout* $\alpha \in [\theta]$ *on note* μ_α *sa q-multiplicité relative à* Δ *(voir 5.1.7 pour la définition). Il existe des séries convergentes* $g_{\alpha,m}$ *telles que*

$$\mathcal{S}_{q;1}^{\theta-}\hat{f}(x) - \mathcal{S}_{q;1}^{\theta+}\hat{f}(x) = \sum_{\alpha \in [\theta]} \sum_{m=0}^{\mu_\alpha - 1} g_{\alpha,m}(\log x)^m q^{-\frac{1}{2}\log_q(x/\alpha)(\log_q(x/\alpha)-1)}. \tag{5.3.2a}$$

Preuve – Soit la décomposition (5.1.4a) de Δ :

$$\Delta = a_{n+1}x^m h_n^{-1}(qx)(x\sigma_q - \alpha_n)h_n \ldots h_1^{-1}(qx)(x\sigma_q - \alpha_1)h_1,$$

où $m \in \mathbb{N}$, $h_j \in \mathbb{C}\{x\}^1$ et $\alpha \in \mathbb{C}^*$. Notons $\hat{f}_0 = \hat{f}$ et, pour tout entier j compris entre 1 et n, $\hat{f}_j = (\sigma_q h_j)^{-1}(x\sigma_q - \alpha)h_j\hat{f}_{j-1}$; on a $\hat{f}_n = \frac{1}{\alpha_{n+1}x^m}\Delta\hat{f} \in \mathbb{C}\{x\}$. En appliquant le lemme 5.2.1 et la proposition 4.3.1, on obtient successivement que $\hat{f}_{n-1} \in \mathbb{C}\{x\}_{q;1}$, ..., $\hat{f}_0 \in \mathbb{C}\{x\}_{q;1}$, ainsi que leurs directions singulières éventuelles.

En ce qui concerne la formule (5.3.2a), il suffit d'appliquer la formule de Cauchy et le lemme 5.2.6 aux fonctions $\hat{\mathcal{B}}_{q;1}\hat{f}_{n-1}$, $\hat{\mathcal{B}}_{q;1}\hat{f}_{n-2}$, ..., $\hat{\mathcal{B}}_{q;1}\hat{f}_0$ (voir aussi la preuve du lemme 5.2.4). □

En s'inspirant des études des points singuliers irréguliers des équations différentielles linéaires analytiques, on introduit la définition suivante.

Définition 5.3.3 On appellera *direction de Stokes* de l'opérateur Δ toute direction d_θ avec $\theta \in DM(\Delta)$; les fonctions g de la formule (5.3.2a) seront appelées *les multiplicateurs de Stokes dans la direction* d_θ.

6. "Petites solutions" d'une équation aux q-différences. Derniers commentaires.

6.1 Lorsque l'on compare deux solutions Gq-sommes d'une solution formelle d'une équation aux q-différences, la fonction différence, solution de l'équation homogène associée, est majorée par une somme de deux fonctions à croissance q-exponentielle d'ordre 1 et de type fini, d'après *4.1.2*. Ceci nous conduit à étudier les solutions soumises à certaines conditions de croissance, pour les équations linéaires aux q-différences sans second membre.

Lemme 6.1.1 Soit $\alpha \in \mathbb{C}^*$ *et* $f \in \widetilde{\mathbb{O}}$. *On suppose remplies les deux conditions suivantes:*

(i) $f(qx) = \alpha f(x)$ *au voisinage de* $x = 0$ *;*

(ii) f *est à croissance "modérée" en 0 : il existe* μ, ν *réels tels que* $f(x) = O(x^{\mu - i\nu})$ *pour* $|x| \to 0$.

Alors $f = cx^{\frac{2\pi ki}{\log q} + \log_q \alpha}$ *avec* $c \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Preuve – En itérant la relation (i), on a $f(q^n x) = \alpha^n f(x)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Il en résulte que la fonction f se prolonge en une fonction définie et analytique sur $\widetilde{\mathbb{C}}^*$ tout entier. De plus, d'après la condition (ii) on a $f(x) = O(x^{\mu'} e^{\nu \arg x})$ dans $\widetilde{\mathbb{C}}^*$, où $\mu' \in \mathbb{R}$. En considérant la fonction correspondante $g(z) := f(q^z)$ dans le plan complexe des z, ces conditions se traduisent en celles-ci : $g(z+1) = \alpha g(z)$ et $g(z) = O(q^{\mu' \Re z + \nu \Im z})$. On en déduit qu'il existe un unique entier relatif k et un nombre complexe tels que $g(z) = cq^{(\frac{2\pi k i}{\log q} + \log_q \alpha) z}$, d'où $f(x) = cx^{\frac{2\pi k i}{\log q} + \log_q \alpha}$. $\square$

Lemme 6.1.2 Soit $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et $f \in \widetilde{\mathbb{O}}$. On suppose remplies les deux conditions suivantes :

(i) $xf(qx) = \alpha f(x)$ au voisinage de $x = 0$;

(ii) f est à décroissance q-exponentielle d'ordre 1 et de type fini dans une direction d_θ (voir la définition 2.2.3).

Alors il existe $\lambda \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{Z}$ tels que $f(x) = \lambda q^{-\frac{1}{2}(\log_q(x/(\alpha e^{2k\pi i}))(\log_q(x/(\alpha e^{2k\pi i}))-1)}$.

Preuve – On suppose que f n'est pas identiquement nulle. Considérons la fonction

$$f_0 := q^{-\frac{1}{2}(\log_q(x/\alpha)(\log_q(x/\alpha)-1)};$$

elle vérifie la condition (i) ci-dessus, donc f/f_0 est solution de l'équation $y(qx) = \alpha y(x)$. De plus, la condition (ii) implique que f/f_0 est à croissance modérée dans le sens du lemme 6.1.1, ce qui donne $f = cq^{(\frac{2\pi k i}{\log q} + \log_q \alpha) \log_q x} f_0$. D'où le résultat cherché. $\square$

6.2. On termine l'article par quelques commentaires.

6.2.1 Soit $\hat{f} \in \mathbb{C}[[x]]$ et $\Delta \in \mathbb{C}\{x\}[\sigma_q]$; on suppose que $\Delta \hat{f} \in \mathbb{C}\{x\}$. Posons $x = q^t$; la série $\hat{f}$ se transforme en une série en q^t, qui vérifie une équation aux différences finies linéaire à coefficients analytiques dans un demi-plan à gauche. Sommer la série $\hat{f}$ en $x = 0$, c'est alors sommer cette (trans-)série en la variable t à l'infini dans ce demi-plan. Il est naturel de poser la question suivante : a-t-on une interprétation de la Gq-sommation dans un language parlant des transséries ?

6.2.2 L'hypothèse '$q > 1$' peut être remplacée par '$|q| > 1$'. Sous cette dernière hypothèse, on utilisera, à la place de la direction d_θ (resp. le voisinage sectoriel $S(\theta; \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$) ($\theta \in \mathbb{R}$), l'ensemble $\{q^{u+i\theta} \in \widetilde{\mathbb{C}}^* : u \in \mathbb{R}\}$ (resp. l'ouvert $\cup_{|\nu|<\varepsilon} d_{\theta+\nu}$) ; le disque $\tilde{D}(0; R)$ ($R > 0$) dans $\widetilde{\mathbb{C}}^*$ sera remplacé par $\{q^t \in \widetilde{\mathbb{C}}^* : t \in \mathbb{C}, \Re(t) < \Re(\log_q R)\}$. Le symbole $q^{\frac{1}{2}\log_q x(\log_q x - 1)}$ continuera à jouer le rôle de la fonction q-exponentielle (pour la croissance (ou décroissance) q-exponentielle d'ordre 1). L'estimation Gevrey figurant dans la formule (2.1.1a) de la définition du développement asymptotique q-Gevrey deviendra

$$|f(x) - \hat{f}_n(x)| < CA^n |q|^{\frac{1}{2}[n^2 + (\Im(\log_q(xq^{-i\theta})))^2 (1 + (\frac{\arg q}{\log |q|})^2]} |x|^n.$$

Nous aurons, mutatis mutandis, une version plus générale de la Gq-sommation, dont nous laissons les détails au lecteur.

6.2.3 Dans cet article, la méthode de Gq-sommation a été décrite seulement pour les séries entières q-Gevrey d'ordre 1, et c'est pourquoi, dans les deux dernières parties, on s'est limité aux opérateurs aux q-différences qui sont composés d'*éléments simples* du type $x\sigma_q - \alpha$ ($\alpha \neq 0$). Dans le cas général, puisque les solutions séries entières sont q-Gevrey d'ordre s quelconque, les éléments simples correspondants sont alors du type $(x^k \sigma_q - \alpha)$ ($k = 1/s$). Ceci conduit à généraliser (en substituant q par q^s) les opérateurs $\hat{\mathcal{B}}_{q;1}$, $\mathcal{B}^\rho_{q;1}$, $\mathcal{L}^\theta_{q;1}$ en $\hat{\mathcal{B}}_{q;s}$, $\mathcal{B}^\rho_{q;s}$, $\mathcal{L}^\theta_{q;s}$. On aura besoin d'opérateurs notés $\mathcal{S}^\theta_{q;s}$. C'est dans cette perspective que l'on a noté plus haut, de façon peu lourde, $\mathcal{S}^\theta_{q;1}$ au lieu de noter simplement $\mathcal{S}^\theta_q$.

Après l'extension de la méthode de Gq-sommation au niveau k quelconque, on pourra appliquer cette méthode à une équation linéaire aux q-différences de la manière suivante : on factorise l'opérateur aux q-différences en éléments simples et on compose les opérateurs de sommation de différents niveaux. Ces problèmes feront l'objet d'un article ultérieur ([MZ]). La multiplicité des niveaux nécessite le passage à la notion de *multisommabilité*.

Références.

[Ad] **Adams C. R., 1931.** Linear q-Difference Equations, *Bull. A. M. S.*, p. 361-382.

[A1] **André Y., 1997.** Séries Gevrey de type arithmétique (I: théorèmes de pureté et de dualité), *preprint*.

[A2] **André Y, 1997.** Séries Gevrey de type arithmétique (II: transcendance sans transcendance), *preprint*.

[BBRS] **Balser W., Braaksma B.J.L., Ramis J.-P. et Sibuya Y., 1991.** Multisummability of formal power series solutions of linear ordinary differential equations, *Asymptotic Analysis*, 5, p. 27-45.

[Bé] **Bézivin J.-P., 1993.** Sur les équations fonctionnelles aux q-différences, *Aequationes Mathematicae*, 43, p. 159-176.

[Bi] **Birkhoff D. G., 1913.** The Generalized Riemann Problem for Linear Differential Equations and the Allied Problems for Linear Difference and q-Difference Equations, *Proc. Am. Acad.*, 49, p. 521-568.

[Ca] **Carmichael R.D., 1912.** The General Theory of Linear q-Difference Equations, *Am. Jour. Math.*, 34, p. 146-168.

[FJ] **Fleinert-Jensen M., 1993.** *Calcul d'indices Gevrey pour des équations aux q-différences*, Prépublication de l'IRMA de Strasbourg.

[FRZ] **Fahim A., Ramis J.-P. et Zhang C., –.** Phénomène de Stokes et groupe de Galois aux q-différences local, *en préparation*.

[Li] **Littlewood J. E., 1907.** On the asymptotic approximation to integral functions of zero order, *Proc. London Math. Soc.*, Serie 2, no 5, p. 361-410.

[Ma] **Malgrange B., 1995.** Sommation des séries divergentes, *Expositiones Mathematicae*, 13, no 2-3, p. 163-222..

[MZ] **Marotte F. et Zhang C., 1998.** Multisommabilité des séries entières solutions formelles d'une équation aux q-différences linéaire analytique, Prépublication, La Rochelle.

[MR] **Martinet J. et Ramis J.-P., 1991.** Elementary acceleration and multisummability I, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, Vol. 54, no 4, p. 331-401.

[Ra1] **Ramis J.-P., 1980.** Les séries k-sommables et leurs applications, *Complex Analysis, Microlocal Calculus and Relativistic Quantum Theory, Lecture Notes in Physics*, 126, p. 178-199.

[Ra2] **Ramis J.-P., 1992.** About the growth of entire functions solutions of linear algebraic q-difference equations, *Annales de la Fac. de Toulouse*, Série 6, Vol. I, no 1, p. 53-94.

[Ra3] Ramis J.-P., 1993. *Séries divergentes et théories asymptotiques*, *Panoramas et synthèses* 0, Supplément au Bulletin de la S.M.F. 121.

[Ti] Titchmarsh E. C., 1939. *The Theory of Functions*, Second edition, Oxford Science Publications.

[To] Tougeron J.-Cl., 1990. *An introduction to the theory of Gevrey expansions and to the Borel-Laplace transform with some applications*, Preprint University of Toronto, Canada.

[Tr] Trjitzinsky W.J., 1933. Analytic Theory of Linear q-Difference Equations, *Acta Mathematica*, 61, p. 1-38.

[WW] Whittaker E. T. et Watson G. N., 1927. *A Course of Modern Analysis*, Cambridge Univ. Press.

[ZZ] Zeng J. et Zhang C., 1994. A q-analog of Newton's series, Stirling functions and eulerian functions, *Results in Math.*, 25, p. 370-391.

Annexe : Quelques notations utilisées dans l'article.

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$: les ensembles habituels de nombres ;

$\widetilde{\mathbb{C}}^*$: la surface de Riemann du logarithme ;

$\log x$: la détermination principale du logarithme ;

$\log_q x :=\frac{\log x}{\log q}$, $\arg_q x = \Im(\log_q x)$;

$D(0;R)$: le disque de centre 0 et de rayon R dans $\mathbb{C}$;

$\tilde{D}(0;R)$: le disque de centre "0" et de rayon R dans $\widetilde{\mathbb{C}}^*$;

d_θ : la direction issue de "0" passant par le point d'affixe $e^{i\theta}$ dans $\widetilde{\mathbb{C}}^*$;

$S(\theta;\varepsilon)$: le secteur ouvert de $\widetilde{\mathbb{C}}^*$, bissecté par d_θ et abordant les directions $d_{\theta\pm\varepsilon}$;

$\mathbb{C}[[x]]$: l'ensemble des séries entières, convergentes ou non ;

$\mathbb{C}[[x]]_{q;1}$: l'ensemble des séries entières q-Gevrey d'ordre 1 ;

$\mathbb{C}\{x\}$: l'ensemble des séries entières de rayon de convergence non nul ;

$\mathbb{E}_{q;1}$: l'ensemble des fonctions entières qui ont une croissance q-exponentielle d'ordre 1 et de type fini à l'infini ;

$\mathbb{H}_{q;1}^{\theta}$: l'ensemble des séries entières convergentes dont les sommes peuvent être prolongées analytiquement dans un secteur $S(\theta;\varepsilon)$ en une fonction à croissance q-exponentielle d'ordre 1 et de type fini ;

$\widetilde{\mathbb{O}}_R$: l'ensemble des fonctions analytiques dans le disque $\tilde{D}(0;R)$;

$\widetilde{\mathbb{O}} :=\cup_{R>0}\widetilde{\mathbb{O}}_R$;

$\mathbb{A}_{q;1}^{\theta}$: l'ensemble des fonctions possèdant un développement asymptotique q-Gevrey d'ordre 1 dans d_θ ;

$\mathbb{G}_{q;1}^{\theta}$: l'ensemble des fonctions possèdant un développement asymptotique q-Gevrey d'ordre 1 dans toutes directions voisines de d_θ ;

$\mathbb{C}\{x\}_{q;1}^{\theta}$: l'ensemble des séries entières Gq-sommables d'ordre 1 dans la direction d_θ ;

$\sim_{q;1}^{\theta}$: une fonction est q-Gevrey asymptotique dans la direction d_θ à une série entière ;

$DS(\hat{f})$: l'ensemble des directions singulières d'une série entière $\hat{f}$;

$\mathbb{C}\{x\}_{q;1}$: l'ensemble des séries Gq-sommables d'ordre 1 ;

$\hat{\mathcal{B}}_{q;1}$: la transformation de q-Borel formelle ;

$\mathcal{B}_{q;1}^{\rho}$: la transformation de q-Borel analytique en $0 \in \widetilde{\mathbb{C}}^*$;

$\mathcal{L}_{q;1}^{\theta}$: la transformation de q-Laplace ;

$\mathcal{S}_{q;1}^{\theta}$: la Gq-somme d'une série entière dans la direction d_θ (non singulière).

Multisommabilité des séries entières solutions formelles d'une équation aux q-différences linéaire analytique *

Résumé. Nous introduisons une version q-analogue du procédé d'accélération élémentaire d'Ecalle-Martinet-Ramis et définissons la notion de série entière Gq-multisommable. Nous montrons que toute série entière solution formelle d'une équation aux q-différences linéaire analytique est Gq-multisommable.

Summary (Multisummability of formal power series solutions of linear analytic q-difference equations). We introduce a q-analogous version of the elementary acceleration method of Ecalle-Martinet-Ramis and define the Gq-multisummable power series. We show that every formal power series satisfying a linear analytic q-difference equation is Gq-multisummable.

Introduction.

Soit $q > 1$ fixé. On considère une équation aux q-différences, linéaire, avec ou sans second membre, à coefficients analytiques à l'origine de $\mathbb{C}$. Dans [Zh], on introduit la notion de développement asymptotique q-Gevrey d'ordre 1 et celle de série entière Gq-sommable. On établit la version q-analogue suivante d'un résultat de J.-P. Ramis [Ra1] : toute série entière solution formelle d'une équation aux q-différences est Gq-sommable d'ordre 1 dans le cas où le polygone de Newton associé admet une unique pente égale à 1. L'objectif du présent article est de montrer que cet énoncé demeure vrai dans le cas général, quitte à changer Gq-sommable en Gq-multisommable. Ce dernier constitue une version q-analogue d'un résultat récent sur les solutions formelles d'une équation différentielle linéaire analytique en 0 (*cf* [BBRS]).

L'article comprend trois parties. Dans la première partie, nous étudions un q-analogue de la transformation de Borel-Laplace d'ordre strictement positif quelconque. Après l'extension à l'ordre arbitraire de la notion de série Gq-sommable d'ordre 1 de [Zh], nous introduisons la nouvelle notion de produits de q-convolution (voir 1.4) ; elle jouera un rôle important dans les prochaines parties.

---

* Ecrit en collaboration avec Fabienne Marotte, l'article va être publié dans *Ann. Inst. Fourier*, fascicule 5 ou 6.

Mots clés et A.M.S. Classification. Développement asymptotique – Equation aux q-différences – Multisommabilité – Produit de q-convolution – Transformation de q-Borel – Transformation de q-Laplace – Accélération – Estimations Gevrey.

Keywords and Subject Classification. Asymptotic expansion – q-difference equation – Multisummability – q-convolution product – q-Borel transformation – q-Laplace transformation – Acceleration – Gevrey estimates.

30E99 – 33D10 – 39B22 – 40G99.

Dans la seconde partie, nous examinons la Gq-sommabilité du carré de la série théta de Jacobi tronquée à gauche, $(\sum_{n\geq 0} q^{n(n-1)/2}x^n)^2$, ce qui fournit un exemple de série entière ne s'écrivant pas comme somme de séries Gq-sommables de niveaux simples (Théorème 2.2.1). Nous définissons ensuite la notion de série entière Gq-multisommable en combinant les transformations de q-Borel et de q-Laplace de différents niveaux, c'est-à-dire en introduisant des q-analogues des accélérateurs élémentaires étudiés par J. Ecalle ([Ec], Chapitre 2), J. Martinet et J.-P. Ramis ([MR2]).

Dans la dernière partie, nous montrons la Gq-multisommabilité de toute série entière solution formelle d'une équation aux q-différences linéaire analytique (Théorèmes 3.3.2, 3.3.5). La preuve de ce résultat repose essentiellement sur le fait que tout opérateur aux q-différences peut être décomposé en produit de plusieurs opérateurs analytiques aux q-différences d'ordre 1. Nous expliquons également comment nous servir de cette factorisation pour former un système fondamental de solutions formelles.

En nous inspirant de l'article [Tr] de W. J. Trjitzinsky, nous avons étudié diverses factorisations formelles d'un opérateur aux q-différences. Vue la complexité des calculs, nous n'avons pas inclus ce travail dans le corps du présent article. Les résultats présentés ici constituent une suite de l'article [Zh], dont les résultats seront précédés de I. Nous espérons que nos travaux puissent servir à l'étude du phénomène de Stokes et du groupe de Galois aux q-différences local en 0 ; ceci est en cours d'étude.

Une des premières versions de l'article a été envoyée à *Ann. Inst. Fourier* durant l'été 1998 ; nous avons reçu de nombreuses remarques importantes de la part du referee anonyme désigné par la revue ; nous le remercions vivement.

Signalons enfin qu'une partie des résultats de l'article a été présentée dans la Note [MZ].

1. Transformations de Borel-Laplace q-analogues d'ordre s ($s > 0$).

Dans toute la partie, k et s désignent un couple de nombres réels positifs tel que $ks = 1$, θ désigne un nombre réel quelconque.

1.1. *Quelques définitions et notations.* En vue d'adapter la méthode de Gq-sommation à la classe des séries q-Gevrey d'ordre s, nous avons besoin de généraliser certaines notations de notre premier article sur le même sujet ([Zh]). Conscients du désarroi éventuel que peut provoquer la complexité de la liste suivante de notations, nous renvoyons le lecteur à ce dernier article pour retrouver les étapes conduisant à nos notations dans le cas $s = 1$.

1.1.1. On définit *la tranformation de q-Borel formelle d'ordre s (ou de niveau k)*, notée $\hat{\mathcal{B}}_{q;s}$, comme étant l'application linéaire de $\mathbb{C}[[x]]$ dans $\mathbb{C}[[\xi]]$ qui fait correspondre, à chaque monôme x^n, le monôme $q^{-sn(n-1)/2}\xi^n$. Son inverse est noté $\hat{\mathcal{L}}_{q;s}$, et sera appelé *la transformation de q-Laplace formelle d'ordre s.*

Notons $\mathbb{C}[[x]]_{q;s}$ l'ensemble des séries entières q-Gevrey d'ordre s ; c'est l'image de $\mathbb{C}\{\xi\}$ par $\hat{\mathcal{L}}_{q;s}$.

1.1.2. On désigne respectivement par $\tilde{\mathbb{C}}$ la surface de Riemann du logarithme et par log la détermination principale de celui-ci. Par définition, on note $\frac{\log x}{\log q} = \log_q x = \log_q |x| + i \arg_q x$.

On note $d_\theta := \{x \in \tilde{\mathbb{C}} : \arg x = \theta\}$ la *direction* d'argument θ. On appelle *voisinage sectoriel de* d_θ toute partie de $\tilde{\mathbb{C}}$ contenant un secteur ouvert du type $\{x \in \tilde{\mathbb{C}} : |\arg x - \theta| < \varepsilon\}$, où $\varepsilon > 0$.

On appelle *germe de fonction analytique en* $0 \in \tilde{\mathbb{C}}$ toute fonction définie et analytique dans un ouvert du type "disque en colimaçon" $\tilde{D}(0; R) := \{x \in \tilde{\mathbb{C}} : |x| < R\}$, où $R > 0$ arbitraire ; on note $\tilde{\mathbb{O}}$ l'ensemble de ces germes de fonctions.

1.1.3. Soit $\varphi : V \to \mathbb{C}$ une fonction définie sur une partie non radialement bornée V de $\tilde{\mathbb{C}}$. Par définition, on dit que φ admet à l'infini dans V une *croissance q-exponentielle d'ordre k et de type fini* si pour tout $R > 0$, il existe des constantes $\mu \in \mathbb{R}$, $K > 0$ telles que, si $\xi \in V$ et si $|\xi| > R$, alors $|\varphi(\xi)| \leq K|\xi^\mu q^{\frac{k}{2}\log_q^2 \xi}|$.

On note $\tilde{\mathbb{H}}^\theta_{q;s}$ l'ensemble des fonctions analytiques φ dans un voisinage sectoriel de d_θ et qui vérifient les deux conditions suivantes :

(i) φ admet un développement asymptotique (au sens de Poincaré) en 0 dans un secteur bissecté par d_θ ;

(ii) φ admet à l'infini une croissance q-exponentielle d'ordre k et de type fini dans ce secteur.

On note $\mathbb{H}^\theta_{q;s}$ l'ensemble constitué des éléments φ de $\tilde{\mathbb{H}}^\theta_{q;s}$ qui sont supposés, de plus, analytiques au voisinage de 0 dans $\mathbb{C}$. On note enfin $\mathbb{E}_{q;s}$ l'ensemble des *fonctions entières* ayant à l'infini une croissance q-exponentielle d'ordre k et de type fini dans le plan complexe. On a (par compacité de $[0, 2\pi]$) :

$$\mathbb{H}^\theta_{q;s} = \tilde{\mathbb{H}}^\theta_{q;s} \cap \mathbb{C}\{\xi\}, \quad \mathbb{E}_{q;s} = \cap_{\theta \in [0,2\pi]} \mathbb{H}_{q;s}.$$

1.1.4. Soit $f \in \tilde{\mathbb{O}}$. On dit que f admet un *développement asymptotique q-Gevrey d'ordre s dans la direction* d_θ et on écrit $f \in \mathbb{G}^\theta_{q;s}$, s'il existe une série entière $\hat{f} := \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ vérifiant : il existe des constantes $K > 0$, $A > 0$, $\varepsilon > 0$ telles que, pour tout $x \in \tilde{\mathbb{C}}$ de module suffisamment petit, tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $\vartheta \in]\theta - \varepsilon, \theta + \varepsilon[$, on :

$$\big|f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k\big| < K A^n q^{\frac{s}{2}n^2 + \frac{k}{2}(\arg_q(xe^{-i\vartheta}))^2} |x|^n.$$

Pour tout élément $f \in \mathbb{G}^\theta_{q;s}$, son développement asymptotique $\hat{f}$ est *unique* et appartient à l'espace $\mathbb{C}[[x]]_{q;s}$.

On désignera par $\tilde{\mathbb{G}}^\theta_{q;s}$ l'ensemble des fonctions $f \in \tilde{\mathbb{O}}$ qui vérifient la condition suivante : il existe une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ et une constante $\varepsilon > 0$ telles que, si $|x| \to 0$ et si $\vartheta \in]\theta - \varepsilon, \theta + \varepsilon[$, on ait :

$$\big|f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k\big| < K_n q^{\frac{k}{2}(\arg_q(xe^{-i\vartheta}))^2} |x|^n,$$

où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, K_n est une constante dépendant uniquement de n. On a $\mathbb{G}^\theta_{q;s} \subset \tilde{\mathbb{G}}^\theta_{q;s}$.

1.2. *Séries Gq-sommables d'ordre s.* Soit $\hat{f} \in \mathbb{C}[[x]]_{q;s}$.

1.2.1. Définition. On dit que $\hat{f}$ est *Gq-sommable d'ordre s dans la direction* d_θ si $\hat{f} \in \mathbb{C}[[x]]_{q;s}$ et si $\hat{\mathcal{B}}_{q;s}\hat{f} \in \mathbb{H}^\theta_{q;s}$; dans ce cas, on note $\hat{f} \in \mathbb{C}\{x\}^\theta_{q;s}$.

On dit que d_θ est une *direction singulière d'ordre s pour $\hat f$* et on note $\theta \in DS(\hat f)$ si $\hat{\mathcal{B}}_{q;s}\hat f \notin \mathbb{H}^\theta_{q;s}$.

La série $\hat f$ est dite *Gq-sommable d'ordre s* et on note $\hat f \in \mathbb{C}\{x\}_{q;s}$, si $DS(\hat f)\cap[0,2\pi]$ est fini.

1.2.2. A l'aide de la proposition I-3.1.4 (avec q changé en q^s), on obtient que $\hat f$ a un rayon de convergence non nul si, et seulement si, $\hat{\mathcal{B}}_{q;s}\hat f \in \mathbb{E}_{q;s}$. Il vient aussitôt que pour tout θ :

$$\mathbb{C}\{x\} \subset \mathbb{C}\{x\}^\theta_{q;s} \subset \mathbb{C}[[x]]_{q;s}.$$

On peut vérifier que $\hat f \in \mathbb{C}\{x\}$ si, et seulement si, $DS(\hat f)=\emptyset$ (*cf* I-4.1.4).

1.2.3. Théorème. Les deux conditions suivantes sont équivalentes.

(i) La série $\hat f$ est Gq-sommable d'ordre s dans la direction d_θ.

(ii) Il existe une fonction $f \in \mathbb{G}^\theta_{q;s}$ admettant $\hat f$ pour développement asymptotique q-Gevrey d'ordre s dans la direction d_θ.

De plus, le germe de fonction analytique f qui vérifie la condition (ii) ci-dessus est unique.

Idée de la preuve – On utilisera une version q-analogue de la transformation de Borel-Laplace pour lier les fonctions $f \in \mathbb{G}^\theta_{q;s}$ et $\hat{\mathcal{B}}_{q;s}\hat f \in \mathbb{H}^\theta_{q;s}$; voir plus loin les propositions 1.3.3, 1.3.6 et le théorème 1.3.7. □

1.2.4. La fonction f du théorème 1.2.3 sera appelé *Gq-somme d'ordre s de $\hat f$ dans la direction d_θ* et sera notée $\mathcal{S}^\theta_{q;s}\hat f$. On obtient ainsi une application $\mathcal{S}^\theta_{q;s} : \mathbb{C}\{x\}^\theta_{q;s} \to \mathbb{G}^\theta_{q;s}$ qui vérifie, entre autres, la propriété suivante : *si $\hat f \in \mathbb{C}\{x\}$, alors $\mathcal{S}^\theta_{q;s}\hat f$ est la somme habituelle de $\hat f$.* Ceci résulte du théorème précédent. Pour d'autres propriétés algébriques sur $\mathcal{S}^\theta_{q;s}$, voir *1.4.2.*

1.3. *Définition de $\mathcal{B}^\theta_{q;s}$ et de $\mathcal{L}^\theta_{q;s}$.* On interprète l'opérateur de sommation $\mathcal{S}^\theta_{q;s}$ au moyen d'une transformation de Laplace analytique q-analogue d'ordre s. On étudiera ensuite l'inverse de cette dernière transformation.

1.3.1. Lemme. Soit φ une fonction continue de $[0,\infty e^{i\theta}[$ dans $\mathbb{C}$. On suppose qu'il existe $\mu\in\mathbb{R}$ tel que $\varphi(\xi)=O(\xi^\mu q^{\frac k2 \log_q^2\xi})$ pour ξ tendant vers l'infini sur d_θ. Si l'on pose

$$\mathcal{L}^\theta_{q;s}\varphi(x) := \frac{q^{-1/(8k)}\sqrt{k}}{\sqrt{2\pi \log q}}\int_{d_\theta} q^{-\frac k2(\log_q\frac x\xi)(\log_q\frac x\xi-\frac1k)}\varphi(\xi)\frac{d\xi}{\xi},$$

alors $x\mapsto \mathcal{L}^\theta_{q;s}\varphi(x)$ définit une fonction analytique dans le disque $\tilde D(0;q^{(1/2-\mu)/k})$ de $\tilde{\mathbb{C}}$ qui vérifie la propriété suivante : pour tout $R\in]0,q^{(1/2-\mu)/k}[$, il existe $C_R>0$ tel que l'on ait, pour tout $x\in\tilde D(0;R)$:

$$|\mathcal{L}^\theta_{q;s}\varphi(x)| < C_R q^{\frac k2(\arg_q(xe^{-i\theta}))^2}.$$

Preuve – Quitte à faire une rotation d'angle $(-\theta)$ sur ξ et x, on peut supposer que $\theta=0$. Par hypothèse, il existe $K>0$ vérifiant d'une part $|\varphi(\xi)|<K$ si $\xi\in[0,1]$, et d'autre part $|\varphi(\xi)|<K\xi^\mu q^{\frac k2\log_q^2\xi}$ si $\xi\geq1$. En écrivant $\int_0^\infty=\int_0^1+\int_1^\infty$, on obtient :

$$\left|\int_0^\infty q^{-\frac k2(\log_q\frac x\xi)(\log_q\frac x\xi-\frac1k)}\varphi(\xi)\frac{d\xi}{\xi}\right| < Kq^{\frac k2\arg_q^2 x}\int_0^\infty q^{-\frac k2\log_q\xi(\log_q\xi+\frac1k)}\frac{d\xi}{\xi}+$$
$$+K\left|q^{-\frac k2\log_q x(\log_q x-\frac1k)}\right|\int_1^\infty \xi^{k\log_q|x|+\mu-1/2}\frac{d\xi}{\xi}.$$

Il en résulte que, d'une part, la fonction $\mathcal{L}^\theta_{q;s}\varphi(x)$ est bien définie pour $|x| < q^{(1/2-\mu)/k}$ et, d'autre part, elle vérifie la propriété de croissance annoncée. □

1.3.2. Par définition, on appelle $\mathcal{L}^\theta_{q;s}$ *la transformation de q-Laplace analytique d'ordre s dans la direction* d_θ.

1.3.3. Proposition. Sous l'hypothèse du lemme 1.3.1, si l'on suppose, de plus, que φ *admette un développement asymptotique (au sens de Poincaré)* $\hat\varphi$ *pour* ξ *en 0 dans un voisinage sectoriel de* d_θ*, alors* $\mathcal{L}^\theta_{q;s}\varphi \in \tilde{\mathbb{G}}^\theta_{q;s}$ *et son développement asymptotique est égale à la transformée* $\hat{\mathcal{L}}_{q;s}\hat\varphi$.

En particulier, si $\varphi \in \mathbb{H}^\theta_{q;s}$ *(resp.* $\mathbb{E}_{q;s}$*), alors la transformée* $\mathcal{L}^\theta_{q;s}\varphi$ *appartient à l'ensemble* $\mathbb{G}^\theta_{q;s}$ *et admet* $\hat{\mathcal{L}}_{q;s}\hat\varphi$ *pour développement asymptotique q-Gevrey d'ordre s dans* d_θ *(resp. pour développement de Taylor en l'origine du plan complexe).*

Preuve – Soit $n \in \mathbb{N}$. On remarque que, d'une part,

$$\mathcal{L}^\theta_{q;s}\xi^n(x) = q^{sn(n-1)/2}x^n$$

et d'autre part, si une fonction ϕ vérifie le lemme 1.3.1 et telle que $\phi(\xi) = O(\xi^n)$ pour $\xi \to 0$ dans d_θ, alors il existe $K > 0$ tel que

$$|\mathcal{L}^\theta_{q;s}\phi(x)| \le K q^{\frac{k}{2}(\arg_q(xe^{-i\theta}))^2}|x|^n$$

pour tout $x \in \tilde{\mathbb{C}}$ de module suffisamment petit. Ainsi, la proposition découle immédiatement du lemme 1.3.1 ci-dessus. □

Par conséquent, si l'on désigne par $\mathcal{S}^\theta$ l'opérateur de prolongement analytique le long de la direction d_θ, on a la relation

$$\mathcal{S}^\theta_{q;s} = \mathcal{L}^\theta_{q;s}\mathcal{S}^\theta\hat{\mathcal{B}}_{q;s}$$

sur $\mathbb{C}\{x\}^\theta_{q;s}$. Il en résulte que *la condition (i) implique (ii) dans le théorème 1.2.3.*

Etant donné $R > 0$, on désignera par $\partial^+\tilde D(0;R)$ le bord positivement orienté du disque $\tilde D(0;R)$ dans $\tilde{\mathbb{C}}$.

1.3.4. Lemme. Soit f une fonction définie et analytique dans $\tilde D(0;r)$ $(r>0)$ *; on suppose qu'il existe* $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$ *et* $K > 0$ *tels que, si* $|x| < r$*, alors* $|f(x)| < K|x|^n q^{\frac{k}{2}(\arg_q(xe^{-i\vartheta}))^2}$ *pour tout* $\vartheta \in]\theta-\varepsilon, \theta+\varepsilon[$*. Soit* $V = \{\xi \in \tilde{\mathbb{C}} : |\arg\xi - \theta| < \varepsilon\}$*. Soit* $0 < R < r$ *; on pose*

$$\mathcal{B}^\theta_{q;s}f(\xi) := -i\frac{q^{1/(8k)}\sqrt{k}}{\sqrt{2\pi\log q}}\int_{\partial^+\tilde D(0;R)} q^{\frac{k}{2}\log_q\frac{x}{\xi}(\log_q\frac{x}{\xi}-\frac{1}{k})}f(x)\frac{dx}{x}.$$

On a les assertions suivantes :

(i) $\xi \mapsto \mathcal{B}^\theta_{q;s}f(\xi)$ *définit une fonction analytique, à croissance q-exponentielle d'ordre k et de type fini à l'infini dans V, qui est indépendante de R ;*

(ii) pour tout $\rho \in]0,r[$*, il existe* $K_\rho > 0$ *tel que, si* $\xi \in V$ *et* $|\xi| < \rho q^{(-n+1/2)/k}$*, on ait :*

$$|\mathcal{B}^\theta_{q;s}f(\xi)| < K_\rho q^{-\frac{s}{2}n(n-1)}|\xi|^n.$$

Preuve – Par hypothèse, si $x = Re^{it}$ $(t \in \mathbb{R})$, on a :

$$\left|q^{\frac{k}{2}\log_q\frac{x}{\xi}(\log_q\frac{x}{\xi}-\frac{1}{k})}f(x)\right| < KR^n q^{\frac{k}{2}\log_q\frac{|\xi|}{R}(\log_q\frac{|\xi|}{R}+\frac{1}{k})}e^{-\frac{k}{2\ln q}(2t-\vartheta-\arg\xi)(\vartheta-\arg\xi)}.$$

On obtient que la fonction $\mathcal{B}_{q;s}^{\theta}f(\xi)$ est bien définie et à croissance q-exponentielle d'ordre k à l'infini dans le secteur V ; elle est analytique et, par Cauchy, elle est indépendante du choix de la petite valeur de R.

La seconde assertion résulte de la remarque suivante : si $|\xi| < \rho q^{(-n+1/2)/k}$, on a

$$\inf_{R\in]0,\rho[} R^n q^{\frac{k}{2}\log_q\frac{|\xi|}{R}(\log_q\frac{|\xi|}{R}+\frac{1}{k})} = q^{\frac{s}{2}(-n^2+n-\frac{1}{4})}|\xi|^n. \qquad \square$$

1.3.5. Par définition, on appelle $\mathcal{B}_{q;s}^{\theta}$ *la transformation de q-Borel analytique d'ordre s dans la direction* d_θ.

1.3.6. Proposition. (i) Si $f \in \tilde{\mathbb{G}}_{q;s}^{\theta}$, de développement asymptotique $\hat{f}$, alors $\mathcal{B}_{q;s}^{\theta}f \in \tilde{\mathbb{H}}_{q;s}^{\theta}$ et admet $\hat{\mathcal{B}}_{q;s}\hat{f}$ pour développement asymptotique en 0 dans un secteur bissecté par d_θ.

(ii) Si $f \in \mathbb{G}_{q;s}^{\theta}$, ayant $\hat{f}$ pour développement asymptotique q-Gevrey d'ordre s dans la direction d_θ, alors $\mathcal{B}_{q;s}^{\theta}f \in \mathbb{H}_{q;s}^{\theta}$ et admet $\hat{\mathcal{B}}_{q;s}\hat{f}$ pour développement de Taylor en $0 \in \mathbb{C}$.

(iii) Si f est la fonction somme d'une série entière $\hat{f}$ de rayon de convergence non nul, alors $\mathcal{B}_{q;s}^{\theta}f \in \mathbb{E}_{q;s}$ et c'est la fonction somme de la série $\hat{\mathcal{B}}_{q;s}\hat{f}$.

Preuve – La première assertion découle du lemme précédent et de la remarque suivante : pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\mathcal{B}_{q;s}^{\theta}x^n(\xi) = q^{-sn(n-1)/2}\xi^n.$$

Si $f \in \mathbb{G}_{q;s}^{\theta}$, on a $\hat{f} \in \mathbb{C}[[x]]_{q;s}$ donc $\hat{\mathcal{B}}_{q;s}\hat{f} \in \mathbb{C}\{\xi\}$; de la deuxième assertion du lemme 1.3.4 ci-dessus, on déduit que $\mathcal{B}_{q;s}^{\theta}f \in \mathbb{C}\{\xi\}$, d'où $\mathcal{B}_{q;s}^{\theta}f \in \mathbb{H}_{q;s}^{\theta}$.

L'assertion (iii) est immédiate. $\square$

1.3.7. Théorème. (i) Sur chacun des espaces $\mathbb{E}_{q;s}$, $\mathbb{H}_{q;s}^{\theta}$, $\tilde{\mathbb{H}}_{q;s}^{\theta}$, on a :

$$\mathcal{B}_{q;s}^{\theta} \circ \mathcal{L}_{q;s}^{\theta} = id.$$

(ii) Sur chacun des espaces $\mathbb{C}\{x\}$ (l'espace des germes de fonctions analytiques au voisinage de 0 dans $\mathbb{C}$), $\mathbb{G}_{q;s}^{\theta}$, $\tilde{\mathbb{G}}_{q;s}^{\theta}$, on a :

$$\mathcal{L}_{q;s}^{\theta} \circ \mathcal{B}_{q;s}^{\theta} = id.$$

Preuve – Nous vérifions seulement la première assertion, et nous donnerons à la fin de la preuve quelques indications pour la seconde.

Quitte à faire une rotation, on peut supposer que $\theta = 0$. Soit $\varphi \in \tilde{\mathbb{H}}_{q;s}^{0}$; on pose $\phi = \mathcal{B}_{q;s}^{0} \circ \mathcal{L}_{q;s}^{0}\varphi$, et on va vérifier que $\phi = \varphi$ sur $\mathbb{R}^+$, donc sur un voisinage sectoriel de $\mathbb{R}^+$ par unicité du prolongement analytique.

Soit $\xi \in \mathbb{R}^+$ fixé. Afin de combiner les intégrales définissant $\mathcal{B}$ et $\mathcal{L}$, on choisit d_- (resp. d_+) une direction suffisamment proche de $\mathbb{R}^+$, d'argument négatif (resp. positif). On décompose le chemin $\partial^+\tilde{D}(0;R)$ en deux parties notées Γ_-, Γ_+ avec : $x = Re^{it} \in \Gamma_-$ si $t \in]-\infty, 0]$, $x = Re^{it} \in \Gamma_+$ si $t \in [0, +\infty[$; en faisant si nécessaire une homothétie, on supposera $R = 1$. Si l'on pose $\phi(\xi) = \mathcal{B}^0_{q;s} \circ \mathcal{L}^0_{q;s}\varphi(\xi)$, on aura :

$$\begin{aligned}
\phi(\xi) &= -i\frac{k}{2\pi\log q}\sum_{\varepsilon=+,-}\int_{\Gamma_\varepsilon} q^{\frac{k}{2}\log_q\frac{x}{\xi}(\log_q\frac{x}{\xi}-\frac{1}{k})}\int_{d_\varepsilon} q^{-\frac{k}{2}\log_q\frac{x}{u}(\log_q\frac{x}{u}-\frac{1}{k})}\varphi(u)\frac{du}{u}\frac{dx}{x}\\
&\overset{(1)}{=} -i\frac{k}{2\pi\log q}\sum_{\varepsilon=+,-}\int_{d_\varepsilon}\sqrt{\frac{\xi}{u}}q^{\frac{k}{2}(\log_q^2\xi-\log_q^2 u)}\varphi(u)\int_{\Gamma_\varepsilon} q^{k\log_q\frac{u}{\xi}\log_q x}\frac{dx}{x}\frac{du}{u}\\
&\overset{(2)}{=} \frac{1}{2\pi i}\Big(\int_{d_-}-\int_{d_+}\Big)\sqrt{\frac{\xi}{u}}q^{\frac{k}{2}(\log_q^2\xi-\log_q^2 u)}\frac{\varphi(u)}{\log u-\log\xi}\frac{du}{u}\\
&\overset{(3)}{=} \varphi(\xi).
\end{aligned}$$

Ici, on a utilisé respectivement le théorème de Fubini pour (1) et la formule de Cauchy pour (3), le passage (2) résultant d'un calcul direct. D'où l'assertion (i) du théorème.

Pour vérifier la seconde assertion du théorème, supposons $f \in \tilde{\mathbb{G}}^0_{q;s}$. On fixe un petit réel positif x, et on choisit deux disques en colimaçon $\tilde{D}(0;R_1)$, $\tilde{D}(0;R_2)$ avec $R_1 < x < r_2$; on applique ensuite le théorème de Fubini aux intégrales doubles

$$\int_0^1\Big(\int_{\partial^+\tilde{D}(0;R_1)} K(x,\xi,v)\frac{dv}{v}\Big)\frac{d\xi}{\xi}, \qquad \int_1^{+\infty}\Big(\int_{\partial^+\tilde{D}(0;R_2)} K(x,\xi,v)\frac{dv}{v}\Big)\frac{d\xi}{\xi},$$

où $K(x,\xi,v) = q^{\frac{k}{2}\log_q\frac{v}{\xi}(\log_q\frac{v}{\xi}-\frac{1}{k})}q^{-\frac{k}{2}\log_q\frac{x}{\xi}(\log_q\frac{x}{\xi}-\frac{1}{k})}f(v)$, et on conclut avec la formule de Cauchy comme précédemment. □

1.4. *Produits de q-convolution.* On rappelle que dans la théorie classique de la sommation de Borel-Laplace, le produit usuel se transforme en produit de convolution par la transformation de Borel. En ce qui concerne la sommabilité des séries q-Gevrey, on verra que la notion de produit de q-convolution introduite ici jouera aussi un rôle très important ; voir Théorème 2.4.3. On remarquera également que notre produit de q-convolution coïncide avec le produit habituel quand $q^s = 1$ ($q = 1$ ou $s = 0$ par exemple).

1.4.1. Lemme. Les ensembles $\mathbb{G}^\theta_{q;s}$, $\tilde{\mathbb{G}}^\theta_{q;s}$ constituent des $\mathbb{C}\{x\}$-modules.

Plus précisemment, soient $f \in \mathbb{C}\{x\}$, $g \in \mathbb{G}^\theta_{q;s}$ (resp. $\tilde{\mathbb{G}}^\theta_{q;s}$) et $h = fg$. On a : $h \in \mathbb{G}^\theta_{q;s}$ (resp. $\tilde{\mathbb{G}}^\theta_{q;s}$) et $\hat{h} = f\hat{g}$, où l'on note $\hat{}$ la prise du développement asymptotique d'une fonction.

Preuve – Etant donnés $n \in \mathbb{N}$ et $\hat{u}$ une série entière, on pose $\hat{u}_n$ la somme partielle des n premiers termes de $\hat{u}$. Si $f = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$, on a $(f\hat{g})_n = \sum_{j=0}^n a_j x^j \hat{g}_{n-j}$; on en déduit la relation suivante :

$$(fg)(x) - (f\hat{g})_n(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j\big(g(x) - \hat{g}_{n-j}(x)\big) + \sum_{j>n} a_j x^j g(x).$$

Le résultat du lemme en découle. □

1.4.2. Proposition. L'ensemble $\mathbb{C}\{x\}^\theta_{q;s}$ constitue un $\mathbb{C}\{x\}$-module, stable par l'opérateur aux q-différences $\sigma_q : \hat{f}(x) \mapsto \hat{f}(qx)$, et tel que pour tout $(\hat{f},\hat{g}) \in \mathbb{C}\{x\} \times \mathbb{C}\{x\}^\theta_{q;s}$, on ait $\mathcal{S}^\theta_{q;s}(\hat{f}\hat{g}) = \mathcal{S}\hat{f}\mathcal{S}^\theta_{q;s}\hat{g}$, où $\mathcal{S}\hat{f}$ désigne la somme habituelle de $\hat{f}$.

Preuve – Il suffit de changer q en q^s dans la proposition I-4.3.1 (dont la preuve utilise essentiellement la transformation de q-Borel *analytique*). □

La proposition précédente implique ceci : *si* $\hat{f} \in \mathbb{C}\{x\}$ *et* $\hat{g} \in \mathbb{C}\{x\}^\theta_{q;s}$, *alors* $\hat{\mathcal{B}}_{q;s}(\hat{f}\hat{g}) \in \mathbb{H}^\theta_{q;s}$ (comparer ceci avec le lemme 1.4.1 ci-dessus).

1.4.3. Considérons le produit de deux séries entières $\hat{f}$, $\hat{g} \in \mathbb{C}[[x]]$. On a formellement :

$$\hat{\mathcal{B}}_{q;s}(\hat{f}\hat{g})(\xi) = \sum_{n\geq 0} a_n q^{-sn(n-1)/2} \xi^n \hat{\mathcal{B}}_{q;s}\hat{f}(q^{-sn}\xi),$$

les a_n étant les coefficients de la série $\hat{g}$. Ceci nous suggère de définir une loi de composition interne (commutative) dans $\mathbb{C}[[\xi]]$ notée $\hat{\star}_{q;s}$ de la manière suivante. Si $\hat{\varphi} = \sum_{n\geq 0} \alpha_n \xi^n$, $\hat{\gamma} = \sum_{n\geq 0} \beta_n \xi^n$, on pose

$$\hat{\varphi}\hat{\star}_{q;s}\hat{\gamma}(\xi) = \sum_{n\geq 0}\sum_{j=0}^{n} \alpha_j \beta_{n-j} q^{-sj(n-j)} \xi^n;$$

on a :

$$\hat{\varphi}\hat{\star}_{q;s}\hat{\gamma}(\xi) = \sum_{n\geq 0} \alpha_n \xi^n \hat{\gamma}(q^{-sn}\xi) = \sum_{n\geq 0} \beta_n \xi^n \hat{\varphi}(q^{-sn}\xi).$$

Par définition, on appelle $\hat{\varphi}\hat{\star}_{q;s}\hat{\gamma}$ le *produit formel de q-convolution d'ordre s de* $\hat{\varphi}$ *et* $\hat{\gamma}$.

Noter que, si $\hat{\varphi} \in \mathbb{C}\{\xi\}$ et $\hat{\gamma} \in \mathbb{C}\{\xi\}$, on a $\hat{\varphi}\hat{\star}_{q;s}\hat{\gamma} \in \mathbb{C}\{\xi\}$; ceci résulte du fait que l'espace des séries q-Gevrey d'ordre s est stable par le produit habituel de deux séries.

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Pour simplifier, on appelle *germe de secteur de support* I tout secteur ouvert, de sommet de $0 \in \mathbb{C}$, contenant un secteur du type $\{x \in \mathbb{C} : \arg x \in I, |x| < R\}$, avec $R > 0$ arbitraire. Notons $\mathbb{A}(I)$ l'anneau des fonctions analytiques sur un germe de secteur de support I, admettant un développement asymptotique (au sens de Poincaré) en 0 dans ce secteur. Si $\hat{\varphi} = \sum_{n\geq 0} \alpha_n \xi^n \in \mathbb{C}\{\xi\}$, de somme φ, et si $\hat{\gamma}$ est le développement asymptotique d'une fonction $\gamma \in \mathbb{A}(I)$, on pose

$$\varphi \star_{q;s} \gamma(\xi) := \sum_{n\geq 0} \alpha_n \xi^n \gamma(q^{-sn}\xi).$$

(Ici, nous laissons au lecteur le soin de reformuler notre définition en termes de q-intégrale ; *cf* [GR], p. 19.)

1.4.4. Lemme. Sous les hypothèses précédentes, on a $\varphi\star_{q;s}\gamma \in \mathbb{A}(I)$ *et, plus précisément,* $\varphi\star_{q;s}\gamma$ *admet* $\hat{\varphi}\hat{\star}_{q;s}\hat{\gamma}$ *pour développement asymptotique.*

Preuve – Soit $\sum_{n\geq 0} \beta_n \xi^n$ le développement asymptotique de γ en 0 sur un germe de secteur V de support I ; on a, pour tout $\xi \in V$: $\gamma(q^{-sn}\xi) \to \beta_0$ si n tend vers $+\infty$. Puisque φ converge au voisinage de l'origine, on déduit la convergence en $0 \in V$ de l'expression définissant $\varphi\star_{q;s}\gamma(\xi)$; autrement dit, $\varphi\star_{q;s}\gamma(\xi)$ est bien définie et analytique sur un germe de secteur noté U dont l'ouverture contient I, tel que $U \subset V$.

Soient $\psi := \varphi\star_{q;s}\gamma$, $\hat{\psi} := \hat{\varphi}\hat{\star}_{q;s}\hat{\gamma}$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $\hat{\psi}_n$ la somme partielle d'ordre n de $\hat{\psi}$; on a $\hat{\psi}_n = \sum_{j=0}^n \alpha_j \xi^j \hat{\gamma}_{n-j}(q^{-js}\xi)$, $\hat{\gamma}_\ell$ désignant la somme partielle d'ordre ℓ de la série $\hat{\gamma}$. En écrivant

$$\psi(\xi) - \hat{\psi}_n(\xi) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \xi^j \big(\gamma(q^{-js}\xi) - \hat{\gamma}_{n-j}(q^{-js}\xi)\big) + \sum_{j>n} \alpha_j \xi^j \gamma(q^{-js}\xi),$$

on conclut à l'asymptoticité de ψ à $\hat{\psi}$. $\square$

Par définition, on appelle $\varphi \star_{q;s} \gamma$ le *produit analytique de q-convolution d'ordre s de φ et γ*. De manière analogue, on peut aussi définir $\varphi \star_{q;s} \gamma$ pour tout couple $(\varphi, \gamma) \in \mathbb{A}(I) \times \mathbb{C}\{\xi\}$.

Le produit (formel ou analytique) de q-convolution d'ordre zéro correspond exactement au produit habituel. Or, on sait que $\mathbb{A}(I)$ est stable pour la multiplication ; il serait peut-être intéressant de voir si l'on peut reformuler notre produit de q-convolution de sorte que $\mathbb{A}(I)$ soit stable. Dans cette direction, on constate aussitôt la propriété suivante (*cf* la fin de la preuve du lemme précédent) :

1.4.5. Proposition. Dans le lemme 1.4.4, si l'on suppose, en plus, que $\gamma \in \tilde{\mathbb{G}}^{\theta}_{q;s'}$ (ou $\gamma \in \mathbb{G}^{\theta}_{q;s'}$) avec $s' > 0$, alors on a $\varphi \star_{q;s} \gamma \in \tilde{\mathbb{G}}^{\theta}_{q;s'}$ (ou $\varphi \star_{q;s} \gamma \in \mathbb{G}^{\theta}_{q;s'}$ respectivement). $\square$

La proposition qui précède étend le résultat du lemme 1.4.1 au cas d'un produit de q-convolution. On remarquera aussi que, d'après la proposition 1.4.2, on a $\varphi \star_{q;s} \gamma \in \mathbb{H}^{\theta}_{q;s}$ quand $\varphi \in \mathbb{E}_{q;s}$ et $\gamma \in \mathbb{H}^{\theta}_{q;s}$. Voir le lemme 2.4.4 pour un énoncé plus général.

2. Séries entières Gq-multisommables.

Dans cette partie, nous allons introduire une notion de multisommabilité pour les séries q-Gevrey. Nous commençons par un résultat du type taubérien qui affirme que si l'ordre Gevrey d'une série entière est strictement plus petit que son ordre de Gq-sommabilité, alors la série est convergente. Ce résultat nous permet d'établir l'impossibilité d'exprimer le carré de la série théta de Jacobi (tronquée) comme somme de plusieurs séries Gq-sommables à simples niveaux ; voir Théorème 2.2.1.

Pour les séries entières Gevrey multisommables, il y a plusieurs définitions équivalentes. Nous en citons deux : l'une utilise le procédé d'*accélération élémentaire* de J. Ecalle ([Ec], Chapitre 2), J. Martinet et J.-P. Ramis ([MR2]), une autre décrit une série multisommable comme *combinaison finie* de séries k-sommables à différents niveaux k ([Ba], [MR1]). Le théorème 2.2.1 ci-dessous mettra en défaut cette seconde définition pour une *bonne* théorie des séries entières Gq-multisommables. Car la série étudiée dans ce théorème est solution formelle d'une équation aux q-différences linéaire à coefficients polynomiaux, c'est donc une série qui devrait être sommable avec une méthode *bien* conçue. Dans la perspective d'étudier les équations aux q-différences, nous allons introduire la notion de série entière Gq-multisommable au moyen d'un q-analogue de l'accélération élémentaire citée précédemment. On verra que ceci permet de sommer toute série entière solution formelle d'une équations aux q-différences (*cf* les théorèmes 3.3.2 et 3.3.5).

2.1. *Un résultat du type taubérien.*

2.1.1. Lemme. Soit $0 < s' < s$. Soit $\hat{f} \in \mathbb{C}[[x]]$ une série entière telle que $\hat{\mathcal{B}}_{q;s}\hat{f}$ converge dans $\mathbb{C}$ vers une fonction entière φ. On a $\hat{f} \in \mathbb{C}[[x]]_{q;s'}$ si et seulement si $\varphi \in \mathbb{E}_{q,s-s'}$.

Preuve – D'après la définition de $\hat{\mathcal{B}}_{q;s}$ (*cf 1.1.1*), on a $\hat{\mathcal{B}}_{q;s} = \hat{\mathcal{B}}_{q;s'}\hat{\mathcal{B}}_{q;s-s'}$. Or, les applications $\hat{\mathcal{B}}_{q;s'} : \mathbb{C}[[x]]_{q;s'} \to \mathbb{C}\{\xi\}$, $\hat{\mathcal{B}}_{q;s-s'} : \mathbb{C}\{\xi\} \to \mathbb{E}_{q;s-s'}$ sont bijectives ; ceci prouve le lemme. $\square$

2.1.2. Proposition. Soit $0 < s' < s$ et $\theta \in \mathbb{R}$. On a

$$\mathbb{C}\{x\}^{\theta}_{q;s} \cap \mathbb{C}\{x\}^{\theta}_{q;s'} = \mathbb{C}\{x\}^{\theta}_{q;s} \cap \mathbb{C}[[x]]_{q;s'} = \mathbb{C}\{x\}.$$

Preuve – Soit $\hat{f} \in \mathbb{C}\{x\}^{\theta}_{q;s} \cap \mathbb{C}[[x]]_{q;s'}$; il s'agit de vérifier que $\hat{\mathcal{B}}_{q;s}\hat{f} \in \mathbb{E}_{q;s}$. Notons φ la fonction somme de la série $\hat{\mathcal{B}}_{q;s}\hat{f}$. A partir du lemme 2.1.1 et de la définition 1.2.1, on obtient que $\varphi \in \mathbb{E}_{q;s-s'} \cap \mathbb{H}^{\theta}_{q;s}$. Soit alors V un voisinage sectoriel de la direction d_θ sur lequel on a $\varphi(\xi) = O(\xi^{\mu} q^{\frac{1}{2s}\log_q^2 \xi})$ pour $|\xi| \to +\infty$, où $\mu \in \mathbb{R}$ désigne une constante convenable. Deux cas sont possibles.

(i) $V = \mathbb{C}$: c'est exactement ce que l'on attend de la proposition.

(ii) $V \neq \mathbb{C}$: on pose U un secteur ouvert non vide, d'ouverture $< \pi$, tel que $(\bar{U} \setminus \{0\}) \subset V$; on note W le complémentaire $\mathbb{C}^* \setminus U$ et ∂W la frontière de W dans $\mathbb{C}^*$. En choisissant une détermination de la fonction logarithme sur W, on considère la fonction $\gamma(\xi) = \varphi(\xi)\xi^{-\mu} q^{-\frac{1}{2s}\log_q^2 \xi}$. C'est une fonction analytique sur W, continue sur $W \cup \partial W$ et bornée sur ∂W. En outre, γ a une croissance exponentielle sur W (même sous-exponentielle : pour tout $\varepsilon > 0$, $\gamma(\xi) = o(e^{\varepsilon|\xi|})$ si $\xi \to \infty$ dans W). En utilisant le théorème de Phragmén-Lindelöf, on obtient que γ est bornée sur W tout entier ; ceci implique que φ a une croissance au plus q-exponentielle d'ordre s à l'infini dans W, donc dans $\mathbb{C}$. $\square$

2.1.3. Dans la théorie des séries Gevrey ordinaires, on a un énoncé similaire. Notre énoncé 2.1.2 porte sur une seule direction d_θ alors que dans le cas Gevrey on utilise les séries sommables dans presque toutes les directions (*cf* [Ra1]).

En outre, la proposition 2.1.2 sera généralisée plus loin pour les séries multisommables.

2.2. *Etude de la série* $(\sum_{n\geq 0} q^{n(n-1)/2}x^n)^2$.

On pose $\hat{F} := (\sum_{n\geq 0} q^{n(n-1)/2}x^n)^2$. On rappelle que la série théta de Jacobi tronquée $\sum_{n\geq 0} q^{n(n-1)/2}x^n$ est Gq-sommable d'ordre 1. Dans la suite, on va démontrer le résultat suivant, qui *n'a pas d'équivalent* dans la théorie de la resommation des séries entières Gevrey ordinaires.

2.2.1. Théorème. Pour toute suite finie de réels strictement positifs $(s_j)_{1\leq j\leq \ell}$ *et tout* $\theta \in \mathbb{R}$, *il n'existe pas de* $\hat{f}_j \in \mathbb{C}\{x\}^{\theta}_{q;s_j}$ *vérifiant* $(\sum_{n\geq 0} q^{n(n-1)/2}x^n)^2 = \hat{f}_1 + ... + \hat{f}_\ell$.

Idée de la preuve – La série $\sum_{n\geq 0} q^{n(n-1)/2}x^n$ étant q-Gevrey d'ordre 1, son carré $\hat{F}$ l'est également. Il suffit donc de même que $\hat{F}$ ne peut pas se décomposer en la somme de deux séries, l'une étant Gq-sommable d'ordre 1, l'autre q-Gevrey d'ordre $s < 1$. Ceci sera démontré dans le lemme 2.2.5 ci-dessous par des arguments fondés sur la croissance à l'infini de la transformée formelle d'ordre 1 de $\hat{F}$. $\square$

2.2.2. Du fait que la série $\sum_{n\geq 0} q^{n(n-1)/2}x^n$ est solution formelle de $xy(qx) - y(x) = -1$, on déduit que $\hat{F}$ vérifie l'équation $(q^2x^3\sigma_q^2 - x(1+x)\sigma_q + 1)\hat{F}(x) = 1 + x$, laquelle se transforme par $\hat{\mathcal{B}}_{q;1}$ en celle-ci :

$$(1 - q^{-1}\xi^2\sigma_q^{-1})\hat{\mathcal{B}}_{q;1}\hat{F}(\xi) = (1+\xi)/(1-\xi). \tag{2.2.3}$$

En développant formellement

$$(1 - q^{-1}\xi^2\sigma_q^{-1})^{-1} = \sum_{n\geq 0}(q^{-1}\xi^2\sigma_q^{-1})^n = \sum_{n\geq 0} q^{-n^2}\xi^{2n}\sigma_q^{-n},$$

on en déduit que l'équation (2.2.3) admet une solution analytique en l'origine de $\mathbb{C}$ et une seule, qui est donnée par $\hat{\mathcal{B}}_{q;1}\hat{F}(\xi) = \sum_{n\geq 0} q^{-n^2}\xi^{2n}(1+q^{-n}\xi)/(1-q^{-n}\xi)$. On remarquera que $\xi = 1, q, \ldots, q^n, \ldots$ sont les pôles (simples) de $\hat{\mathcal{B}}_{q;1}\hat{F}$.

Considérons la fonction entière $P(\xi) := \hat{\mathcal{B}}_{q;1}\hat{F}(\xi)\prod_{n\geq 0}(1-q^{-n}\xi)$. On a, pour tout $n\in\mathbb{N}$: $P(q^n)=2q^{n^2}\prod_{1\leq \ell\leq n}(1-q^\ell)\prod_{m\geq 1}(1-q^{-m})$, ce qui implique que

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^nP(q^n)q^{-n(3n+1)/2}=2\prod_{m\geq 1}(1-q^{-m})^2. \tag{2.2.4}$$

De la relation (2.2.3), on obtient l'équation $(1-\xi)(1-q^{-1}(1-\xi)\xi^2\sigma_q^{-1})P(\xi)=1+\xi$, dont le polygone de Newton relatif au point à l'infini contient une pente et une seule égale à 3. En utilisant un théorème de J.-P. Ramis [Ra2], on conclut que $P\in\mathbb{E}_{q;1/3}$ et que $P\notin\mathbb{E}_{q;s}$ pour tout $s>1/3$.

Ceci étant, vérifions maintenant le lemme suivant.

2.2.5. Lemme. Pour tout $\theta\in\mathbb{R}$, il n'existe pas de triplet $(s,\hat{f},\hat{g})$ satisfaisant aux conditions suivantes :

(i) $0<s<1$, $\hat{f}\in\mathbb{C}\{x\}_{q;1}^\theta$ et $\hat{g}\in\mathbb{C}[[x]]_{q;s}$;

(ii) $\hat{F}=\hat{f}+\hat{g}$.

Preuve – Supposons qu'il existe un triplet $(s,\hat{f},\hat{g})$ vérifiant les conditions indiquées. Considérons les fonctions

$$\varphi(\xi):=\hat{\mathcal{B}}_{q;1}\hat{f}(\xi)\prod_{n\geq 0}(1-q^{-n}\xi),\qquad \gamma(\xi):=\hat{\mathcal{B}}_{q;1}\hat{g}(\xi)\prod_{n\geq 0}(1-q^{-n}\xi).$$

D'après le lemme 2.1.1, $\hat{\mathcal{B}}_{q;1}\hat{g}$ est une fonction entière, donc $\gamma(q^n)=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. De la relation $P(\xi)=\varphi(\xi)+\gamma(\xi)$, on a $\varphi(q^n)=P(q^n)$; avec la formule (2.2.4), on obtient que φ est une fonction entière telle que $|\varphi(q^n)|\geq Kq^{3n^2/2}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, où $K=2\prod_{m\geq 1}(1-q^{-m})^2$. En utilisant un résultat de Littlewood [Li] sur les fonctions entières d'ordre zéro (*cf* le lemme I-4.3.7 pour l'énoncé correspondant), on en déduit que φ a une croissance q-exponentielle d'ordre au moins 3 dans $\mathbb{C}$. La fonction $\prod_{n\geq 0}(1-q^{-n}\xi)$ étant q-exponentielle d'ordre exactement égale à 1, la fonction $\hat{\mathcal{B}}_{q;1}\hat{f}$ admet alors une croissance q-exponentielle d'ordre au moins 2 dans toute direction où elle est définie, ce qui contredit l'hypothèse $\hat{f}\in\mathbb{C}\{x\}_{q;1}^\theta$.
□

2.3. *Définition d'une série entière Gq-multisommable.*

Pour les séries Gevrey, l'accélération élémentaire consiste essentiellement à combiner des transformations de Borel et de Laplace de niveaux différents ; il en sera de même pour les séries q-Gevrey.

2.3.1. Soit $s\geq s'>0$ et soit $\theta\in\mathbb{R}$. On a : (1) $\mathbb{K}_{q;s}^\theta\subset\mathbb{K}_{q;s'}^\theta$ si $\mathbb{K}=\tilde{\mathbb{H}}$ ou $\mathbb{H}$; (2) $\tilde{\mathbb{G}}_{q;s'}^\theta\subset\tilde{\mathbb{G}}_{q;s}^\theta$. Par contre, l'inclusion $\mathbb{G}_{q;s'}^\theta\subset\mathbb{G}_{q;s}^\theta$ *n'est pas forcément vraie.*

On admettra la convention suivante : si $s=0$, on a $\mathcal{B}_{q;s}^\theta=\mathcal{L}_{q;s}^\theta=id$ sur un espace de fonctions *quelconque.*

2.3.2. Lemme. Si $\varphi\in\tilde{\mathbb{H}}_{q;s}^\theta$ et $s\geq s'>0$, alors

$$\mathcal{L}_{q;s}^\theta\varphi=\mathcal{L}_{q;s-s'}^\theta\mathcal{L}_{q;s'}^\theta\varphi\quad \hat{B}oxet\quad \mathcal{B}_{q;s-s'}^\theta\mathcal{L}_{q;s}^\theta\varphi=\mathcal{L}_{q;s'}^\theta\varphi.$$

Preuve – D'après le théorème 1.3.6, $\mathcal{L}$ et $\mathcal{B}$ sont inverses l'un de l'autre, il suffit donc de prouver l'une des assertions du lemme. Prouvons la première et supposons $s\neq s'$; soient

$k=1/s$, $k'=1/s'$, $\hat{k}=1/(s-s')$; on a $\hat{k}=kk'/(k'-k)$. En utilisant la définition de $\mathcal{L}$ puis le théorème de Fubini, on a :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^\theta_{q;s-s'}\mathcal{L}^\theta_{q;s'}\varphi(x) &= C\int_{d_\theta} q^{-\frac{\hat{k}}{2}\log_q\frac{x}{u}(\log_q\frac{x}{u}-\frac{1}{\hat{k}})}\int_{d_\theta} q^{-\frac{k'}{2}\log_q\frac{u}{\xi}(\log_q\frac{u}{\xi}-\frac{1}{k'})}\,\varphi(\xi)\,\frac{d\xi}{\xi}\,\frac{du}{u}\\ &= C\int_{d_\theta}\sqrt{\frac{x}{\xi}}\,q^{-\frac{\hat{k}}{2}\log_q^2 x-\frac{k'}{2}\log_q^2\xi}\,\varphi(\xi)\,I(x,\xi)\,\frac{d\xi}{\xi}\\ &= \mathcal{L}^\theta_{q;s}\varphi(x),\end{aligned}$$

où l'on a posé $C=\frac{q^{-1/(8k)}\sqrt{k'\hat{k}}}{2\pi\log q}$ et

$$\begin{aligned}I(x,\xi) &= \int_{d_\theta} q^{-\frac{k'^2}{2(k'-k)}\log_q^2 u+(\hat{k}\log_q x+k'\log_q\xi)\log_q u}\,\frac{du}{u}\\ &= \sqrt{\frac{2\pi(k'-k)\log q}{k'^2}}\,q^{\frac{k'-k}{2k'^2}(\hat{k}\log_q x+k'\log_q\xi)^2}.\ \square\end{aligned}$$

2.3.3. Etant donnée une série q-Gevrey d'ordre s, on lui applique la transformation de q-Borel formelle d'ordre s et on obtient un germe de fonction analytique en l'origine du plan complexe ; si, de plus, la transformée obtenue appartient à la classe $\mathbb{H}^\theta_{q;s}$, la série est dite *Gq*-sommable d'ordre s. Dans la pratique, on constate en général que cette transformée a une croissance q-exponentielle d'ordre plus élevé. Dans ce cas, on lui applique une transformation de Laplace d'ordre adéquat, et l'on essaye ensuite d'autres transformations de Laplace. Autrement dit, on remplace l'inverse $\mathcal{L}_{q;s}$ de la transformation de q-Borel d'ordre s par une succession d'un nombre fini de $\mathcal{L}_{q;s'}$, les s' étant *a priori* tous inférieurs à s. D'après le lemme qui précède, cette démarche étend la méthode de *Gq*-sommation à une classe de séries plus grande, appelées séries *Gq*-multisommables.

A présent, on désigne par Ω^+ l'ensemble des suites finies, strictement croissantes, formées de réels strictement positifs. Par convention, on admet que $\emptyset\in\Omega^+$. On pose $\Omega^{+*}=\Omega^+\setminus\{\emptyset\}$.

Soit $\theta\in\mathbb{R}$; on notera $\mathcal{S}^\theta$ l'opérateur de prolongement analytique le long de la direction d_θ, c'est-à-dire dans un voisinage sectoriel de d_θ.

2.3.4. Définition. Soit $\vec{s}=(s_1,s_2,...,s_r)\in\Omega^{+*}$ et soit $\hat{f}\in\mathbb{C}[[x]]$.

(1) On dit que $\hat{f}\in\mathbb{C}[[x]]$ est *Gq-multisommable d'ordre $\vec{s}$ dans une direction d_θ* et on écrit $\hat{f}\in\mathbb{C}\{x\}^\theta_{q;\vec{s}}$, si les conditions suivantes sont remplies :

- $\hat{f}\in\mathbb{C}[[x]]_{q;s_r}$;
- $\hat{\mathcal{B}}_{q;s_r}\hat{f}\in\mathbb{H}^\theta_{q;s_r-s_{r-1}}$;
- $\mathcal{L}^\theta_{q;s_{r-j+1}-s_{r-j}}...\mathcal{L}^\theta_{q;s_r-s_{r-1}}\mathcal{S}^\theta\hat{\mathcal{B}}_{q;s_r}\hat{f}\in\tilde{\mathbb{H}}^\theta_{q;s_{r-j}-s_{r-j-1}}$ pour j compris entre 1 et $r-2$

;

- $\mathcal{L}^\theta_{q;s_2-s_1}...\mathcal{L}^\theta_{q;s_{r-j+1}-s_{r-j}}...\mathcal{L}^\theta_{q;s_r-s_{r-1}}\mathcal{S}^\theta\hat{\mathcal{B}}_{q;s_r}\hat{f}\in\tilde{\mathbb{H}}^\theta_{q;s_1}$.

(2) Si $\hat{f}\in\mathbb{C}\{x\}^\theta_{q;\vec{s}}$, on appelle *Gq-somme d'ordre $\vec{s}$ de $\hat{f}$ dans la direction d_θ* la fonction définie de la façon suivante :

$$\mathcal{S}^\theta_{q;\vec{s}}\hat{f}:=\mathcal{L}^\theta_{q;s_1}\mathcal{L}^\theta_{q;s_2-s_1}...\mathcal{L}^\theta_{q;s_{r-j+1}-s_{r-j}}...\mathcal{L}^\theta_{q;s_r-s_{r-1}}\mathcal{S}^\theta\hat{\mathcal{B}}_{q;s_r}\hat{f}.$$

(3) La direction d_θ est dite *singulière d'ordre $\vec{s}$ pour $\hat{f}$* si $\hat{f} \notin \mathbb{C}\{x\}^{\theta}_{q;\vec{s}}$. Lorsque c'est le cas, on écrira $\theta \in DS(\hat{f})$.

(4) La série $\hat{f}$ est dite *Gq-multisommable d'ordre $\vec{s}$* si $DS(\hat{f}) \cap [0, 2\pi]$ est fini. Dans ce cas, on dit aussi que $\hat{f} \in \mathbb{C}\{x\}_{q;\vec{s}}$.

Par **convention**, $\mathbb{C}\{x\}^{\theta}_{q;\vec{s}}$ et $\mathbb{C}\{x\}_{q;\vec{s}}$ désigneront l'ensemble $\mathbb{C}\{x\}$ si $\vec{s} = \emptyset$.

2.3.5. Si $\hat{f} \in \mathbb{C}\{x\}^{\theta}_{q;\vec{s}}$, avec $\vec{s} = (s_1, ..., s_r) \in \Omega^{+*}$, on constate aussitôt les propriétes suivantes.

(1) $\mathcal{S}^{\theta}_{q;\vec{s}}\hat{f} \in \tilde{\mathbb{G}}^{\theta}_{q;s_1}$.

(2) On a $\hat{f} \in \mathbb{C}\{x\}^{\theta+2\nu\pi}_{q;\vec{s}}$, $\mathcal{S}^{\theta+2\nu\pi}_{q;\vec{s}}\hat{f}(x) = \mathcal{S}^{\theta}_{q;\vec{s}}\hat{f}(xe^{-2\nu\pi i})$ pour tout entier relatif ν. Il s'ensuit que $\hat{f}$ est Gq-multisommable d'ordre $\vec{s}$ si et seulement si $DS(\hat{f})$ est un ensemble discret de $\mathbb{R}$.

(3) On a $\hat{f} \in \mathbb{C}\{x\}$ si et seulement si $DS(\hat{f}) = \emptyset$.

2.4. *Quelques propriétés sur les séries Gq-multisommables.* Commençons par une variante du lemme 2.3.2.

2.4.1. Lemme. Soient $0 < t_1 < t_2 < ... < t_n$ $(n \geq 2)$, $\theta \in \mathbb{R}$ et $\hat{f} \in \mathbb{C}[[x]]_{q;t_1}$. Si l'on pose φ la fonction somme de $\hat{\mathcal{B}}_{q;t_1}\hat{f}$, alors on a

$$\varphi = \mathcal{L}^{\theta}_{q;t_2-t_1} ... \mathcal{L}^{\theta}_{q;t_{n-1}-t_{n-2}} \mathcal{L}^{\theta}_{q;t_n-t_{n-1}} \mathcal{S}^{\theta} \hat{\mathcal{B}}_{q;t_n}\hat{f}.$$

Par conséquent, on a :

(i) $\mathbb{C}\{x\}^{\theta}_{q;t_1} \subset \mathbb{C}\{x\}^{\theta}_{q;(t_1,t_2,...,t_n)}$;

(ii) $\mathbb{C}[[x]]_{q;t} \cap \mathbb{C}\{x\}^{\theta}_{q;(t_1,t_2,...,t_n)} = \mathbb{C}\{x\}$ *pour* $t \in]0, t_1[$.

Preuve – Puisque $\hat{f} \in \mathbb{C}[[x]]_{q;t_1}$, on obtient, d'après le lemme 2.1.1, que $\hat{\mathcal{B}}_{q;t_n}\hat{f} \in \mathbb{E}_{q;t_1-t_n}$. Si $n = 2$, avec la proposition 1.3.3 on a : $\varphi = \mathcal{L}^{\theta}_{q;t_2-t_1}\mathcal{S}^{\theta}\hat{\mathcal{B}}_{q;t_2}\hat{f}$.

Supposons $n > 2$; on a $\mathcal{L}^{\theta}_{q;t_n-t_{n-1}}\mathcal{S}^{\theta}\hat{\mathcal{B}}_{q;t_n}\hat{f} \in \mathbb{E}_{q;t_1-t_{n-1}}$ car cette fonction est la somme de la série entière $\hat{\mathcal{L}}_{q;t_n-t_{n-1}}\hat{\mathcal{B}}_{q;t_n}\hat{f}$, cette dernière étant égale à $\hat{\mathcal{B}}_{q;t_{n-1}}\hat{f}$. En réitérant ce processus, on prouve l'égalité portant sur la fonction φ du lemme.

La conséquence (i) est immédiate car $\mathbb{G}^{\theta}_{q;t_1} \subset \tilde{\mathbb{G}}^{\theta}_{q;t_1}$. Pour (ii), il suffit de remarquer ceci : $\tilde{\mathbb{G}}^{\theta}_{q;t_1} \cap \mathbb{E}_{q;t_1-t} = \mathbb{G}^{\theta}_{q;t_1} \cap \mathbb{E}_{q;t_1-t} = \mathbb{E}_{q;t_1-t}$; voir la preuve du lemme 2.1.2. □

Compte tenu du lemme qui précède, on remarque la généralisation suivante de la proposition 2.1.2 :

$$\mathbb{C}\{x\}^{\theta}_{q;\vec{s}} \cap \mathbb{C}[[x]]_{q;t} = \mathbb{C}\{x\}^{\theta}_{q;\vec{s}} \cap \mathbb{C}\{x\}^{\theta}_{q;t} = \mathbb{C}\{x\}^{\theta}_{q;\vec{s}(t)},$$

où $\vec{s} = (s_1, ..., s_r) \in \Omega^+$, $t > 0$ et où l'on note $\vec{s}(t) \in \Omega^+$ la suite extraite de $\vec{s}$ constituée des $s_j \leq t$.

Par définition, on note $[\vec{s}] = \emptyset$ ou $\{s_1, \ldots, s_r\}$ selon le cas $\vec{s} = \emptyset$ ou $(s_1, ..., s_r) \in \Omega^{+*}$.

2.4.2. Proposition. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et soit $\vec{s}$, $\vec{s}' \in \Omega^+$ tels que $[\vec{s}] \subset [\vec{s}']$. On a :

$$\mathbb{C}\{x\}^{\theta}_{q;\vec{s}} \subset \mathbb{C}\{x\}^{\theta}_{q;\vec{s}'}, \quad \mathcal{S}^{\theta}_{q;\vec{s}'}\big|_{\mathbb{C}\{x\}^{\theta}_{q;\vec{s}}} = \mathcal{S}^{\theta}_{q;\vec{s}}.$$

Preuve – Le résultat découle immédiatement des lemmes 2.3.2, 2.4.1 à l'aide de la définition 2.3.3. □

Nous conjecturons que l'égalité $\mathbb{C}\{x\}^\theta_{q;\vec{s}} = \mathbb{C}\{x\}^\theta_{q;\vec{s}'}$ n'a lieu que si $[\vec{s}] = [\vec{s}']$.

2.4.3. Théorème. Etant donnés $\vec{s} \in \Omega^+$ et $\theta \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\mathbb{C}\{x\}^\theta_{q;\vec{s}}$ constitue un $\mathbb{C}\{x\}$-module, stable par l'opérateur aux q-différences σ_q, et tel que pour tout $(\hat{f}, \hat{g}) \in \mathbb{C}\{x\} \times \mathbb{C}\{x\}^\theta_{q;\vec{s}}$, on ait $\mathcal{S}^\theta_{q;\vec{s}}(\hat{f}\hat{g}) = \mathcal{S}\hat{f}\mathcal{S}^\theta_{q;\vec{s}}\hat{g}$, où $\mathcal{S}\hat{f}$ désigne la somme naturelle de $\hat{f}$.

Preuve – Le théorème est déjà connu quand $\vec{s} = \emptyset$: c'est le produit de deux fonctions analytiques en l'origine du plan complexe. On suppose $\vec{s} = (s_1, ..., s_r) \in \Omega^{+*}$. En tenant compte de la proposition 1.4.2, on considère seulement le cas où $r > 1$. On va vérifier $\mathcal{S}^\theta_{q;\vec{s}}(\hat{f}\hat{g}) = \mathcal{S}\hat{f}\mathcal{S}^\theta_{q;\vec{s}}\hat{g}$, les autres propriétés du théorème étant évidentes.

Utilisons la notion de produit de q-convolution introduite dans le paragraphe 1.4.3 ; on a :

$$\hat{\mathcal{B}}_{q;s_r}(\hat{f}\hat{g}) = \hat{\mathcal{B}}_{q;s_r}\hat{f} \hat{\star}_{q;s_r} \hat{\mathcal{B}}_{q;s_r}\hat{g}.$$

Comme $\hat{g} \in \mathbb{C}[[x]]_{q;s_r}$ et $\hat{f} \in \mathbb{C}\{x\}$, on a $\hat{f}\hat{g} \in \mathbb{C}[[x]]_{q;s_r}$; par unicité du prolongement analytique, on obtient l'expression suivante :

$$\mathcal{S}^\theta\hat{\mathcal{B}}_{q;s_r}(\hat{f}\hat{g}) = \mathcal{S}\hat{\mathcal{B}}_{q;s_r}\hat{f} \star_{q;s_r} \mathcal{S}^\theta\hat{\mathcal{B}}_{q;s_r}\hat{g},$$

où $\mathcal{S}\hat{\mathcal{B}}_{q;s_r}\hat{f} \in \mathbb{E}_{q;s_r}$; et le lemme 2.4.4 ci-dessous nous assurera que $\mathcal{S}^\theta\hat{\mathcal{B}}_{q;s_r}(\hat{f}\hat{g}) \in \mathbb{H}^\theta_{q;s_r - s_{r-1}}$. Considérons ensuite $\mathcal{L}^\theta_{q;s_r - s_{r-1}}\mathcal{S}^\theta\hat{\mathcal{B}}_{q;s_r}(\hat{f}\hat{g})$; d'après les lemmes 2.4.4-5, on aura

$$\mathcal{L}^\theta_{q;s_r - s_{r-1}}\mathcal{S}^\theta\hat{\mathcal{B}}_{q;s_r}(\hat{f}\hat{g}) = \mathcal{S}\hat{\mathcal{B}}_{q;s_{r-1}}\hat{f} \star_{q;s_{r-1}} \mathcal{L}^\theta_{q;s_r - s_{r-1}}\mathcal{S}^\theta\hat{\mathcal{B}}_{q;s_r}\hat{g} \in \tilde{\mathbb{H}}^\theta_{q;s_r - s_{r-1}},$$

et il en sera de même pour les autres itérés de transformées de Laplace. Ceci entraînera la relation $\mathcal{S}^\theta_{q;\vec{s}}(\hat{f}\hat{g}) = \mathcal{S}\hat{f}\mathcal{S}^\theta_{q;\vec{s}}\hat{g}$. $\square$

2.4.4. Lemme. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $0 < s' \leq s$. On a les assertions suivantes.

(i) Si $\varphi \in \mathbb{E}_{q;s}$ et $\gamma \in \mathbb{H}^\theta_{q;s'}$, alors $\varphi \star_{q;s} \gamma \in \mathbb{H}^\theta_{q;s'}$.

(ii) L'énoncé (i) est encore vrai si l'on change $\mathbb{H}^\theta_{q;s'}$ en $\tilde{\mathbb{H}}^\theta_{q;s'}$.

Preuve – Vu le lemme 1.4.4 et le fait que le q-convolé de deux séries convergentes reste convergent, il suffit de vérifier la croissance à l'infini de la fonction q-convolée $\varphi \star_{q;s} \gamma$. Soit $\varphi(\xi) = \sum_{n \geq 0} \alpha_n \xi^n$; du fait que $\varphi \in \mathbb{E}_{q;s}$, il existe $R > 0$ tel que $\alpha_n = O(R^n q^{-sn(n-1)/2})$ si $n \to \infty$. Quitte à faire une homothétie sur la variable ξ, on suppose ceci : $|\alpha_n| < Aq^{-sn(n-1)/2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, où $A = |\alpha_0| + 1$ par exemple. Avec l'hypothèse que $\gamma \in \mathbb{H}^\theta_{q;s'}$ ou $\tilde{\mathbb{H}}^\theta_{q;s'}$, on peut choisir un voisinage sectoriel V de d_θ sur lequel on ait, si $|\xi| > 1$, alors $|\gamma(\xi)| < Kq^{\frac{1}{2s'}\log_q^2|\xi|}|\xi|^\mu$, où $K > 0$, $\mu \in \mathbb{R}$ sont des constantes convenables. En choisissant μ tel que $\mu > 1/s + 1/2$, on en déduit l'estimation suivante :

$$q^{-sn(n-1)/2}|\xi^n||\gamma(q^{-sn}\xi)| < Kq^{\frac{1}{2s'}\log_q^2|\xi|}|\xi|^\mu q^{-n} q^{n\frac{s-s'}{2s'}(ns - 2\log_q|\xi|)},$$

où $n \in \mathbb{N}$ et $\xi \in V$ avec $|\xi| > 1$.

Soit $\xi \in V$ tel que $|\xi| > 1$. On pose $m_\xi = \min\{m \in \mathbb{N} : |\xi| \leq q^{sm/2}\}$. Avec la définition de $\varphi \star_{q;s} \gamma$ et l'estimation obtenue précédemment sur le produit $q^{-sn(n-1)/2}|\xi^n||\gamma(q^{-sn}\xi)|$, on a :

$$\begin{aligned} |\varphi \star_{q;s} \gamma(\xi)| &< AKq^{\frac{1}{2s'}\log_q^2|\xi|}|\xi|^\mu \sum_{0 \leq n \leq m_\xi} q^{-n} q^{\frac{s-s'}{2s'}n(ns - 2\log_q|\xi|)} + \\ &\qquad + AK \sum_{n > m_\xi} q^{-sn(n-1)/2}|\xi^n| \\ &< \frac{AK}{1 - q^{-1}}\, q^{\frac{1}{2s'}\log_q^2|\xi|}|\xi|^\mu + K' q^{\frac{1}{2s}\log_q^2|\xi|}|\xi|^{\mu'}, \end{aligned}$$

où $K' > 0$ et $\mu' \in \mathbb{R}$. Ceci termine la preuve du lemme. □

2.4.5. Lemme. Sous les hypothèses du lemme 2.4.4 (ii), on a

$$\mathcal{L}^{\theta}_{q;s'}(\varphi \star_{q;s} \gamma) = \mathcal{L}^{\theta}_{q;s'}\varphi \star_{q;s-s'} \mathcal{L}^{\theta}_{q;s'}\gamma$$

(ici, on conventionne que $F \star_{q;0} G = FG$, produit usuel entre les fonctions).

Preuve – Soient $\varphi = \sum_{n\geq 0} \alpha_n \xi^n \in \mathbb{E}_{q;s}$ et $\gamma \in \tilde{\mathbb{H}}^{\theta}_{q;s'}$; on distinguera deux cas : $s = s'$ et $s > s'$.

Cas où $s > s'$. On a : $\mathcal{L}^{\theta}_{q;s'}\varphi = \sum_{n\geq 0} \alpha_n q^{s'n(n-1)/2}\xi^n \in \mathbb{E}_{q;s-s'}$, $\mathcal{L}^{\theta}_{q;s'}\gamma \in \tilde{\mathbb{G}}^{\theta}_{q;s'}$. Notons $f := \mathcal{L}^{\theta}_{q;s'}\varphi \star_{q;s-s'} \mathcal{L}^{\theta}_{q;s'}\gamma$; on a $f \in \tilde{\mathbb{G}}^{\theta}_{q;s'}$, d'après l'assertion 1.4.5. En développant

$$f(\zeta) = \sum_{n\geq 0} \alpha_n q^{s'n(n-1)/2}\zeta^n \mathcal{L}^{\theta}_{q;s'}\gamma(q^{-n(s-s')}\zeta),$$

et avec Fubini on obtient que $\mathcal{B}^{\theta}_{q;s'} f = \varphi \star_{q;s} \gamma$; ceci prouve le lemme.

Cas où $s = s'$. Il suffit de remarquer que $\tilde{\mathbb{G}}^{\theta}_{q;s}$ sont des $\mathbb{C}\{x\}$-modules ; voir le lemme 1.4.1 et la proposition 1.4.2. □

3. Gq-multisommabilité dans les équations aux q-différences.

Jusqu'à la fin de l'article, Δ désigne un opérateur aux q-différences de la forme

$$\Delta = a_0(x) + a_1(x)\sigma_q + ... + a_m(x)\sigma_q^m,$$

où m est un entier ≥ 1, $a_0(x)a_m(x) \not\equiv 0$ et où, pour tout entier j variant de 0 à m,

$$a_j(x) = \sum_{\nu\geq 0} a_{j,\nu}x^{\nu} \in \mathbb{C}\{x\}.$$

Pour chaque entier j tel que $a_j(x) \not\equiv 0$, désignons par $\mathrm{val}(a_j)$ (resp. M_j), la valuation de la fonction analytique $a_j(x)$ en $x = 0$ (resp. le point M_j de coordonnés $(j, \mathrm{val}(a_j))$). On note $PN(\Delta)$ l'enveloppe convexe de $\mathbb{R}^2$ engendré par les demi-droites ascendantes partant des points M_j. Par définition, $PN(\Delta)$ est le polygone de Newton de Δ ; on a $PN(\Delta) \subset [0, m] \times [0, +\infty[$.

Quitte à changer la variable x en $z = x^{1/\nu}$ avec $\nu \in \mathbb{N}^*$ convenable, on supposera que **toutes les pentes de $PN(\Delta)$ sont entières**. On appellera *multiplicité d'une pente* la longueur de la projection du côté de la pente sur l'axe des abscisses ; on écrira $\vec{\Delta} := (k_1, k_2, ..., k_m)$ la suite croissante formée des pentes de $PN(\Delta)$ comptées avec leurs multiplicités respectives.

Le résultat central de la partie est le théorème 3.3.2, qui affirme que toute série entière figurant dans un système fondamental de solutions formelles de $\Delta y = 0$ est Gq-multisommable ; il s'ensuit que si une série entière $\hat{f}$ vérifie $\Delta\hat{f} \in \mathbb{C}\{x\}$, alors elle est Gq-$\vec{\Delta}$-sommable. Pour établir ces résultats, l'un des ingrédients principaux sera d'utiliser la factorisation analytique de l'équation. On trouvera quelques remarques dans le dernier paragraphe de la partie.

3.1. *Factorisation analytique de l'opérateur* Δ. Soit $k := k_m$ la pente la plus grande de $PN(\Delta)$. En effectuant le changement $y = x^r q^{-\frac{k}{2}\log_q x(\log_q x - 1)} z$, on a

$$\Delta y = x^r q^{-\frac{k}{2}\log_q x(\log_q x-1)} \bar{\Delta} z,$$

avec $\bar{\Delta} = \sum_{j=0}^m q^{jr-kj(j-1)/2} a_j(x) x^{-kj} \sigma_q^j$. On observe que $PN(\bar{\Delta})$ possède une pente horizontale, les autres étant strictement négatives ou verticales. Pour simplifier, on suppose que $\bar{\Delta} = \sum_{j=0}^m b_j(x)\sigma_q^j$ et que $b_j \in \mathbb{C}\{x\}$, $b_m(0) \neq 0$. Désignons par $P_m(X)$ le polynôme caractéristique correspondant à la pente horizontale de $\bar{\Delta}$: $P_m(X) = \sum_{j=0}^m b_j(0) X^j$, où les $b_0(0)$, ..., $b_{m-1}(0)$ ne sont pas tous nuls. Désignons enfin par r_m un nombre complexe tel que $P_m(q^{r_m}) = 0$ et que $P_m(q^{r_m+l}) \neq 0$ pour $l \in \mathbb{N}^*$.

3.1.1. Lemme. *Il existe une série entière convergente $f \in \mathbb{C}\{x\}$ telle que : (1) $f(0) = 1$; (2) la fonction $y_m := x^{r_m} q^{-\frac{k_m}{2}\log_q x(\log_q x-1)} f$ soit solution de l'équation $\Delta y = 0$.*

Preuve – Voir [Zh], p. 252. □

Notons $\mathbb{C}\{x\}^1$ l'ensemble des séries entières convergentes $f \in \mathbb{C}\{x\}$ telles que $f(0) = 1$. C'est un groupe multiplicatif, stable pour l'opérateur aux q-différences $\sigma_q : f(x) \mapsto f(qx)$.

Considérons la fonction y_m du lemme précédent ; soient $\alpha_m = q^{r_m}$ et $g(x) = f(qx)/f(x)$; on a $\alpha_m \in \mathbb{C}^*$, $g \in \mathbb{C}\{x\}^1$. Du fait que y_m annule à la fois les opérateurs $x^{k_m}\sigma_q - \alpha_m g(x)$ et Δ, on peut factoriser Δ sous la forme suivante : $\Delta = \Delta'(x^{k_m}\sigma_q - \alpha_m g(x))$, où $\Delta' \in \mathbb{C}\{x\}[\sigma_q]$ est d'ordre diminué de 1 par rapport à Δ. De plus, les pentes du polygone de Newton de Δ' coïncident avec les $m-1$ premières valeurs de celles de Δ (comptées avec multiplicité).

En itérant le processus $\Delta \mapsto \Delta'$, l'opérateur Δ se décompose de la façon suivante :

$$\Delta = g_0(x)(x^{k_1}\sigma_q - \alpha_1 g_1(x))(x^{k_2}\sigma_q - \alpha_2 g_2(x))...(x^{k_m}\sigma_q - \alpha_m g_m(x)), \tag{3.1.2}$$

où $g_0(x) \in \mathbb{C}\{x\}$, $(k_1, ..., k_m) = \vec{\Delta}$, et, pour j variant de 1 à m, $\alpha_j \in \mathbb{C}^*$, $g_j \in \mathbb{C}\{x\}^1$.

3.1.3. Lemme. *Soit $\alpha \in \mathbb{C}^*$, $g \in \mathbb{C}\{x\}^1$ et $k \in \mathbb{Z}$. Il existe une et une seule paire de séries entières u, $v \in \mathbb{C}\{x\}^1$ vérifiant la relation $x^k\sigma_q - \alpha g(x) = u(x)(x^k\sigma_q - \alpha)v(x)$ dans l'anneau $\mathbb{C}\{x\}[\sigma_q]$.*

Preuve – L'égalité $x^k\sigma_q - \alpha g(x) = u(x)(x^k\sigma_q - \alpha)v(x)$ équivaut aux relations :

$$u(x)v(qx) = 1, \quad u(x)v(x) = g(x),$$

lesquelle sont vérifiées si, et seulement si :

$$u(qx)/u(x) = g(qx), \quad v(x)/v(qx) = g(x).$$

En faisant opérer successivement toutes les puissances positives de $\sigma_{q^{-1}}$ sur ces deux dernières équations (ici, $q > 1$), on déduit que

$$u_0(x) = \prod_{n \geq 0} g(q^{-n}x), \quad v_0(x) = \prod_{n \geq 1} \frac{1}{g(q^{-n}x)}$$

constituent une solution du problème. L'unicité résulte du fait que dans $\mathbb{C}\{x\}$, l'équation $y(x)/y(qx) = 1$ n'a pas de solution non constante. □

Par conséquent, la relation (3.1.2) s'exprime en celle-ci :

$$\Delta = h_0(x)(x^{k_1}\sigma_q - \alpha_1)h_1(x)(x^{k_2}\sigma_q - \alpha_2)h_2(x)...(x^{k_m}\sigma_q - \alpha_m)h_m(x), \tag{3.1.4}$$

où $h_0 \in \mathbb{C}\{x\}$ (ayant en $x = 0$ la même valuation que le coefficient de σ_q^0 de Δ), $(k_1, ..., k_m) = \vec{\Delta}$, $\alpha_j \in \mathbb{C}^*$ et $h_j \in \mathbb{C}\{x\}^1$ $(1 \leq j \leq m)$.

3.1.5. Dans la formule (3.1.4), on a d'une part $k_{j+1} \geq k_j$ et, d'autre part, si $k_{j+1} = k_j$, alors $\alpha_{j+1}/\alpha_j \notin q^{-\mathbb{N}^*}$. Soient ℓ, j deux entiers compris entre 1 et m tels que $\ell > j$; on note $\ell \succ j$ et on dit que ℓ *précède* j (dans Δ) si $k_\ell = k_j$ et $\alpha_\ell/\alpha_j \in q^{\mathbb{N}}$. On pose :

$$\mu_j(\Delta) = \mathrm{Card}\{\ell \in]j, m] : \ell \succ j\}.$$

3.2. *Recherche des solutions formelles.* Depuis les années trente, on sait prouver l'existence d'un système fondamental de solutions formelles d'une équation aux q-différences. Dans la suite, on va brièvement expliquer comment se servir de la factorisation (3.1.4) pour construire, au moyen des séries entières et des expressions de la forme

$$(\log_q x)^\nu x^r q^{-\frac{k}{2}\log_q x(\log_q x - 1)}, \quad \nu \in \mathbb{N},\ r \in \mathbb{C},\ k \in PN(\Delta),$$

un système fondamental de solutions formelles pour $\Delta y = 0$.

3.2.1. Notations. Soit Δ un opérateur aux q-différences donné sous la forme (3.1.4), où $k_j \in \mathbb{Z}$ pour $1 \leq j \leq m$; désignons par r_j le nombre complexe vérifiant simultanément $q^{r_j} = \alpha_j$ et $\Im(r_j) \in] - \pi i/\log q, \pi i/\log q]$; posons

$$e_j = x^{r_j} q^{-\frac{k_j}{2}\log_q x(\log_q x - 1)}.$$

Par définition, on écrira $\hat{y} \in e_j\mathbb{C}[[x]][\log_q x]$ (resp. $\hat{y} \in e_j\mathbb{C}[[x]][\log_q x]_\mu$ avec $\mu \in \mathbb{N}$) lorsque $\hat{y}/e_j$ est un polynôme en $\log_q x$ (resp. de degré au plus égal à μ), ayant pour coefficients des séries entières. Il faut noter que $\ell \succ j$ si et seulement si $e_\ell/e_j \in x^{\mathbb{N}}$ $(\ell > j)$; il s'ensuit que $e_\ell\mathbb{C}[[x]][\log_q x] \subset e_j\mathbb{C}[[x]][\log_q x]$ quand $\ell \succ j$.

Notons

$$\hat{\mathcal{F}}(\Delta) = \big\{ \sum_{1 \leq j \leq m} e_j P_j(\log_q x) : P_j(Y) \in (\mathbb{C}[[x]][x^{-1}])[Y] \big\}.$$

C'est un espace vectoriel sur le corps de fraction, $\mathbb{C}[[x]][x^{-1}]$, de l'anneau des séries entières. Pour tous r, $r' \in \mathbb{C}$ et k, $k' \in \mathbb{Z}$, on pose :

$$x^r q^{-\frac{k}{2}\log_q x(\log_q x - 1)} x^{r'} q^{-\frac{k'}{2}\log_q x(\log_q x - 1)} = x^{r+r'} q^{-\frac{k+k'}{2}\log_q x(\log_q x - 1)};$$

on obtient de façon naturelle un anneau commutatif contenant $\hat{\mathcal{F}}(\Delta)$ que l'on notera $\hat{\hat{\mathcal{F}}}(\Delta)$. L'action de σ_q s'y étend de la manière suivante :

$$\sigma_q(\log_q x) = \log_q x + 1, \quad \sigma_q(x^r q^{-\frac{k}{2}\log_q x(\log_q x - 1)}) = q^r x^{r-k} q^{-\frac{k}{2}\log_q x(\log_q x - 1)}.$$

3.2.2. Définition. Etant donnée $\hat{y}_1$, ..., $\hat{y}_n$ une famille d'éléments de $\hat{\hat{\mathcal{F}}}(\Delta)$ qui vérifient $\Delta y = 0$, on dit qu'elle constitue un *système fondamental* si son q-Wronskien $W_q(\hat{y}_1, ..., \hat{y}_m)$ défini par

$$W_q(\hat{y}_1, ..., \hat{y}_m) = \det((\sigma_q)^{i-1}\hat{y}_j)_{1 \leq i,j \leq m}$$

est non nul.

3.2.3. Théorème. L'équation $\Delta y = 0$ possède un système fondamental de solutions formelles $(\hat{y}_j)_{1\leq j\leq m}$ avec, pour chaque j, $\hat{y}_j \in e_j\mathbb{C}[[x]][\log_q x]_{\mu_j(\Delta)}$.

Preuve – On procède par récurrence sur l'ordre de l'équation. Si $m = 1$, c'est une équation d'ordre 1 et la fonction e_m/h_m en est une solution, non nulle, donc *fondamentale.*

Soit $m > 1$; sans nuire à la généralité du résultat, on supposera que $h_m \equiv 1$. Soit ℓ un entier compris entre 1 et $m-1$; on considère l'opérateur Δ_ℓ défini par :

$$\Delta_\ell = h_0(x^{k_1}\sigma_q - \alpha_1)...h_{\ell-1}(x^{k_\ell}\sigma_q - \alpha_\ell).$$

Supposons que l'équation $\Delta_\ell y = 0$ admet un système fondamental de solutions formelles $(\hat{y}_{\ell,j})_{1\leq j\leq \ell}$ avec $\hat{y}_{\ell,j} \in e_j\mathbb{C}[[x]][\log_q x]_{\mu_j(\Delta_\ell)}$. Nous nous proposons d'étudier l'équation $\Delta_{\ell+1}y = 0$, avec $\Delta_{\ell+1} = \Delta_\ell h_\ell(x^{k_{\ell+1}}\sigma_q - \alpha_{\ell+1})$.

La fin de la démonstration revient à démontrer les deux lemmes suivants.

3.2.4. Lemme. Pour chaque entier j compris entre 1 et ℓ, il existe

$$\hat{y}_{\ell+1,j} \in e_j\mathbb{C}[[x]][\log_q x]_{\mu_j(\Delta_{\ell+1})}$$

qui vérifie l'équation en y :

$$h_\ell(x^{k_{\ell+1}}\sigma_q - \alpha_{\ell+1})y = \hat{y}_{\ell,j}.$$

3.2.5. Lemme. Pour chaque $j = 1, ..., \ell$, fixons $\hat{y}_{\ell+1,j}$ vérifiant le lemme précédent et posons $\hat{y}_{\ell+1,\ell+1} = e_{\ell+1}$. Alors $(\hat{y}_{\ell+1,j})_{1\leq j\leq \ell+1}$ est un système fondamental de solutions formelles pour $\Delta_{\ell+1}y = 0$.

Preuve du lemme 3.2.4 – Par hypothèse, on a :

$$\hat{y}_{\ell,j} = e_j \sum_{\nu=0}^{\mu_j(\Delta_\ell)} (\log_q x)^\nu \hat{f}_{\ell,j,\nu}, \quad \hat{f}_{\ell,j,\nu} \in \mathbb{C}[[x]];$$

il reste à établir l'existence de séries entières $\hat{f}_{\ell+1,j,\nu}$ telles que

$$h_\ell(x^{k_{\ell+1}}\sigma_q - \alpha_{\ell+1})e_j \sum_{\nu=0}^{\mu_j(\Delta_{\ell+1})} (\log_q x)^\nu \hat{f}_{\ell+1,j,\nu} = e_j \sum_{\nu=0}^{\mu_j(\Delta_\ell)} (\log_q x)^\nu \hat{f}_{\ell,j,\nu}.$$

On distinguera deux cas : (i) $\mu_j(\Delta_{\ell+1}) = \mu_j(\Delta_\ell)$; (ii) $\mu_j(\Delta_{\ell+1}) = \mu_j(\Delta_\ell) + 1$.

Cas (i) : $\mu_j(\Delta_{\ell+1}) = \mu_j(\Delta_\ell)$. On pose $\mu = \mu_j(\Delta_\ell)$. En identifiant les coefficients de $e_j(\log_q x)^\nu$ dans chacune des équations précédentes portant sur les $\hat{f}_{\ell+1,j,\nu}$, il s'ensuit que ces séries doivent vérifier les relations suivantes :

$$\begin{aligned}(3.2.6)\qquad &(\alpha_j x^{k_{\ell+1}-k_j}\sigma_q - \alpha_{\ell+1})\hat{f}_{\ell+1,j,\nu} \\ &= \frac{\hat{f}_{\ell,j,\nu}}{h_\ell} - \alpha_j x^{k_{\ell+1}-k_j} \sum_{i=\nu+1}^{\mu} \binom{i}{\nu}\sigma_q \hat{f}_{\ell+1,j,i}, \quad 1 \leq \nu \leq \mu.\end{aligned}$$

L'hypothèse $\mu_j(\Delta_{\ell+1}) = \mu_j(\Delta_\ell)$ équivalant à dire que $k_{\ell+1} > k_j$ ou $k_{\ell+1} = k_j$ mais $\alpha_{\ell+1}/\alpha_j \notin q^{\mathbb{N}}$, l'opérateur $(\alpha_j x^{k_{\ell+1}-k_j}\sigma_q - \alpha_{\ell+1})$ est alors un automorphisme de $\mathbb{C}[[x]]$; d'où l'existence (et même l'unicité) des séries entières $\hat{f}_{\ell+1,j,\nu}$ qui vérifient (3.2.6).

Cas (ii) : $\mu_j(\Delta_{\ell+1}) = \mu_j(\Delta_\ell) + 1$. On a $k_{\ell+1} = k_j$, $\alpha_{\ell+1} = \alpha_j q^n$ avec $n \in \mathbb{N}$. En posant $\mu = \mu_j(\Delta_\ell)$, les séries $\hat{f}_{\ell+1,j,\nu}$ en question vérifent les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
&(\sigma_q - q^n)\hat{f}_{\ell+1,j,\mu+1} = 0,\\
&(\sigma_q - q^n)\hat{f}_{\ell+1,j,\nu} = \frac{\hat{f}_{\ell,j,\nu}}{\alpha_j h_\ell} - \sum_{i=\nu+1}^{\mu+1} \binom{i}{\nu} \sigma_q \hat{f}_{\ell+1,j,i}, \quad 1 \le \nu \le \mu.
\end{aligned} \tag{3.2.7}$$

Du fait que dans $\mathbb{C}[[x]]$, $\ker(\sigma_q - q^n)$ et $\operatorname{coker}(\sigma_q - q^n)$ sont tous deux unidimensionnels, on obtient que le système (3.2.7) admet des solutions $\hat{f}_{\ell+1,j,\nu}$ dans $\mathbb{C}[[x]]$ (qui sont d'ailleurs uniques à un même facteur multiplicatif complexe près) ; ceci termine la preuve du lemme 3.2.4.

Preuve du lemme 3.2.5 – On voit clairement que les $\hat{y}_{\ell+1,j}$ annulent l'opérateur $\Delta_{\ell+1}$; il reste à considerer le q-Wronskien du système. Or, avec la définition des $\hat{y}_{\ell+1,j}$ on a :

$$\begin{aligned}
&\lambda_i \sigma_q^i \hat{y}_{\ell+1,\ell+1} - \beta_i \sigma_q^{i-1} \hat{y}_{\ell+1,\ell+1} = 0,\\
&\lambda_i \sigma_q^i \hat{y}_{\ell+1,j} - \beta_i \sigma_q^{i-1} \hat{y}_{\ell+1,j} = \sigma_q^{i-1} \hat{y}_{\ell,j}, \quad 1 \le j \le \ell,
\end{aligned}$$

où $1 \le i \le \ell$, $\lambda_i = \sigma_q^{i-1}(h_\ell x^{k_{\ell+1}})$, $\beta_i = \alpha_{\ell+1}\sigma_q^{i-1} h_\ell$; on en déduit que

$$W_q(\hat{y}_{\ell+1,1}, ..., \hat{y}_{\ell+1,\ell+1}) = \frac{1}{\beta_1 \dots \beta_\ell} W_q(\hat{y}_{\ell,1}, ..., \hat{y}_{\ell,\ell}) \sigma_q^\ell \hat{y}_{\ell+1,\ell+1};$$

ainsi, le lemme s'en déduit directement avec l'hypothèse imposée sur $(\hat{y}_{\ell,j})$.

En combinant les lemmes 3.2.4, 3.2.5 et la méthode de récurrence, on obtient le théorème du paragraphe. □

Remarquons que le théorème que l'on vient de démontrer était déjà connu à l'époque de C.R. Adams ; voir [Ad]. En ce qui concerne l'appelation de *système fondamental de solutions formelles*, il est naturel de se poser la question suivante : Est-ce que toute solution formelle peut s'exprimer comme combinaison linéaire d'éléments du système $(\hat{y}_j)_{1 \le j \le m}$ du théorème 3.2.3 ? Pour répondre à cette question, il est important de préciser le choix du corps des q-constantes ; nous nous contenterons de faire remarquer le résultat suivant.

3.2.8. Théorème. Soit $(\hat{y}_j)_{1 \le j \le m}$ un système de solutions formelles de l'équation $\Delta y = 0$ obtenu dans le théorème 3.2.3. Soit $\hat{y}$ un élément de $\hat{\mathcal{F}}(\Delta)$ vérifiant $\Delta \hat{y} = 0$. Alors il existe des nombres complexes c_j tels que $\hat{y} = \sum_{j=1}^m c_j \hat{y}_j$.

Preuve – Notons J l'ensemble des entiers compris entre 1 et m tels que, étant donné un entier $\ell \in [1, m]$, il existe un et un seul entier j dans J vérifiant $\ell \succ j$. Puisque $\ell \succ j \Leftrightarrow e_\ell / e_j \in x^{\mathbb{N}}$, on a la décomposition suivante :

$$\hat{\mathcal{F}}(\Delta) = \oplus_{j \in J} e_j (\mathbb{C}[[x]][x^{-1}])[\log_q x].$$

Soit $\hat{y} \in \hat{\mathcal{F}}(\Delta)$ tel que $\Delta \hat{y} = 0$; on pose $\hat{y} = \sum_{j \in J} e_j P_j(\log_q x)$, où $P_j(Y) \in (\mathbb{C}[[x]][x^{-1}])[Y]$. Pour tout $j \in J$, on désigne par $\Delta_{\underline{j}}$ l'opérateur aux q-différences tel que $\Delta(e_j z) = e_j \Delta_{\underline{j}}\, z$, z étant la fonction inconnue. Les pentes de $PN(\Delta_{\underline{j}})$ sont les pentes de $PN(\Delta)$ diminuées par k_j ; en particulier, on remarquera que $\Delta_{\underline{j}}$ admet une pente horizontale.

Ceci étant, on a : $e_j \sum_{j\in J} \Delta_{\underline{j}}(P_j(\log_q x)) = 0$, ce qui implique que pour tout $j \in J$, on a : $\Delta_{\underline{j}}(P_j(\log_q x)) = 0$. Nous sommes alors conduit à vérifier le résultat suivant.

3.2.9. Lemme. Soient $K_0 = \{j \in [1, m] : e_j \in x^{\mathbb{Z}}\}$ *et* $\mu = \mathrm{Card} K_0$. *Alors les solutions formelles de* $\Delta y = 0$ *dans* $(\mathbb{C}[[x]][x^{-1}])[\log_q x]$ *constituent un espace vectoriel de dimension* μ *sur* $\mathbb{C}$, *qui admet pour base les éléments* $(\hat{y}_j)_{j\in K_0}$ *du système* $(\hat{y}_j)_{1\le j\le m}$ *du théorème 3.2.3.*

Preuve – Ceci résulte immédiatement de la preuve du lemme 3.2.4. □

3.3. *Sommabilité des solutions formelles.* Dans le théorème 3.2.3, on peut choisir $\hat{y}_m = e_m/h_m$, donc $\hat{y}_m/e_m \in \mathbb{C}\{x\}$; on va généraliser ce résultat pour tous les membres du système $(\hat{y}_j)$.

3.3.1. Notations complémentaires. Nous reprenons les notations (3.2.3). En outre, à chaque paire d'entiers (ℓ, j) telle que $1 \le j \le \ell \le m$, on associe le multi-ordre $\vec{s}_{\ell,j} \in \Omega^+$ de la manière suivante. Si $k_\ell = k_j$, on pose $\vec{s}_{\ell,j} = \emptyset$; sinon, $\vec{s}_{\ell,j}$ est l'élément de Ω^{+*} composé des inverses respectifs des éléments non nuls de l'ensemble $\{k_\ell - k_\nu : j \le \nu < \ell\}$.

Pour tout multi-ordre $\vec{s} \in \Omega^+$ et toute direction d_θ, on définit de manière évidente les sous-espaces $e_j\mathbb{C}\{x\}_{q;\vec{s}}[\log_q x]_\mu$, $e_j\mathbb{C}\{x\}^\theta_{q;\vec{s}}[\log_q x]_\mu$ de l'espace vectoriel $e_j\mathbb{C}[[x]][\log_q x]_\mu$ introduit au (3.2.3).

Ceci étant, nous pouvons maintenant énoncer une version plus précise du théorème 3.2.3.

3.3.2. Théorème. Il existe un système fondamental de solutions formelles de l'équation $\Delta y = 0$, $(\hat{y}_j)_{1\le j\le m}$, *tel que* $\hat{y}_j \in e_j\mathbb{C}\{x\}_{q;\vec{s}_{m,j}}[\log_q x]_{\mu_j(\Delta)}$.

Plus précisemment, soit $\hat{y}_j = e_j \sum_{\nu=0}^{\mu_j(\Delta)} (\log_q x)^\nu \hat{f}_{j,\nu}$ *dans le théorème 3.2.3. Alors* $\hat{f}_{j,\nu} \in \mathbb{C}\{x\}_{q;\vec{s}_{m,j}}$ *et*

$$DS(\hat{f}_{j,\nu}) \subset \cup_{j<\ell\le m, k_j<k_\ell}\{\theta \in \mathbb{R} : \frac{\alpha_\ell}{\alpha_j} e^{-(k_\ell - k_j)i\theta} \in \mathbb{R}^{+*}\}.$$

Preuve – On va procéder de manière analogue à ce que l'on a fait pour le théorème 3.2.3 : si $m = 1$, on a $e_m/h_m \in \mathbb{C}\{x\}$, ce qui correspond à $\vec{s}_{m,m} = \emptyset$; si $m > 1$, étant donné ℓ un entier compris entre 1 et $m - 1$ on suppose que $\hat{f}_{\ell,j,\nu} \in \mathbb{C}\{x\}_{q;\vec{s}_{\ell,j}}$ et

$$DS(\hat{f}_{\ell,j,\nu}) \subset \cup_{j<l\le \ell, k_j<k_l}\{\theta \in \mathbb{R} : \frac{\alpha_l}{\alpha_j} e^{-(k_l - k_j)i\theta} \in \mathbb{R}^{+*}\}.$$

Pour obtenir la sommabilité des $\hat{f}_{\ell+1,j,\nu}$, nous avons besoin du lemme suivant.

3.3.3. Lemme. Soient $k \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{C}^*$, $\hat{f}$, $\hat{g} \in \mathbb{C}[[x]]$ *tels que* $(x^k\sigma_q - \alpha)\hat{f} = \hat{g}$.

(i) Si $k = 0$ *et si* $\hat{g} \in \mathbb{C}\{x\}$, *alors* $\hat{f} \in \mathbb{C}\{x\}$.

(ii) Si $k > 0$ *et si* $\hat{g} \in \mathbb{C}\{x\}_{q;\vec{s}}$, *avec* $\vec{s} = (1/k, s_2, ..., s_r) \in \Omega^{+*}$, *alors* $\hat{f} \in \mathbb{C}\{x\}_{q;\vec{s}}$ *et* $DS(\hat{f}) \subset DS(\hat{g}) \cup \{\theta \in \mathbb{R} : \alpha e^{-ik\theta} \in \mathbb{R}^{+*}\}$.

Preuve du lemme – L'assertion (i) résulte directement d'une comparaison des coefficients de $\hat{f}$ et $\hat{g}$; on ne considère que la seconde assertion, avec $k \in \mathbb{N}^*$.

Soit $s_1 = 1/k$ et appliquons la transformation formelle de q-Borel d'ordre s_1 à l'équation $(x^k\sigma_q - \alpha)\hat{f} = \hat{g}$; on a :

$$(q^{(1-k)/2}\xi^k - \alpha)\hat{\mathcal{B}}_{q;s_1}\hat{f}(\xi) = \hat{\mathcal{B}}_{q;s_1}\hat{g}(\xi).$$

En décomposant $1/(q^{(1-k)/2}\xi^k - \alpha)$ en éléments simples, on obtient :

$$\hat{\mathcal{B}}_{q;s_1}\hat{f}(\xi) = \sum_{\kappa=1}^{k} \frac{\beta_\kappa \hat{\mathcal{B}}_{q;s_1}\hat{g}(\xi)}{\xi - \alpha_\kappa}, \quad \beta_\kappa \in \mathbb{C}^*,\ (\alpha_\kappa)^k = \alpha q^{(k-1)/2}.$$

On est alors conduit à démontrer le résultat suivant.

3.3.4. Si $(\hat{\mathcal{B}}_{q;s_1}\hat{f})(\xi) = (\hat{\mathcal{B}}_{q;s_1}\hat{g})(\xi)/(1-\xi)$ et si $\hat{g} \in \mathbb{C}\{x\}^{\theta}_{q;\vec{s}}$, alors on a $\hat{f} \in \mathbb{C}\{x\}^{\theta}_{q;\vec{s}}$ pourvu que $\theta \neq 0 \bmod 2\pi$.

En effet, si $r = 1$, le résultat devient évident car $\hat{\mathcal{B}}_{q;s_1}\hat{g}$ et $\hat{\mathcal{B}}_{q;s_1}\hat{f}$ ont les mêmes propriétés d'analyticité et de croissance q-exponentielle dans toute direction ne passant pas par le point d'affixe 1.

Supposons $r \geq 2$. De l'égalité $\hat{\mathcal{B}}_{q;s_r} = \hat{\mathcal{B}}_{q;s_r-s_1}\hat{\mathcal{B}}_{q;s_1}$, on obtient

$$\hat{\mathcal{B}}_{q;s_r}\hat{f}(\zeta) = \varphi(\zeta)\hat{\star}_{q;s_r-s_1}\hat{\mathcal{B}}_{q;s_r}\hat{g}(\zeta),$$

où l'on a posé

$$\varphi(\zeta) = \hat{\mathcal{B}}_{q;s_r-s_1}(1/(1-\xi))(\zeta) \in \mathbb{E}_{q;s_r-s_1}.$$

D'après le lemme 2.4.4 (i), on obtient que $\hat{\mathcal{B}}_{q;s_r}\hat{f} \in \mathbb{H}^{\theta}_{q;s_r-s_{r-1}}$ car, d'une part, $s_r - s_1 \geq s_r - s_{r-1}$, et d'autre part, $\hat{\mathcal{B}}_{q;s_r}\hat{g} \in \mathbb{H}^{\theta}_{q;s_r-s_{r-1}}$ (par hypothèse).

Si $r = 2$, on utilise le lemme 2.4.5, avec $\gamma = \mathcal{B}_{q;s_2}\hat{g}$, $s = s_2 - s_1 = s'$; on obtient, à l'aide du lemme 2.3.2 :

$$\mathcal{L}^{\theta}_{q;s_2-s_1}\mathcal{S}^{\theta}\hat{\mathcal{B}}_{q;s_2}\hat{f} = (\mathcal{S}^{\theta}\hat{\mathcal{B}}_{q;s_1}\hat{g})(\xi)/(1-\xi),$$

ce qui montre que $\mathcal{L}^{\theta}_{q;s_2-s_1}\mathcal{S}^{\theta}\hat{\mathcal{B}}_{q;s_2}\hat{f} \in \tilde{\mathbb{H}}^{\theta}_{q;s_1}$; on prouve ainsi le résultat (3.3.4) dans le cas en question.

Si $r > 2$, il suffit d'appliquer à plusieurs reprises le lemme 2.4.5 et d'aboutir enfin à la relation

$$\mathcal{B}^{\theta}_{\vec{s}}\hat{f}(\xi) = (\mathcal{B}^{\theta}_{\vec{s}}\hat{g})(\xi)/(1-\xi),$$

avec

$$\mathcal{B}^{\theta}_{\vec{s}} = \mathcal{L}^{\theta}_{q;s_2-s_1}\ldots\mathcal{L}^{\theta}_{q;s_{r-j+1}-s_{r-j}}\ldots\mathcal{L}^{\theta}_{q;s_r-s_{r-1}}\mathcal{S}^{\theta}\hat{\mathcal{B}}_{q;s_r};$$

nous laissons le détail au lecteur.

Revenons au théorème 3.3.2. En appliquant le lemme 3.3.3 aux équations (3.2.6-8) et en remarquant que $\mathbb{C}\{x\}_{q;\vec{s}_{\ell,j}} \subset \mathbb{C}\{x\}_{q;\vec{s}_{\ell+1,j}}$ (car $[\vec{s}_{\ell,j}] \subset [\vec{s}_{\ell+1,j}]$, voir Proposition 2.4.2), on obtient la sommabilité et les directions singulières éventuelles pour chacune des séries $\hat{f}_{\ell+1,j,\nu}$, ce qui achève la preuve du théorème. □

Comme application du théorème 3.3.2, on remarque le résultat important suivant.

3.3.5. Théorème. Si $\hat{f} \in \mathbb{C}[[x]]$ est une série telle que $\Delta\hat{f} \in \mathbb{C}\{x\}$, alors on a $\hat{f} \in \mathbb{C}\{x\}_{q;\vec{s}}$ où $\vec{s} \in \Omega^+$ est la suite composée des inverses respectifs des éléments strictement positifs de l'ensemble $\{k_j : 1 \leq j \leq m\}$.

En particulier, si Δ n'a pas de pente strictement positive et si $\Delta\hat{f} \in \mathbb{C}\{x\}$, alors $\hat{f}$ elle-même est convergente.

Preuve – On suppose que $\hat{f}$ n'est pas la série nulle. Considérons d'abord le cas où $\Delta\hat{f} = 0$: $\hat{f}$ est solution (formelle) de l'équation $\Delta y = 0$. En tenant compte du lemme 3.2.9,

$\hat{f}$ est combinaison linéaire, à coefficients dans $\mathbb{C}$, de certaines $\hat{y}_j \in \mathbb{C}[[x]]$, $j_0 \leq j \leq j_0'$, qui correspondent à la pente horizontale avec $e_j \in x^{\mathbb{Z}}$. La sommabilité de $\hat{f}$ s'en déduit de celle de ces solutions $\hat{y}_j$.

Supposons donc $\Delta\hat{f} \neq 0$, et posons $a = \Delta\hat{f}$, $\Delta_{m+1} = \sigma_q(\frac{1}{a}\Delta) - \frac{1}{a}\Delta$; on a $\Delta_{m+1}\hat{f} = 0$ et on se ramène alors au cas que l'on vient de traiter, avec Δ_{m+1} remplaçant Δ. Par un calcul direct, on trouve que $PN(\Delta_{m+1}) = PN(\Delta) \cup \{0\}$; ceci termine la preuve. $\square$

Dans le théorème 3.3.5, on peut préciser les directions singulières de $\hat{f}$ en fonction des α_j et k_j.

3.4. *Quelques questions et remarques.* Un prolongement naturel de notre présent article serait d'étudier le phénomène de Stokes dans les équations aux q-différences ainsi que le problème des invariants, voire la théorie de Galois.

Pour bâtir une théorie de Galois à partir du Gq-resommation, la question suivante est particulièrement importante : est-ce que le produit de deux séries Gq-multisommables reste encore Gq-multisommable ? Dans l'affirmative, l'opérateur de resommation $\mathcal{S}^{\theta}_{q;\vec{s}}$ est-il un *morphisme d'algèbres q-différentielles* ? Nous connaissons certaines réponses partielles ; nous en citons ici deux sans démonstration.

3.4.1. Soient $s > 0$, $\theta \in \mathbb{R}$ et $\hat{f}$, $\hat{g} \in \mathbb{C}\{x\}^{\theta}_{q;s}$. On a $\hat{f}\hat{g} \in \mathbb{C}\{x\}^{\theta}_{q;s/2,s}$ et $\mathcal{S}^{\theta}_{q;s/2,s}(\hat{f}\hat{g}) = \mathcal{S}^{\theta}_{q;s}\hat{f}\ \mathcal{S}^{\theta}_{q;s}\hat{g}$.

3.4.2. Etant données $\hat{f}_1$, $\hat{f}_2 \in \mathbb{C}[[x]]$ telles que $\Delta_j\hat{f}_j \in \mathbb{C}\{x\}$ où $\Delta_j \in \mathbb{C}\{x\}[\sigma_q]$ pour $j = 1$, 2, on peut construire (par un algorithme) un opérateur $\Delta \in \mathbb{C}\{x\}[\sigma_q]$ tel que $\Delta(\hat{f}_1\hat{f}_2) \in \mathbb{C}\{x\}$; on en déduit que $\hat{f}_1\hat{f}_2$ est Gq-multisommable. *De plus*, on a

$$\mathcal{S}^{\theta}_{q;\vec{s}_1}\hat{f}_1\mathcal{S}^{\theta}_{q;\vec{s}_2}\hat{f}_2 = \mathcal{S}^{\theta}_{q;\vec{s}}(\hat{f}_1\hat{f}_2).$$

Grâce au théorème 3.3.2, on peut construire un système fondamental de solutions analytiques (sur le revêtement ...) pour une équation aux q-différences linéaire analytique. Ce résultat améliore celui de W.J. Trjitzinsky [Tr] sur le même sujet.

Remarquons enfin que l'on peut déduire de ce même théorème un résultat important de J.-P. Ramis [Ra2] sur la croissance des solutions entières d'une équation aux q-différences linéaire à coefficients polynomiaux. L'idée est la suivante : on trace le polygone de Newton relatif au point à l'infini et on forme un système fondamental de solutions formelles, les séries intervenant étant en puissance descendante en x (ou une ramification de x). Ces séries sont Gq-multisommables ; leurs Gq-sommes donnent naissance à un système fondamental de solutions analytiques, fondamental au sens q-analogue (à q-constantes près...). Ainsi on peut exprimer toute solution entière dans ce système et on obtient directement la croissance q-exponentielle de la solution.

Références.

[Ad] Adams, C. R., 1929. On the linear ordinary q-difference equations, *Ann. Math.*, Ser. II, 30, No. 2, p. 195-205

[Ba] Balser W., 1992. A different characterization of multisummable power series, *Analysis*, 12, p. 57-65.

[BBRS] **Balser W., Braaksma B.J.L., Ramis J.-P. et Sibuya Y., 1991.** Multisummability of formal power series solutions of linear ordinary differential equations, *Asymptotic Analysis*, 5, p. 27-45.

[Ec] **Ecalle J., 1992.** *Introduction aux fonctions analysables et preuve constructive de la conjecture de Dulac*, Hermann, Paris.

[GR] **Gasper G. et Rahman M., 1990.** *Basic hypergeometric series*, Encycl. Math. Appl., Cambridge Univ. Press, Cambridge.

[Li] **Littlewood J. E., 1907.** On the asymptotic approximation to integral functions of zero order, *Proc. London Math. Soc.*, Serie 2, no 5, p. 361-410.

[MR1] **Malgrange B. et Ramis J.-P., 1992.** Fonctions multisommables, *Ann. Inst. Fourier*, 42, p. 353-368.

[MZ] **Marotte F. et Zhang C., 1998.** Sur la sommabilité des séries entières solutions formelles d'une équation aux q-différences, II, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 327, Série I, p. 715-718.

[MR2] **Martinet J. et Ramis J.-P., 1991.** Elementary acceleration and multisummability I, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, Vol. 54, no 4, p. 331-401.

[Ra1] **Ramis J.-P., 1980.** Les séries k-sommables et leurs applications, *Complex Analysis, Microlocal Calculus and Relativistic Quantum Theory, Lecture Notes in Physics*, 126, p. 178-199.

[Ra2] **Ramis J.-P., 1992.** About the growth of entire functions solutions of linear algebraic q-difference equations, *Annales de la Fac. de Toulouse*, Série 6, Vol. I, no 1, p. 53-94.

[Tr] **Trjitzinsky W.J., 1933.** Analytic Theory of Linear q-Difference Equations, *Acta Mathematica*, 61, p. 1-38.

[Zh] **Zhang C., 1999.** Développements asymptotiques q-Gevrey et séries Gq-sommables, *Ann. Inst. Fourier*, 49, p. 227-261.

MAROTTE Fabienne et ZHANG Changgui
Département et Laboratoire de Mathématiques
Pôle Sciences et Technologie // Université de La Rochelle
Avenue Marillac // 17042 La Rochelle cedex 1

e-mail : fmarotte@univ-lr.fr ; czhang@univ-lr.fr

La fonction thêta de Jacobi et la sommabilité des séries entières q-Gevrey. I *

Résumé. Dans cette prépublication, première partie d'un article en préparation, nous présentons une notion de développement asymptotique adaptée aux séries entières q-Gevrey d'ordre un. Nous montrons que cette asymptotique est liée, de manière naturelle, à la fonction thêta de Jacobi, q-analogue de la fonction exponentielle. Une méthode de resommation en est ainsi déduite.

Abstract (Jacobi's theta function and summability of q-Gevrey power series. I). This preprint is the first part of a paper in preparation. In the following, we present a notion of asymptotic expansion adapted for one order q-Gevrey power series. It's shown that this asymptotic is naturally related to the Jacobi theta function, which is a q-analog of the usual exponential function. A summation method is then obtained.

0. Introduction

Dans tout ce qui suit, q **désigne un nombre réel strictement supérieur à un**.

(0.1) Dans [Zh1], on introduit une notion de développement asymptotique adaptée aux séries q-Gevrey d'ordre un. La définition est la suivante. Soient α un nombre réel, $\hat{f} = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière et f une fonction analytique sur un disque ouvert en colimaçon $\{x \in \tilde{\mathbb{C}}^* : 0 < |x| < R\}$ de la surface de Riemann du logarithme notée $\tilde{\mathbb{C}}^*$. On dit que f admet $\hat{f}$ pour développement asymptotique q-Gevrey d'ordre un dans la direction d'argument α si pour tout $r \in]0, R[$, il existe des constantes C, $A > 0$ telles que: $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall x \in \tilde{\mathbb{C}}$ de module $|x| < r$,

$$|f(x) - \sum_{m=0}^{n-1} a_m x^m| < CA^n q^{\frac{1}{2}(n^2 + (\frac{\arg x - \alpha}{\ln q})^2)} |x|^n,$$

où $\arg x = Im(\log x)$, log désignant la détermination principale du logarithme.

Cette asymptotique est en quelque sorte une asymptotique “exacte”, compte tenu de la propriété remarquable suivante. Si une fonction admet le même développement asymptotique dans deux directions distinctes, alors elle est uniquement déterminée. Par conséquent, d'une façon tout à fait analogue à ce que l'on a fait avec la notion de développement asymptotique Gevrey de Watson, on développe un procédé de resommation basé sur cette notion d'asymptoticité q-analogue. Ce dernier utilise, en effet, un formalisme fort similaire à la méthode de Borel-Laplace, en faisant intervenir la fonction $q^{\frac{1}{2}\log_q^2 x(\log_q x - 1)}$ ($\log_q x = \frac{\log x}{\ln q}$) comme q-analogue de la fonction exponentielle.

---

* Les principaux résultats de cette prépublication ont donné lieu à la Note intitulée *Transformations de q-Borel-Laplace au moyen de la fonction thêta de Jacobi*, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 331, Série I, p. 31-34, 2000.

Keywords and Subject Classification. Jacobi's theta function, Borel-Laplace transform, q-difference equation, Asymptotic expansion. 33E05, 40G10, 39A13, 30E15.

(0.2) Comme l'a remarqué J. Sauloy dans sa thèse [Sa], la fonction thêta de Jacobi ($p = 1/q$)

$$\theta(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} q^{-n(n-1)/2} x^n = \prod_{n=0}^{+\infty} (1 - p^{n+1})(1 + xp^n)(1 + p^{n+1}/x)$$

non seulement joue le rôle de la fonction "q-exponentielle" dans la résolution formelle d'une équation aux q-différences, mais surtout présente un aspect "elliptique" : *uniforme*, quasi-invariante pour la q-différentielle $f(x) \mapsto f(qx)$. Ainsi, avons-nous étudié, dans l'article [Zh2], sur l'exemple de la solution formelle de l'équation aux q-différences vérifiée par la fonction q-Gamma de Jackson, comment sommer une série q-Gevrey à l'aide de la fonction θ de Jacobi. Cette étude donne lieu à un nouveau q-analogue de la fonction Gamma ; et la méthode exploitée est susceptible d'être généralisée – c'est ce que nous voudrions montrer dans le présent article.

(0.3) L'article comporte trois parties ; il est organisé de la manière suivante. Dans la première, on étudie une notion de développement asymptotique Gevrey q-analogue, beaucoup plus faible que celle proposée dans [Zh1]. On définit ensuite une transformation analytique de Borel q-analogue au moyen de la fonction θ, cette dernière jouant le même rôle que la fonction exponentielle dans le cas classique. En se restreignant à la classe des séries Gq-sommables au sens de [Zh1], on introduit une transformation de Laplace q-analogue avec la fonction θ et on obtient alors une nouvelle méthode de resommation. Le résultat un peu 'surprenant' de cette partie est le suivant (*cf* le corollaire (3.5)).

Soit φ un germe de fonction analytique en l'origine de $\mathbb{C}$. On suppose qu'il peut être prolongé en une fonction analytique et ayant une croissance du type $q^{\frac{1}{2}\log_q^2 x(\log_q x - 1)}$ à l'infini dans un secteur illimité V.

Alors φ représente une fonction entière si, et seulement si, pour tout $x \in V$ tel que $|x| < 1$, on a $\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n q^{-n(n+1)/2}\varphi(q^n x) = 0$ [(1)].

Par conséquent, $\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n q^{-n(n+1)/2}\varphi(q^n x)$ est égal au polynôme nul si $\varphi \in \mathbb{C}[x]$.

Dans la deuxième partie, on étudie la sommabilité du produit de deux séries Gq-sommables d'ordre un et la multisommabilité avec θ. La troisième partie contient une application de notre méthode de resommation aux équations aux q-différences. Nous calculons les multiplicateurs de Stokes avec θ. Ce programme reste à détailler plus loin.

(0.4) Dans la suite, sauf mention expresse du contraire, on entend par *secteur ouvert* tout secteur limité sur la surface de Riemann du logarithme notée $\tilde{\mathbb{C}}^*$ de la forme

$$V = \{x \in \tilde{\mathbb{C}}^* : 0 < |x| < R, \alpha < \arg x < \beta\}, \quad R > 0,\ -\infty < \alpha < \beta < +\infty;$$

on désigne par $\|V\|$ (ici, $= \beta - \alpha$) l'ouverture du secteur V et par $R(V)$ ($= R$) son rayon $\sup\{|x| : x \in V\}$.

---

(1) A. Duval m'a indiqué que, si $\varphi = \sum_{k\geq 0} a_k x^k$, l'expression $\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n q^{-n(n+1)/2}\varphi(q^n x)$ se développe terme à terme en $\sum_{k\geq 0} a_k x^k \theta(-q^{k-1})$, qui est identiquement nulle car θ s'annule en tout élément de $-q^{\mathbb{Z}}$.

Première partie
Transformations de q-Borel-Laplace au moyen de la fonction θ

Dans cette partie, nous commencerons par une notion de développement asymptotique adoptée aux séries entières q-Gevrey. Nous donnerons ensuite quelques énoncés du type Malgrange-Sibuya-Ramis pour les classes de fonctions asymptotiques. Nous étudierons enfin des transformations analytiques du genre Borel-Laplace entre certaines classes de fonctions "q-Gevrey".

1. Développement asymptotique Gevrey d'ordre $(q;1)$

La notion de développement asymptotique q-Gevrey que l'on va étudier dans la suite est beaucoup plus faible que celle rappelée au début de l'article.

(1.1) Définition – Soient f une fonction analytique sur un secteur ouvert V et $\hat{f} = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière. On dit que f admet $\hat{f}$ pour *développement asymptotique Gevrey d'ordre* $(q;1)$ *sur* V si, pour tout sous-secteur U relativement compact de V (*i.e.* $\alpha_V < \alpha_U < \beta_U < \beta_V$ et $R(U) < R(V)$), il existe des constantes A, $C > 0$ telles que, $\forall x \in U$ et $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$|f(x) - \sum_{m=0}^{n-1} a_m x^m| < CA^n q^{n(n-1)/2} |x|^n.$$

Lorsque c'est le cas, on note $f \in \mathbb{A}_{q;1}(V)$ et $f \sim_{q;1}^{V} \hat{f}$.

On remarquera aussitôt que si $f \in \mathbb{A}_{q;1}(V)$, alors son développement est unique et il appartient à la classe des séries q-Gevrey d'ordre un notée $\mathbb{C}[[x]]_{q;1}$.

(1.2) On note $T : \mathbb{A}_{q;1}(V) \to \mathbb{C}[[x]]_{q;1}$ l'application "Série de Taylor" définie par la relation : $f \sim_{q;1}^{V} T(f)$.

Notons que T est surjective. En effet, d'après la proposition 2.2.1 de [Zh1], à tout $\hat{f} \in \mathbb{C}[[x]]_{q;1}$ correpond une fonction analytique sur un disque en colimaçon de $\tilde{\mathbb{C}}^*$ qui admet $\hat{f}$ pour développement asymptotique q-Gevrey d'ordre un dans une direction donnée d'avance ; cette fonction est asymptotique, au sens de la définition (1.1), à $\hat{f}$ sur tout secteur d'ouverture finie. Cette correspondance est faite au moyen d'une transformation de q-Borel formelle dont la définition est rappelée ci-dessous.

(1.3) Soit $\hat{f}(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$; par définition, on appelle *transformée de q-Borel d'ordre un de* $\hat{f}$ la série entière $\hat{\mathcal{B}}_{q;1}\hat{f}$ définie par :

$$\hat{\mathcal{B}}_{q;1}\hat{f}(\xi) = \sum_{n\geq 0} a_n q^{-n(n-1)/2} \xi^n.$$

Lorsque $\hat{f}$ est q-Gevrey d'ordre un, la transformée $\hat{\mathcal{B}}_{q;1}\hat{f}$ est convergente au voisinage de l'origine de $\mathbb{C}$ et on peut lui appliquer ensuite une transformation de q-Laplace tronquée. Nous renvoyons à la page 243 de l'article [Zh1] pour plus de précision.

Désignons par $\mathbb{E}_{q;-1}(V)$ l'ensemble des fonctions analytiques f sur V vérifiant la propriété suivante. Pour tout sous-secteur U relativement compact de V, il existe des constantes $C > 0$, $\mu \in \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in U, \quad |f(x)| \leq C|x|^{\mu} |q^{-\frac{1}{2}\log_q x(\log_q x - 1)}|.$$

Tout élément de $\mathbb{E}_{q;-1}(V)$ sera appelé *fonction q-plate d'ordre un sur V* ou encore *fonction à décroissance q-exponentielle d'ordre un sur V.*

(1.4) Lemme ([Zh1], p. 238) – *Avec les notations précédentes, on a* $\ker T = \mathbb{E}_{q;-1}(V)$.

Par conséquent, l'application T induit un isomorphisme entre les $\mathbb{C}$-espaces vectoriels $\mathbb{A}_{q;1}(V)/\mathbb{E}_{q;-1}(V)$ *et* $\mathbb{C}[[x]]_{q;1}$. □

(1.5) Contrairement à ce qui s'est passé avec la notion de développement asymptotique q-Gevrey de [Zh1], l'ensemble $\mathbb{A}_{q;1}(V)$ est stable pour le produit. En effet, par un calcul directe, on peut vérifier que pour tout $(f,g) \in \mathbb{A}_{q;1}(V)$, on a $fg \in \mathbb{A}_{q;1}(V)$ et $T(fg) = T(f)T(g)$.

Si V est un secteur ouvert d'ouverture $> 2\pi$, notons $V_- = \{x \in V : xe^{2\pi i} \in V\}$. Pour tout élément $f \in \mathbb{A}_{q;1}(V)$, on pose $\mathrm{var} f(x) = f(xe^{2\pi i}) - f(x)$ si $x \in V_-$. On a $\mathrm{var} f \in \mathbb{E}_{q;-1}(V_-)$, d'après le lemme 1.4 ; d'où l'on obtient une application linéaire $\mathrm{var} : \mathbb{A}_{q;1}(V) \to \mathbb{E}_{q;-1}(V_-)$. Puisque $\mathrm{var} f = 0$ pour tout $f \in \mathbb{C}\{x\}$ ayant un rayon de convergence supérieur ou égal au rayon $R(V)$, on définit de manière naturelle une application de $\mathbb{A}_{q;1}(V)/(\mathbb{C}\{x\} \cap \mathbb{A}_{q;1}(V))$ dans $\mathbb{E}_{q;-1}(V_-)$ notée encore var. Cette dernière est clairement injective. Le lemme suivant exprimera que, à peu de chose près, elle est en fait bijective.

(1.6) Lemme – *Soient U, V deux secteurs ouverts, distincts, tous deux d'ouverture* $> 2\pi$ *et vérifiant $U \Subset V$. Alors pour tout élément h de $\mathbb{E}_{q;-1}(V_-)$ il existe un $f \in \mathbb{A}_{q;1}(U)$ tel que* $\mathrm{var} f = h$ *sur U_-.*

Preuve – On va appliquer la formule de Cauchy-Heine (*cf* [Ma]) ; sans perte de la généralité, on suppose que U et V ont une même ouverture qui est $> 2\pi$. On se fixe un point $b_0 = |b_0|e^{i\beta_0}$ dans V_- qui **n'appartient pas à** U_-, on note Γ_{b_0} le segment allant du point b_0 vers 'l'origine' de $\tilde{\mathbb{C}}^*$; on pose, pour tout $x \in U_{b_0} := \{x \in U : \beta_0 < \arg x < \beta_0 + 2\pi\}$:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{b_0}} \frac{h(u)}{u-x} du.$$

Il est clair que f est analytique dans son domaine de définition. Pour voir que $f \in \mathbb{A}_{q;1}(U_{b_0})$, on écrit

$$\int_{\Gamma_{b_0}} \frac{h(u)}{u-x} du = \sum_{n=0}^{m} x^n \int_{\Gamma_{b_0}} h(u) u^{-(n+1)} du + x^{m+1} \int_{\Gamma_{b_0}} \frac{h(u)}{u-x} \frac{du}{u^n},$$

et on pose $\hat{f} = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ avec :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{b_0}} h(u) u^{-(n+1)} du.$$

Soit W un sous-secteur relativement compact de U_{b_0} ; on pose $d = \inf_{x \in W, u \in \Gamma_{b_0}} |1 - \frac{x}{u}|$ et, par compacité relative de W dans $U \setminus \Gamma_{b_0}$, on a $d > 0$. Du fait que $h \in \mathbb{E}_{q;-1}(V_-)$ et que pour tout $\mu \in \mathbb{R}$, il existe C, $A > 0$ vérifiant : $\forall m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \int_0^{|b_0|} q^{-\log_q u (\log_q u - 1)/2} u^{\mu - m - 1} du &< \int_0^{+\infty} q^{-\log_q u (\log_q u - 1)/2} u^{\mu - m - 1} du \\ &= CA^m q^{(m+1)m/2}, \end{aligned}$$

on conclut aisément à l'asymptoticité $f \sim_{q;1}^{U_{b_0}} \hat{f}$.

La fonction f peut être prolongée sur U de la manière suivante. A tout point $b = |b_0|e^{i\beta}$ ($\beta \in \mathbb{R}$) de V_- on associe le chemin Γ_b obtenu en juxtaposant l'arc orienté du cercle de rayon $|b_0|$, allant de b_0 vers b, et le segment joignant le point b à l'origine ; on substitue ensuite le chemin Γ_{b_0} par Γ_b dans l'intégrale définissant f. La fonction ainsi obtenue sera encore notée f. Par Cauchy, on vérifie aisément que var$f = h$ sur U_-. Avec le même argument que celui utilisé précédemment pour U_{b_0}, on obtient que $f \sim_{q;1}^{U_b} \hat{f}$ et par suite $f \sim_{q;1}^{U} \hat{f}$. □

Etant donné un nombre réel α, notons $\mathcal{V}^\alpha$ la famille des secteurs ouverts bissectés par la direction d'argument α et ayant chacun une ouverture $> 2\pi$, et posons

$$\mathbb{A}_{q;1}^\alpha = \cup_{V\in\mathcal{V}^\alpha}\mathbb{A}_{q;1}(V), \quad \mathbb{E}_{q;-1}^\alpha = \cup_{V\in\mathcal{V}^\alpha}\mathbb{E}_{q;-1}(V_-).$$

Le lemme (1.6) implique directement le résultat suivant.

(1.7) Proposition – *L'application* var *induit un isomorphisme entre les espaces vectoriels* $\mathbb{A}_{q;1}^\alpha/\mathbb{C}\{x\}$ *et* $\mathbb{E}_{q;-1}^\alpha$. □

Considérons un résultat du type Malgrange-Sibuya-Ramis. Soit $\{V_j\}_{1\le j\le J}$ une famille finie de secteurs ouverts ; on pose $V_{J+1} = \{xe^{2\pi i} : x \in V_1\}$. On suppose que, d'une part, $\cup_{1\le j\le J}V_j$ est un secteur d'ouverture $> 2\pi$, et d'autre part, pour toute paire d'indices (j,k) vérifiant $1 \le j < k-1 \le J$, $V_j \cap V_k = \emptyset$. Supposons en outre qu'il y a sur chaque V_j une fonction analytique et *bornée* f_j. On pose, pour tout indice j entre 1 et J : $f_{j,j+1}(x) = f_{j+1}(x) - f_j(x)$ si $x \in V_{j+1} \cap V_j$.

(1.8) Corollaire – *Avec les notations ci-dessus, les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) Il existe un $\hat{f} \in \mathbb{C}[[x]]$ *tel que* $f_j \sim_{q;1}^{V_j} \hat{f}$ *pour* $j = 1, ..., J$.

(ii) On a $f_{j,j+1} \in \mathbb{E}_{q;-1}(V_{j+1} \cap V_j)$ *pour* $j = 1, ..., J$.

Preuve – L'implication de (i) vers (ii) résulte du lemme (1.4) ; l'autre implication résulte de la linéarité du problème et du lemme (1.6) (*cf* [Ma], p. ?). □

(1.9) Pour terminer la partie, on mentionne quelques observations.

(i) Bien que $\mathbb{A}_{q;1}^\alpha$ soit stable pour le produit, l'espace quotient $\mathbb{A}_{q;1}^\alpha/\mathbb{C}\{x\}$ ne l'est plus.

(ii) Pour tout nombre réel $s > 0$ posons $\mathbb{A}_{q;s}^\alpha = \mathbb{A}_{q^s;1}^\alpha$, $\mathbb{E}_{q;-1/s}^\alpha = \mathbb{E}_{q^s;-1}^\alpha$. Si $s' > s > 0$, on a :

$$\mathbb{A}_{q;s}^\alpha \subset \mathbb{A}_{q;s'}^\alpha, \quad \mathbb{E}_{q;-1/s}^\alpha \subset \mathbb{E}_{q;-1/s'}^\alpha.$$

($\mathbb{E}_{q;-k}^\alpha$ est l'ensemble des fonctions q-plates d'ordre k) La proposition précédente affirme alors que var : $\mathbb{A}_{q;s}^\alpha/\mathbb{C}\{x\} \to \mathbb{E}_{q;-1/s}^\alpha$ est bijective.

2. Fonction θ et transformation de q-Borel analytique

La fonction θ de Jacobi définie par (0.2) vérifie l'équation fonctionnelle aux q-différences

$$y(qx) = qxy(x),$$

laquelle est satisfaite par la fonction $q^{\frac{1}{2}\log_q x(\log_q x+1)}$ également. En plus, comme $\theta(x)$ ne s'annule que si $x \in \{-q^n : n \in \mathbb{Z}\}$, on en déduit que pour tout $\varepsilon \in]0,\pi[$, il existe des constantes C_1, $C_2 > 0$ telles que si $x \in \mathbb{C}^*$, $-\pi+\varepsilon < \arg x < \pi-\varepsilon$, alors

$$C_1|q^{\frac{1}{2}\log_q x(\log_q x+1)}| < |\theta(x)| < C_2|q^{\frac{1}{2}\log_q x(\log_q x+1)}|.$$

On dira que θ est à croissance q-exponentielle d'ordre un et de type fini dans $\mathbb{C}\backslash]-\infty,0[$. La définition générale est la suivante (*cf* [Ra], [Zh1]).

(2.1) Définition et notations – Soient $U=\{x\in\tilde{\mathbb{C}}^*:\alpha<\arg x<\beta\}$ un secteur ouvert illimité de $\tilde{\mathbb{C}}^*$ et f une fonction analytique dans U ; on dit que f admet à l'infini (resp. en 'l'origine') sur U *une croissance q-exponentielle d'ordre un et de type fini* si pour tout $\varepsilon>0$ petit, il existe $R>0$, $C>0$ et $\mu\in\mathbb{R}$ tels que l'on ait

$$|f(x)|\leq C|x|^\mu|q^{\frac{1}{2}\log_q x(\log_q x-1)}|$$

pour tout $x\in U$ vérifiant $|x|>R$ (resp. $0<|x|<R$), $\alpha+\varepsilon<\arg x<\beta-\varepsilon$.

Soit $\alpha\in\mathbb{R}$; on notera $\mathbb{H}_{q;1}^\alpha$ l'ensemble des germes de fonctions analytiques en l'origine du plan complexe qui peuvent être prolongés en une fonction analytique, admettant une croissance q-exponentielle d'ordre un et de type fini dans un secteur illimité contenant la direction d'argument α. On note aussi $\mathbb{E}_{q;1}$ l'ensemble des fonctions entières ayant à l'infini une croissance q-exponentielle d'ordre un et de type fini ; on a $\mathbb{E}_{q;1}=\cap_{\alpha\in[0,2\pi]}\mathbb{H}_{q;1}^\alpha$.

(2.2) Posons $\theta_0(x)$ la fonction entière définie par $\theta_0(x)=\sum_{n\geq0}q^{-n(n-1)/2}x^n$. On a $\theta_0\in\mathbb{E}_{q;1}$, avec :

$$\forall x\in\mathbb{C}^*,\quad|\theta_0(x)|<C|q^{\frac{1}{2}\log_q x(\log_q x+1)}|,$$

où $C>0$ est une constante, $Im(\log x)\in[-\pi,\pi[$.

Soit V un secteur ouvert d'ouverture $>2\pi$, bissecté par la direction d'argument α ; à tout point $a=|a|e^{(\alpha-\pi)i}$ situé sur la bissectrice du secteur V_- on associe deux chemins $[0,a]$, γ_a définis dans V comme suit. On note $[0,a]$ celui allant de l'origine vers le point a suivant la bissectrice de V_- ; γ_a celui paramétrisé par $[0,2\pi]\to V$, $t\mapsto|a|e^{(\alpha-\pi+t)i}$.

(2.3) Si $f\in\mathbb{A}_{q;1}(V)$, on pose

$$\mathcal{B}_{q;1}f(\xi)=\frac{1}{2\pi i}\int_{[0,a]}\theta(\frac{\xi}{x})\mathrm{var}f(x)\frac{dx}{x}+\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_a}\theta(\frac{\xi}{x})f(x)\frac{dx}{x}.$$

Pour tout élément $\xi\in\tilde{\mathbb{C}}^*$, la fonction différence $x\mapsto\theta(\frac{\xi}{x})-\theta_0(\frac{\xi}{x})$ est une fonction entière ; on en déduit une **définition équivalente** de $\mathcal{B}_{q;1}f(\xi)$:

$$\mathcal{B}_{q;1}f(\xi)=\frac{1}{2\pi i}\int_{[0,a]}\theta_0(\frac{\xi}{x})\mathrm{var}f(x)\frac{dx}{x}+\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_a}\theta_0(\frac{\xi}{x})f(x)\frac{dx}{x}.$$

(2.4) Lemme – *La fonction $\mathcal{B}_{q;1}f$ ci-dessus est définie et analytique au voisinage de l'origine du plan compelxe et indépendante du choix du point a sur la bissectrice de V_-.*

En outre, si $f\sim_{q;1}^V\hat{f}$, alors les $\mathcal{B}_{q;1}f$, $\hat{\mathcal{B}}_{q;1}\hat{f}$ sont égaux dans $\mathbb{C}\{\xi\}$.

Preuve – Considérons la définition de $\mathcal{B}_{q;1}f$ en terme de θ_0 ; notons B la bissectrice de V_-, incluse dans ce dernier. Comme $\mathrm{var}f\in\mathbb{E}_{q;-1}(V_-)$, il existe $C>0$, $\mu\in\mathbb{R}$ vérifiant $|\mathrm{var}f(x)|<C|x|^\mu|q^{-\frac{1}{2}\log_q x(\log_q x-1)}|$ pour tout $x\in B$; avec la croissance q-exponentielle d'ordre un de θ_0, on en déduit que l'intégrale prise le long le segment $[0,a]$ converge si $|\xi|<q^\mu$. Puisque l'autre intégrale, relative au contour γ_a, définit une fonction entière dans le plan des ξ, on obtient que $\mathcal{B}_{q;1}f(\xi)$ est une fonction définie et analytique au voisinage de l'origine. Son indépendance par rapport au choix de $a\in B$ est une conséquence directe du théorème de Cauchy.

Supposons $f \sim^V_{q;1} \hat f$ et notons, pour tout entier $n>0$, f_n la somme partielle d'ordre n de $\hat f$. Substituons f par f_n dans la définition de $\mathcal{B}_{q;1}f$; la première intégrale est nulle et la seconde donne $\hat{\mathcal{B}}_{q;1}f_n$ par Cauchy (voir (1.3) pour la définition de $\hat{\mathcal{B}}_{q;1}$) ; autrement dit, on a $\mathcal{B}_{q;1}f_n(\xi)=\hat{\mathcal{B}}_{q;1}f_n(\xi)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Pour terminer la preuve, il suffit de prouver que, étant donné un complexe ξ de module $|\xi|$ assez petit où $\mathcal{B}_{q;1}f(\xi)$ est définie, la suite $(\mathcal{B}_{q;1}f(\xi)-\mathcal{B}_{q;1}f_n(\xi))$ tend vers zéro avec $1/n$, $n\in\mathbb{N}^*$.

Posons $R_n(\xi)=2\pi i(\mathcal{B}_{q;1}f(\xi)-\mathcal{B}_{q;1}f_n(\xi))$; on a

$$\begin{aligned}|R_n(\xi)| &\le \int_0^{|a|}\theta_0(\frac{|\xi|}{x})|\mathrm{var}f(xe^{(\alpha-\pi)i})|\frac{dx}{x}+2\pi\theta_0(\frac{|\xi|}{|a|})\max_{x\in\gamma_a}|f(x)-f_n(x)|\\ &\le Cq^{\frac12\log_q|\xi|(\log_q|\xi|+1)}\Big(\int_0^{|a|}x^{\mu-1-\log_q|\xi|}dx+M_n(|a|)\Big),\end{aligned}$$

où C désigne une constante indépendante de n, ξ et de a, et où

$$M_n(|a|)=C'A^n|a|^{n-\log_q|\xi|}q^{n(n-1)/2+\log_q|a|(\log_q|a|-1)/2},$$

avec C', $A>0$ deux autres constantes. Choisissons à présent a qui minimise M_n. En dérivant la fonction $t\mapsto M_n(t)$ sur $]0,+\infty[$, on trouve que $M_n'(t)=0$ pour $t=q^{-n+1/2}|\xi|$, et en ce point on a :

$$M_n(t)=C'q^{-\frac12(\log_q|\xi|+\frac12)^2}(A|\xi|)^n.$$

Supposons $|\xi|<\min(\frac1A,q^\mu)$. Pour tout n suffisamment grand, en choisissant $a\in B$ avec $|a|=q^{-n+1/2}|\xi|$ dans la définition de $\mathcal{B}_{q;1}f$, on déduit des calculs de R_n, M_n, l'estimation suivante :

$$|R_n(\xi)|<\frac{Cq^{\mu/2}|\xi|^\mu}{\mu-\log_q|\xi|}q^{-\frac12\log_q^2|\xi|}(q^{-\mu}|\xi|)^n+CC'q^{-1/8}(A|\xi|)^n;$$

d'où $R_n(\xi)\to0$ si $n\to+\infty$. □

Il est à noter la propriété suivante.

(2.5) *Si f est la Gq-somme d'une série Gq-sommable d'ordre un dans la direction d'argument α, alors le lemme précédent implique que la transformée $\mathcal{B}_{q;1}f$ de (2.3)* **coï ncide** *avec celle calculée au moyen de la fonction q-exponentielle $q^{\frac12\log_qx(\log_qx-1)}$.*

(2.6) Définition – La transformation $\mathcal{B}_{q;1}:\mathbb{A}^\alpha_{q;1}\to\mathbb{C}\{\xi\}$ définie dans (2.3) est appelée *la transformation de q-Borel analytique d'ordre un.*

Du fait que $\mathcal{B}_{q;1}f\in\mathbb{E}_{q;1}$ si et seulement si $f\in\mathbb{C}\{x\}$, on peut déduire des lemmes (1.4), (2.4) le résultat suivant.

(2.7) Proposition – *La transformation de q-Borel d'ordre un, $\mathcal{B}_{q;1}$, induit un homomorphisme surjectif d'espace vectoriel de $\mathbb{A}^\alpha_{q;1}/\mathbb{C}\{x\}$ sur $\mathbb{C}\{\xi\}/\mathbb{E}_{q;1}$.* □

L'intégrale de $\xi\mapsto f(\xi)\theta_0(\frac{x}{\xi})$ le long le chemin γ_a définit un élément de $\mathbb{E}_{q;1}$. L'application étudiée dans la proposition précédente peut être reformulée par l'autre intégrale, donc au moyen d'une intégrale près de l'origine sur $\mathrm{var}f$; ceci présente un formalisme fort similaire à la transformation de Laplace étudiée dans [CNP] (Pré I, Transformation de Laplace), malgré une incohérence apparente de l'usage de la terminologie. Remarquons aussi que $\mathcal{B}_{q;1}$ n'est pas injective dans $\mathbb{A}^\alpha_{q;1}$; on a en effet :

$$\mathcal{B}_{q;1}f = \mathcal{B}_{q;1}g \Longleftrightarrow f - g \in \mathbb{E}^\alpha_{q;-1}.$$

3. Fonction θ et séries q-Gevrey sommables

Soient α un nombre réel et $\mathbb{C}\{x\}^\alpha_{q;1}$ l'ensemble des *séries Gq-sommables d'ordre un* dans la direction d'argument α ; par définition, $\mathbb{C}\{x\}^\alpha_{q;1}$ est constitué des séries q-Gevrey d'ordre un dont la transformée de q-Borel formelle d'ordre un appartient à la classe $\mathbb{H}^\alpha_{q;1}$.

(3.1) Soient $\varphi \in \mathbb{H}^\alpha_{q;1}$ et $\pi_q = \ln q \prod_{n\geq 0}(1 - q^{-n-1})^{-1}$; **on pose :**

$$\mathbf{L}^\alpha_{q;1}\varphi(x) = \frac{1}{\pi_q}\int_0^{\infty e^{i\alpha}} \frac{\varphi(\xi)}{\theta(\frac{\xi}{x})}\frac{d\xi}{\xi},$$

l'intégrale étant prise le long la demi-droite issue de l'origine de $\mathbb{C}$ et ayant α pour argument.

(3.2) Lemme – *On a les assertions suivantes.*

(i) Si φ est un polynôme de la forme $a_0 + a_1\xi + ... + a_m\xi^m$, alors la fonction $\mathbf{L}^\alpha_{q;1}\varphi$ définie par (3.1) est égale à la fonction polynomiale $\sum_{k=0}^m a_k q^{k(k-1)/2}x^k$.

(ii) De manière plus générale, si $\varphi \in \mathbb{H}^\alpha_{q;1}$ et si $\varphi = \hat{\mathcal{B}}_{q;1}\hat{f}$ ($\hat{f} \in \mathbb{C}\{x\}^\alpha_{q;1}$), alors $\mathbf{L}^\alpha_{q;1}\varphi$ définit un élément de $\mathbb{A}^\alpha_{q;1}$ qui admet $\hat{f}$ pour développement asymptotique.

(iii) On a $\mathbf{L}^\alpha_{q;1}\mathcal{B}_{q;1}f = f$ et $\mathcal{B}_{q;1}\mathbf{L}^\alpha_{q;1}\varphi = \varphi$ pour tout $f \in \mathbf{L}^\alpha_{q;1}(\mathbb{H}^\alpha_{q;1})$ et tout $\varphi \in \mathbb{H}^\alpha_{q;1}$ respectivement.

Preuve – La première assertion a été prouvée dans le lemme (6.4) de [Zh2]. La seconde peut être démontrée de la même manière que ce que l'on a fait pour la proposition 2.2.1 de [Zh1]. Nous laissons au lecteur le soin de compléter la preuve. □

(3.3) Définition – L'application $\mathbf{L}^\alpha_{q;1} : \mathbb{H}^\alpha_{q;1} \to \mathbb{A}^\alpha_{q;1}$ est appelée *transformation de q-Laplace analytique d'ordre un relative à θ dans la direction d'argument α.*

Pour tout $\hat{f} \in \mathbb{C}\{x\}^\alpha_{q;1}$, la fonction $\mathbf{L}^\alpha_{q;1}\hat{\mathcal{B}}_{q;1}\hat{f}$ sera notée $\mathbf{S}^\alpha_{q;1}\hat{f}$ et sera appelée *la θ-somme de $\hat{f}$ dans la direction d'argument α.*

Notons d'abord que l'application $\mathbf{L}^\alpha_{q;1}$ envoie $\mathbb{E}_{q;1}$ sur $\mathbb{C}\{x\}$, quel que soit $\alpha \in \mathbb{R}$; nous verrons qu'elle n'est pas surjective de $\mathbb{H}^\alpha_{q;1}$ vers $\mathbb{A}^\alpha_{q;1}$.

(3.4) Théorème – *Soient $\varphi \in \mathbb{H}^\alpha_{q;1}$ et $f = \mathbf{L}_{q;1}\varphi$. On a :*

$$\mathrm{var}f(x) = \frac{2\pi i}{\pi_q}\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n q^{-n(n+1)/2}\varphi(-q^n x)$$

pour tout x élément d'un germe de secteur ouvert V_- bissecté par la direction d'argument $(\alpha - \pi)$.

*De plus, f est l'***unique** *élément de $\mathbb{A}^\alpha_{q;1}$ ayant $\hat{f}$ pour développement asymptotique et dont la variation soit donnée par la formule ci-dessus.*

Preuve – La formule exprimant var$f$ est une simple conséquence de la formule de Cauchy appliquée à l'intégrale de contour exprimant la fonction différence $\mathbf{L}_{q;1}^{\alpha+\varepsilon}\varphi - \mathbf{L}_{q;1}^{\alpha-\varepsilon}\varphi$ sur V_- où $\varepsilon > 0$ est très petit. L'unicité résulte de l'observation suivante : Deux éléments f, g de $\mathbb{A}_{q;1}^{\alpha}$ diffèrent d'un germe de fonction analytique à l'origine du plan complexe si et seulement si leurs variations coïncident. $\square$

Posons alors $U^\alpha : \mathbb{H}_{q;1}^{\alpha} \to \mathbb{E}_{q;-1}^{\alpha}$ le composé de $\mathbf{L}_{q;1}^{\alpha}$ avec var :

$$U^\alpha(\varphi)(x) = \frac{2\pi i}{\pi_q}\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n q^{-n(n+1)/2}\varphi(-q^n x).$$

On a $U^\alpha(\varphi)(x) = \mathbf{S}_{q;1}^{\alpha}\hat{f}(xe^{2\pi i}) - \mathbf{S}_{q;1}^{\alpha}\hat{f}(x)$ si $\varphi = \hat{\mathcal{B}}_{q;1}\hat{f}$ avec $\hat{f} \in \mathbb{C}\{x\}_{q;1}^{\alpha}$.

(3.5) Corollaire – *On a $U^\alpha(\varphi) = 0$ si et seulement si $\varphi \in \mathbb{E}_{q;1}$.*

En particulier, si φ est un polynôme, alors on a :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n q^{-n(n+1)/2}\varphi(-q^n x) \equiv 0.$$

Preuve – Il suffit de remarquer que $\varphi = \hat{\mathcal{B}}_{q;1}\hat{f}$ est un élément de $\mathbb{E}_{q;1}$ si et seulement si $\hat{f}$ représente un germe de fonction analytique à l'origine de $\mathbb{C}$, donc uniforme. $\square$

On pourrait envisager de donner un énoncé plus général portant sur les fonctions à croissance q-exponentielle d'ordre un et de type fini en l'origine et à l'infini dans un secteur illimité ; la situation typique est alors celle des polynômes en x et $\frac{1}{x}$.

(3.6) Le théorème 3.4 peut être interprété de la manière suivante. Soit $u \in \mathbb{E}_{q;-1}^{\alpha}$ et soit $\Psi \in \mathbb{C}\{x\}$ la fonction correspondant à la transformée de q-Borel évaluée le long du segment $[0,a]$:

$$\Psi(\xi) = \frac{1}{2\pi i}\int_{[0,a]} u(x)\theta_0(\frac{\xi}{x})\frac{dx}{x}.$$

Si $\Psi \in \mathbb{H}_{q;1}^{\alpha}$, on a nécessairement $u = U^\alpha\Psi$ [(2)].

(3.7) Corollaire – *Si $\hat{f} \in \mathbb{C}\{x\}_{q;1}^{\alpha}$ et $g \in \mathbb{C}\{x\}$, alors $\mathbf{S}_{q;1}^{\alpha}(g\hat{f}) = g\mathbf{S}_{q;1}^{\alpha}(\hat{f})$.*

Preuve – Dans [Zh1], on a déjà démontré que $g\hat{f} \in \mathbb{C}\{x\}_{q;1}^{\alpha}$. Posons $f(x) = \mathbf{S}_{q;1}^{\alpha}\hat{f}(x)$ pour tout x élément d'un germe V de secteur ouvert d'ouverture $> 2\pi$, bissecté par α ; on a d'une part $gf \sim_{q;1}^{V} g\hat{f}$, et, d'autre part, $\mathrm{var}(gf) = g\ \mathrm{var}f$ sur V_-. Compte tenu du théorème 3.4, il suffit de prouver que si $\varphi = \mathcal{B}_{q;1}(gf)$, on a $g\ \mathrm{var}f = U^\alpha\varphi$; ceci se fait avec la remarque donnée dans (3.6) et la relation suivante, déduite du corollaire (3.5) :

$$U^\alpha\varphi = U^\alpha\Psi \quad \text{où } \Psi = \frac{1}{2\pi i}\int_{[0,a]} g(\mathrm{var}f)\theta_0(\frac{\xi}{x})\frac{dx}{x} \quad \square$$

Le résultat que nous venons d'obtenir affirme que l'ensemble $\mathbb{C}\{x\}_{q;1}^{\alpha}$ constitue un $\mathbb{C}\{x\}$-module compatible avec l'opérateur de sommation $\mathbf{S}_{q;1}^{\alpha}$. Comme le montreront les exemples

(2) De façon similaire à la formule de Cauchy classique, cette formule pourrait être obtenue au moyen des *hyperfonctions*. En effet, d'après (3.5), on a $U^\alpha\theta_0(\frac{\xi}{x}) = 0$, et ceci seulement quand $|\xi| < |x|$; que se passe-t-il quand $x = \xi$?

qui suivent, cette propriété sera très importante pour étudier la θ-somme d'une série entière vérifiant une équation aux q-différences.

(3.8) Exemples. La série entière $\hat{f}_0 := \sum_{n\geq 0}(-1)^n q^{n(n-1)/2}x^n$ est solution formelle de l'équation (E) : $xy(qx)+y(x)=1$; sa transformée de q-Borel formelle d'ordre un notée φ vaut $\frac{1}{1+\xi}$, donc $\hat{f}_0 \in \mathbb{C}\{x\}^\alpha_{q;1}$ pour tout réel α tel que $\alpha \neq \pi \mod 2\pi$; de plus, la θ-somme $\mathbf{S}^\alpha_{q;1}\hat{f}_0$ est solution analytique de (E), d'après (3.7). Si $x \in \mathbb{C}$ vérifie $q^n x \neq 1$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a, par Cauchy :

$$U^\alpha(\varphi)(x) = -\frac{2\pi i}{\pi_q}\frac{1}{\theta(-\frac{1}{x})} = -\frac{2\pi i}{\pi_q}\frac{1}{\theta(-\frac{x}{q})}.$$

En tant que différence de deux solutions de (E), $U^\alpha(\varphi)(x)$ est alors solution de l'équation homogène associée (E_0) : $xy(qx)+y(x)=0$.

La série de Laurent $\hat{F}(x) := \sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n q^{n(n-1)/2}x^n$ est une solution formelle de l'équation (E_0). Décomposons $\hat{F}(x)$ en somme de deux séries entières de la manière suivante :

$$\hat{F}(x) = \hat{f}_0 + \hat{F}_-(\frac{1}{x}), \qquad F_-(t) \in t\mathbb{C}[[t]];$$

on a $\hat{F}_-(x) = -\frac{1}{qx}\hat{f}_0(\frac{1}{q^2x})$; d'où $\hat{F}_-$ et par suite $\hat{F}$ elle-même est sommable dans toute direction non congruente à $\mathbb{R}^-$. Désignons par F la somme $\mathbf{S}^\alpha_{q;1}\hat{f}_0 + \mathbf{S}^\alpha_{q;1}\hat{F}_-$; par Cauchy, on obtient :

$$F(x) = \frac{2\pi i}{\pi_q}\frac{1}{\theta(-\frac{x}{q})}.$$

(Une interprétation heuristique de ce dernier résultat peut se faire de la manière suivante : On associe à $\hat{F}$ sa transformée de q-Borel, $\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n\xi^n$, qui est nulle sauf en $\xi=-1$ et qui est alors la fonction de Dirac en ce point...)

Considérons enfin le cas où φ possède un pôle multiple, et posons par exemple $\varphi = \frac{1}{(\xi+1)^2}$. Avec la formule des résidus, on obtient :

$$U^\alpha(\varphi)(x) = -\frac{2\pi i}{\pi_q}\frac{\theta'(-\frac{1}{x})}{x\theta^2(-\frac{1}{x})} = \frac{2\pi i}{q\pi_q}\frac{x\theta'(-\frac{x}{q})}{\theta^2(-\frac{x}{q})}.$$

Soit $\hat{f} = \hat{\mathcal{L}}_{q;1}\varphi$; on peut vérifier que $\hat{f}$ satisfait à l'équation $(x\sigma_q+1)^2y=1$, où σ_q est l'opérateur aux q-différences $f(x)\mapsto f(qx)$. La fonction $U^\alpha(\varphi)$ est solution de l'équation homogène $(x\sigma_q+1)^2y=0$, qui se transforme, avec $y = z/\theta(-\frac{x}{q})$, en celle-ci : $(\sigma_q-1)^2z=0$; par là on comprend mieux la présence dans $U^\alpha(\varphi)$ de la fonction logarithme q-analogue $\frac{x\theta'(-\frac{x}{q})}{\theta(-\frac{x}{q})}$ définie dans la Thèse [Sa] de J. Sauloy.

===== Fin de la première partie =====

Références.

[CNP] B. Candelpergher, J.C. Nosmas et F. Pham, Approche de la résurgence, 1993, Hermann.

[Ma] B. Malgrange, Sommation des séries divergentes, *Expositiones Mathematicae*, 13 (1995), no 2-3, 163-222.

[Ra] J.P. Ramis, About the growth of entire functions solutions of linear algebraic q-difference equations, *Annales de la Fac. de Toulouse*, Série 6, Vol. I, **1** (1992), 53-94.

[Sa] J. Sauloy, Théorie de Galois des équations aux q-différences fuchsiennes, *Thèse de Toulouse*, 1999.

[Zh1] C. Zhang, Développements asymptotiques q-Gevrey et séries Gq-sommables, *Ann. Inst. Fourier*, **49-1** (1999), 227-261.

[Zh2] C. Zhang, Sur la fonction q-Gamma de Jackson, *Prépublication de La Rochelle*, 99-4 (1999).

Département et Laboratoire de Mathématiques
Pôle Sciences et Technologie, Université de La Rochelle
Avenue M. Crépeau, F-17000 La Rochelle

e-mail : czhang@univ-lr.fr

(Le 6 mars 2000, La Rochelle)

Sur la fonction q-Gamma de Jackson *

Résumé. Soit $q \in]0,1[$; on pose $[x] = (1-q^x)/(1-q)$ et $(x;q)_\infty = \prod_{n\geq 0}(1-xq^n)$ pour $x \in \mathbb{C}$. Soit $\mathbb{A} = \{x \in \mathbb{C} : \Re x > 0\}$. On considère l'équation fonctionnelle

$$(E) \qquad y(x+1) = [x]y(x), \quad y(1) = 1,$$

dont une solution est la fonction q-Gamma de Jackson, Γ_q, définie sur $\mathbb{A}$ par $\Gamma_q(x) = (q;q)_\infty(1-q)^{1-x}/(q^x;q)_\infty$. En nous inspirant d'un article de R. Remmert sur la fonction Γ, nous montrons, entre autres, comment obtenir une représentation intégrale de $1/\Gamma_q$ grâce au fait que Γ_q est la seule solution analytique de (E) sur le demi-plan $\mathbb{A}$, bornée sur la bande verticale $\{x \in \mathbb{C} : 1 \leq \Re x \leq 2\}$. Nous nous intéressons ensuite à une autre solution g_q de (E) définie par :

$$g_q(x) = \int_0^{+\infty} \frac{(-t;q)_\infty(-qt^{-1};q)_\infty}{(-q^x t;q)_\infty(-q^{1-x}t^{-1};q)_\infty((q-1)t;q)_\infty} \frac{dt}{t},$$

solution correspondant à une solution formelle *divergente* de (E). En établissant une formule reliant g_q et Γ_q, nous démontrons que, quand q tend vers 1, la fonction g_q converge vers Γ.

Summary (About Jackson's q-Gamma function). Let $q \in]0,1[$; let us denote $[x] = (1-q^x)/(1-q)$ and $(x;q)_\infty = \prod_{n\geq 0}(1-xq^n)$ for $x \in \mathbb{C}$. Let $\mathbb{A} = \{x \in \mathbb{C} : \Re x > 0\}$. The Jackson's Gamma function, defined on $\mathbb{A}$ by $\Gamma_q(x) = (q;q)_\infty(1-q)^{1-x}/(q^x;q)_\infty$, satisfies the functional equation

$$(E) \qquad y(x+1) = [x]y(x), \quad y(1) = 1.$$

Following a paper of R. Remmert for the Γ-function, we show how to obtain an integral representation of $1/\Gamma_q$ using the fact that Γ_q is the unique analytical solution of (E) on the half-plane $\mathbb{A}$, bounded on the vertical strip $\{x \in \mathbb{C} : 1 \leq \Re x \leq 2\}$. We introduce then the solution g_q :

$$g_q(x) = \int_0^{+\infty} \frac{(-t;q)_\infty(-qt^{-1};q)_\infty}{(-q^x t;q)_\infty(-q^{1-x}t^{-1};q)_\infty((q-1)t;q)_\infty} \frac{dt}{t},$$

which corresponds to a *divergent* formal solution for (E). By establishing a relation between g_q and Γ_q, we show that our function g_q converges to Γ when q tends to 1.

0. Introduction.

* *Aequationes Mathematicae*, à paraître.

Keywords and Subject Classification. q-Gamma function, Wielandt's Theorem, Jacobi's series, Asymptotic expansion. 39A13, 39B32.

Dans cet article, q désigne un réel appartenant à l'intervalle ouvert $]0,1[$. Soient $\alpha \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$; on utilisera les notations suivantes :

$$\begin{aligned}
&(\alpha;q)_0 = 1, \quad (\alpha;q)_n = (1-\alpha)\ldots(1-\alpha q^{n-1}) \text{ si } n \geq 1;\\
&[\alpha]_q = \frac{1-q^\alpha}{1-q};\\
&[0]_q! = 1, \quad [n]_q! = [1]_q \ldots [n]_q = \frac{(q;q)_n}{(1-q)^n} \text{ si } n \geq 1.
\end{aligned}$$

Par extension, on notera $(\alpha;q)_\infty = \prod_{n\geq 0}(1-\alpha q^n)$. Si $z \in \mathbb{C}\backslash]-\infty,0]$ et $x \in \mathbb{C}$, on désignera par $\log z$ la détermination principale du logarithme et on notera $z^x = e^{x \log z}$.

Soit $\mathbb{A} = \{x \in \mathbb{C} : \Re x > 0\}$ le demi-plan à droite de $\mathbb{C}$. Au début du siècle, F. H. Jackson a introduit le q-analogue suivant de la fonction Gamma :

$$\Gamma_q(x) = \frac{(q;q)_\infty (1-q)^{1-x}}{(q^x;q)_\infty}, \quad x \in \mathbb{A}. \tag{0.1}$$

Comme $(1-q^x)(q^{x+1};q)_\infty = (q^x;q)_\infty$, la fonction Γ_q satisfait à l'équation fonctionnelle

$$y(x+1) = [x]y(x), \qquad y(1) = 1. \tag{0.2}$$

Quand q tend vers 1, Γ_q converge vers Γ et la relation (0.2) devient l'équation fondamentale de la fonction Γ :

$$y(x+1) = xy(x), \qquad y(1) = 1. \tag{0.3}$$

Le théorème de Bohr-Mollerup montre que la fonction Γ est la seule fonction analytique sur $\mathbb{A}$ qui vérifie (0.3) et dont la restriction à $]0,+\infty[$ soit log-convexe. En 1978, R. Askey [1] a généralisé ce théorème au cas de la fonction Γ_q.

Citons maintenant une autre caractérisation de la fonction Γ :

Théorème de Wielandt [7]. *La fonction Γ est la seule fonction analytique dans $\mathbb{A}$, bornée dans la bande verticale $\{x \in \mathbb{C} : 1 \leq \Re x \leq 2\}$ et vérifiant l'équation fonctionnelle (0.3).*

En regardant l'exposé [7] de R. Remmert sur la fonction Γ, on peut se demander s'il y avait une approche similaire pour la fonction Γ_q. On verra que, quitte à changer (0.3) en (0.2), l'énoncé du théorème d'unicité de Wielandt reste *valable* pour la fonction Γ_q ! A l'aide de cette caractérisation, nous obtiendrons des propriétés telles que la représentation intégrale de $1/\Gamma_q$, la formule du complément, la formule de Gauss, la fonction Bêta, etc. Tout ceci constituera la première partie de notre article, regroupant les trois paragraphes qui suivent. Soulignons que les résultats exposés dans cette partie sont *bien connus* depuis des travaux de Jackson, Askey, etc. Notre intention se limite à en donner une présentation au point de vue de la théorie des fonctions, comme l'a fait R. Remmert [7] pour la fonction Gamma.

La représentation intégrale de $1/\Gamma$ évoquée ci-dessus est la suivante :

$$\frac{1}{\Gamma_q(x)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{H}_\theta} \frac{e_q(z)}{z^x}dz, \quad \forall x \in \mathbb{C},$$

où $\mathcal{H}_\theta$ désigne un coutour de Hankel, $e_q(z) = 1/((q-1)z;q)_\infty$ une fonction q-exponentielle ; voir 2.5. Il s'en suit que la fonction

$$\gamma_q(x) = \int_0^{+\infty} t^x e_q(-t)\frac{dt}{t}$$

peut alors être vue comme "complément" de $\Gamma_q(1-x)$. Or, au point de vue de la resolution formelle d'une équation fonctionnelle aux q-différences, la fonction $t \mapsto t^x$ équivaut à la suivante (*cf* le début du paragraphe 4 ci-dessous ; voir aussi [8]) :

$$\Theta_q(x;t) = \frac{(-t;q)_\infty(-q/t;q)_\infty}{(-q^x t;q)_\infty(-q^{1-x}t^{-1};q)_\infty},$$

cette dernière étant fondée sur la série théta de Jacobi $\sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{n(n-1)/2}t^n$. Cette q-analogie nous conduit à introduire la fonction g_q :

$$g_q(x) = \int_0^{+\infty} \Theta_q(x;t)e_q(-t)\frac{dt}{t}, \quad x \in \mathbb{A},\ |\arg x| < \pi/|\ln q|,$$

qui vérifie aussi l'équation (0.2).

Dans la seconde partie de notre article, nous exprimerons la fonction g_q au moyen de Γ_q et des fonctions périodiques. Nous en déduirons la convergence de g_q vers Γ quand q tend vers 1. Nous terminerons l'article par un phénomène remarquable : la fonction g_q possède pour développement asymptotique une série de Laurent qui est partout *divergente*. Nous sommes alors devant un problème classique de la théorie des fonctions spéciales, celui de sommer une solution formelle divergente d'une équation fonctionnelle. Espérons que notre travail fournisse un exemple de base pour une théorie de resommation qui resterait à faire.

1. Une caractérisation de Γ_q.

Considérons l'équation (0.2) ; en y substituant $y(x) = (1-q)^{1-x}/u(x)$, on obtient l'équation :

$$u(x) = (1-q^x)u(x+1), \quad u(1) = 1. \tag{1.1}$$

Par itération, on trouve une solution de (1.1) :

$$u(x) = \frac{\prod_{n\geq 0}(1-q^{x+n})}{\prod_{n\geq 0}(1-q^{n+1})} = \frac{(q^x;q)_\infty}{(q;q)_\infty},$$

laquelle correspond à la fonction Γ_q pour l'équation initiale (0.2). Du fait que pour tout $x \in \mathbb{A}$:

$$\Gamma_q(x + \frac{2\pi i}{\ln q}) = (1-q)^{-2\pi i/\ln q}\Gamma_q(x),$$

on déduit immédiatement le résultat suivant :

(1.2) Lemme. *La fonction Γ_q ne s'annule nulle part sur $\mathbb{A}$ et il existe des constantes m, $M > 0$ telles que, si $1 \leq \Re x \leq 2$, on ait :*

$$m \leq |\Gamma_q(x)| \leq M \qquad \square$$

Notons $U = \{x \in \mathbb{A} : 1 \leq \Re x \leq 2\}$. Soient $\lambda \geq 0$ et g une fonction analytique dans un ouvert de $\mathbb{C}$ contenant U ; on dira que f admet à l'infini dans U une *croissance exponentielle d'ordre 1 et de type* λ si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $K_\varepsilon > 0$ vérifiant la condition suivante :

$$|g(x)| \leq K_\varepsilon e^{(\lambda+\varepsilon)|x|}, \quad \forall x \in U.$$

Le résultat suivant est bien classique.

(1.3) Lemme. *Si g est une fonction entière, périodique, de période 1, admettant à l'infini dans U une croissance exponentielle d'ordre 1 et de type $< 2\pi$, alors g est constante.*

Preuve – Par périodicité de g, il existe une fonction analytique de $\mathbb{C}^*$ à $\mathbb{C}$ telle que $g(x) = h(e^{2\pi ix})$ pour tout $x \in \mathbb{C}$. Quand $\Im x \to +\infty$ ou $-\infty$, on a $e^{2\pi ix} \to 0$ ou ∞ respectivement. La croissance de g à l'infini dans U donne alors les limites suivantes :

$$\lim_{z\to 0} zh(z) = \lim_{z\to\infty} h(z)/z = 0;$$

il vient que h peut se prolonger en une fonction analytique à la fois en l'origine et à l'infini ; le lemme découle ainsi du théorème de Liouville. $\square$

Ceci étant, vérifions maintenant la caractérisation suivante de Γ_q :

(1.4) Théorème. *La fonction Γ_q est la seule fonction analytique sur $\mathbb{A}$, satisfaisant à la relation fonctionnelle (0.2) et qui admette à l'infini dans U une croissance exponentielle d'ordre 1 et de type $< 2\pi$.*

Preuve – Soit f une fonction vérifiant les hypothèses du théorème ; on pose $g(x) = f(x)/\Gamma_q(x)$ pour $x \in \mathbb{A}$. En utilisant le lemme (1.2), on obtient que g est définie et analytique sur $\mathbb{A}$; par périodicité, g peut se prolonger en une fonction entière, ayant une croissance exponentielle d'ordre 1 et de type $< 2\pi$; ceci prouve le théorème, d'après le lemme (1.3). $\square$

On peut remplacer dans le théorème précédent, la condition d'avoir une croissance exponentielle d'ordre 1 et de type $< 2\pi$ par celle d'être bornée. Par ailleurs, le raisonnement qui précède repose essentiellement sur le fait que Γ_q, $1/\Gamma_q$ sont toutes deux bornées sur la bande U ; d'où la remarque suivante :

(1.5) Remarque. *La caractérisation (1.4) est aussi valable pour la fonction $1/\Gamma_q$, en remplaçant cette fois (0.2) par*

$$y(x) = [x]y(x+1), \quad y(1) = 1. \qquad \square$$

A partir du théorème de Wielandt, R. Remmert [7] a donné une preuve très simple de la formule suivante de Gauss :

$$\prod_{\nu=0}^{n-1} \Gamma(x + \frac{\nu}{n}) = (2\pi)^{(n-1)/2} n^{1/2-nx} \Gamma(nx), \quad n \in \mathbb{N}^*,\ x \in \mathbb{A}.$$

Un q-analogue de cette formule a été donné par Jackson comme suit (*cf* [4] p. 18) :

$$(1.6) \qquad \prod_{\nu=0}^{n-1} \Gamma_{q^n}(x + \frac{\nu}{n}) = K(q,n)(1 + q + ... + q^{n-1})^{1/2-nx} \Gamma_q(nx),$$

où $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{A}$ et

$$K(q,n) = (1+q+...+q^{n-1})^{1/2} \prod_{\nu=1}^{n} \Gamma_{q^n}(\frac{\nu}{n}) = \frac{((q^n;q^n)_\infty)^n (1-q^n)^{n/2}}{(q;q)_\infty (1-q)^{1/2}}.$$

Pour prouver (1.6), posons

$$f(x) = \frac{(1+q+...+q^{n-1})^{nx}}{\Gamma_q(nx)} \prod_{\nu=0}^{n-1} \Gamma_{q^n}(x+\frac{\nu}{n}), \quad x \in \mathbb{A}.$$

Avec le lemme (1.2), on obtient que f est une fonction définie, analytique sur $\mathbb{A}$ et bornée sur U. Par calcul, on a : $f(x+1) = f(x)$; il en résulte, d'après le lemme (1.3), que f est constante sur $\mathbb{C}$; ceci termine la preuve de (1.6).

2. Représentation intégrale de Γ_q.

La fonction Γ peut être définie pour $x \in \mathbb{A}$ par

(2.1) $$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} \frac{dt}{t}.$$

Comme l'a dit R. Askey dans l'article [2], la formule (0.1) définissant Γ_q ressemble à la formule suivante de Γ, due à Euler :

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x} \prod_{n \geq 1} \{(1+\frac{1}{n})^x (1+\frac{x}{n})^{-1}\}.$$

Celle-ci implique directement la formule du complément

(2.2) $$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)},$$

formule donnant lieu à la représentation suivante de $1/\Gamma$:

(2.3) $$\frac{1}{\Gamma(x)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{H}_\theta} \frac{e^z}{z^x} dz, \qquad \theta \in]\pi/2, \pi].$$

(2.4) Ici et dans la suite, pour chaque $\theta \in]0, \pi]$, on désigne par $\mathcal{H}_\theta$ (contour de Hankel) le chemin composé de deux demi-droites $\mathcal{D}_-$, $\mathcal{D}_+$ et d'un arc de cercle $\mathcal{C}$ définis de la manière suivante : $\mathcal{D}_-$ vient de l'infini, fait l'angle $-\theta$ avec l'axe $\mathbb{R}^+$, rejoint $\mathcal{C}$ au point d'affixe $-i/2$; $\mathcal{C}$ est l'arc du cercle de centre 0, de rayon 1/2, passant de $-i/2$ à $i/2$ via le point 1/2 ; $\mathcal{D}_+$ est la demi-droite partant du point $i/2$ et faisant l'angle θ avec $\mathbb{R}^+$.

Afin d'établir une représentation intégrale de Γ_q telle que (2.1) ou (2.3), nous commençons par discrétiser la fonction exponentielle de la manière suivante. Soit σ_q l'opérateur aux q-différences défini par $\sigma_q y(z) = y(qz)$; en substituant $(\sigma_q - 1)/(qz - z)$ à d/dz dans l'équation $y' = y$, nous obtenons l'équation aux q-différences

(2.5) $$y(qz) = (1-(1-q)z)y(z),$$

dont une solution notée $e_q(z)$, obtenue par itération, s'écrit sous la forme :

$$e_q(z) = \prod_{n\geq 0} \big(1-(1-q)q^n z\big)^{-1}.$$

(2.6) Lemme. *La fonction* $z \mapsto e_q(z)$, *analytique sur* $\mathbb{C} \setminus \{\frac{1}{1-q}q^{-n} : n \in \mathbb{N}\}$, *possède les propriétés suivantes.*

(1) Si $|z| < 1/(1-q)$, *on a :* $e_q(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{[n]_q!} z^n$.

(2) La fonction $e_q(z)$ *admet à l'infini une décroissance q-exponentielle d'ordre exacte 1 et de type fini dans toute direction de* $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$ *au sens suivant : étant donné* $\theta \in]0,\pi[$, *il existe* $K > 0$ *tel que, pour tout* $z \in \mathbb{C}^*$ *vérifiant* $|z| \geq 1$ *et* $\theta \leq |\arg z| < \pi$, *on ait :*

$$|e_q(z)| < K|e^{-\frac{1}{2\ln q}(\log z)\log(z/(q(1-q)^2))}|.$$

Preuve – La première assertion s'obtient en posant $a = 0$, $w = (1-q)z$ dans le théorème q-binomial suivant ([4], p. 7-9) :

$$\sum_{n\geq 0} \frac{(a;q)_n}{(q;q)_n} w^n = \frac{(aw;q)_\infty}{(w;q)_\infty}, \quad |w| < 1,\ a \in \mathbb{C}. \tag{2.7}$$

La seconde découle du fait que la fonction f définie sur $\mathbb{C}\setminus]-\infty, 0]$ par :

$$f(z) = z^{-\frac{\ln(1-q)+\pi i}{\ln q}} e^{\frac{1}{2\ln q}(\log z)\log(z/q)} \prod_{n\geq 0} \big(1-(1-q)q^n z\big)\big(1-\frac{q^{n+1}}{(1-q)z}\big)$$

vérifie $f(qz) = f(z)$. Nous laissons au lecteur le soin de compléter la preuve ; voir [6] pour une théorie générale sur ce type de problème. □

(2.8) Théorème. *Soit* $\theta \in]0,\pi]$ *et soit* $\mathcal{H}_\theta$ *le chemin correspondant défini dans (2.4). On a :*

$$\frac{1}{\Gamma_q(x)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{H}_\theta} \frac{e_q(z)}{z^x} dz, \quad \forall x \in \mathbb{C}. \tag{2.9}$$

Preuve – Il est clair que ce théorème peut être démontré au moyen du théorème des résidus (*cf* [5]). Nous donnons ici une preuve basée sur notre remarque (1.5). Vu la décroissance de $e_q(z)$ à l'infini décrite par le lemme (2.6), l'intégrale du membre à droite de (2.9) converge pour tout $x \in \mathbb{C}$; elle définit une fonction analytique sur $\mathbb{C}$, qui est indépendante du choix de la valeur de $\theta \in]0,\pi]$, d'après le théorème de Cauchy. Soit $f(x)$ cette fonction ; en utilisant $(1-q)ze_q(z) = e_q(z) - e_q(qz)$, on a :

$$(1-q)\int_{\mathcal{H}_\theta} \frac{e_q(z)}{z^x} dz = \int_{\mathcal{H}_\theta} \frac{e_q(z) - e_q(qz)}{z^{x+1}} dz = (1-q^x)\int_{\mathcal{H}_\theta} \frac{e_q(z)}{z^{x+1}} dz;$$

on en déduit $[x]f(x+1) = f(x)$ pour $x \in \mathbb{C}$. Avec la formule de Cauchy, on obtient $f(1) = e_q(0) = 1$. Il ne reste plus qu'à prouver que f admet à l'infini dans U une croissance exponentielle d'ordre 1 et de type $< \pi/2$. Pour ceci, nous nous fixons $\theta = \pi/4$. Supposons

$x \in U$, $z \in \mathcal{H}_\theta$; on a $1 \le \Re x \le 2$, $|z| \ge 1/2$ et $\arg z \in [-\pi/4, \pi/4]$; on en déduit l'estimation suivante :

$$|z^x| = |z|^{\Re x} e^{\Im x \arg z} \ge \frac{1}{4} e^{-\pi|\Im x|/4},$$

laquelle implique que $f(x) = O(e^{\pi|\Im x|/4})$ si $x \in U$. $\square$

Dans l'intégrale de (2.9), si l'on pose $\theta = \pi$, le contour $\mathcal{H}_\pi$ est composé de deux demi-droites parallèles à $]-\infty, 0]$ et d'un demi cercle de centre 0, de rayon 1/2. En diminuant continuement le rayon vers zéro, par Cauchy on obtient la formule suivante :

$$\frac{1}{\Gamma_q(1-x)} = \frac{\sin(\pi x)}{\pi} \int_0^{+\infty} t^x e_q(-t) \frac{dt}{t}, \quad x \in \mathbb{A};$$

ou encore,

$$\gamma_q(x)\Gamma_q(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)} \tag{2.10}$$

si l'on pose pour $x \in \mathbb{A}$:

$$\gamma_q(x) = \int_0^{+\infty} t^x e_q(-t) \frac{dt}{t} \ \Big(= \int_0^{+\infty} \frac{t^x}{(-(1-q)t;q)_\infty} \frac{dt}{t}\Big). \tag{2.11}$$

On vérifie aisément que $\gamma_q(x+1) = -[-x]\gamma_q(x)$, $\gamma_q(1) = 1$; d'où : $\gamma_q(n+1) = q^{-n(n-1)/2}[n]_q!$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Supposons que q tende vers 1. Vu le développement en série entière de chaque $e_q(z)$ en $z = 0$ (*cf* (2.6)), les fonctions $z \mapsto e_q(z)$ convergent uniformément vers e^z sur tout compact de $\mathbb{C}$; d'où :

$$\int_0^1 t^x e_q(-t) \frac{dt}{t} \to \int_0^1 t^x e^{-t} \frac{dt}{t}.$$

On en déduit que la fonction γ_q converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{A}$ vers Γ, d'après le théorème de la convergence dominée de Lebesgue et le lemme suivant.

(2.12) Lemme. *Pour tout entier $N > 0$ et tout réel $t > 0$, on a :*

$$e_q(-t) < N^N q^{-N(N-1)/2} t^{-N}.$$

Preuve – Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $t > 0$; on a :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{e_q(-t)} &= \prod_{m=0}^{N-1} \prod_{k\ge 0} (1 + (1-q) q^{kN+m} t) \\
&> \prod_{m=0}^{N-1} \Big(\sum_{k \ge 0} (1-q) q^{kN+m} t\Big) \\
&= q^{N(N-1)/2} \Big(\frac{1-q}{1-q^N}\Big)^N t^N > q^{N(N-1)/2} N^{-N} t^N. \quad \square
\end{aligned}$$

A partir des relations (2.2) et (2.10), on obtient que Γ_q converge aussi vers Γ.

3. Fonction q-Bêta.

Les relations (2.10), (2.11) impliquent celle-ci : pour $x \in \mathbb{A}$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^x}{(-t;q)_\infty} \frac{dt}{t} = \frac{\pi}{\sin(\pi x)} \frac{(q^{1-x};q)_\infty}{(q;q)_\infty}. \tag{3.1}$$

Déduisons-en la formule de Ramanujan suivante (*cf* [3], p. 29) :

$$\int_0^{+\infty} \frac{(-at;q)_\infty}{(-t;q)_\infty} t^x \frac{dt}{t} = \frac{\pi}{\sin(\pi x)} \frac{(a;q)_\infty (q^{1-x};q)_\infty}{(q;q)_\infty (aq^{-x};q)_\infty}, \tag{3.2}$$

où $|a| < |q^x|$, $x \in \mathbb{A}$ et où le second membre prend sa valeur limite pour x tendant vers n chaque fois si $x = n \in \mathbb{N}^*$.

En effet, soit $x \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{N}$; d'après la formule q-binomiale (2.7), si $|a| < 1$, on a :

$$(-at;q)_\infty = (a;q)_\infty \sum_{n \geq 0} \frac{(-t;q)_n}{(q;q)_n} a^n,$$

laquelle, combinée avec (3.1), donne (3.2) via les calculs ci-dessous :

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{(-at;q)_\infty}{(-t;q)_\infty} t^{x-1} dt &= (a;q)_\infty \sum_{n \geq 0} \frac{a^n}{(q;q)_n} \int_0^{+\infty} \frac{t^x}{(-tq^n;q)_\infty} \frac{dt}{t} \\
&= (a;q)_\infty \sum_{n \geq 0} \frac{a^n}{(q;q)_n} (1-q)^{-x} q^{-nx} \gamma_q(x) \\
&= \frac{\pi}{\sin(\pi x)} \frac{(a;q)_\infty (q^{1-x};q)_\infty}{(q;q)_\infty} \sum_{n \geq 0} \frac{(aq^{-x})^n}{(q;q)_n}.
\end{aligned}$$

En particulier, si $n \in \mathbb{N}^*$ et $|a| < q^n$, on a :

$$\int_0^{+\infty} \frac{(-at;q)_\infty}{(-t;q)_\infty} t^{n-1} dt = (-1)^n \frac{\ln q}{1 - q^{-n}} \frac{(q^{-n};q)_n}{(aq^{-n};q)_n}. \tag{3.3}$$

Soient $x \in \mathbb{A}$, $w \in \mathbb{A}$; la fonction Bêta $B(x,w)$ peut être définie par :

$$B(x,w) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{w-1} dt;$$

en effectuant le changement de variable $t \mapsto t/(1-t)$, on a :

$$B(x,w) = \int_0^{+\infty} t^x (1+t)^{-x-w} \frac{dt}{t}. \tag{3.4}$$

Le lien entre la fonction Bêta et la fonction Gamma s'établit via l'identité :

$$\int_0^{+\infty} t^x (1+t)^{-x-w} \frac{dt}{t} = \frac{\Gamma(x)\Gamma(w)}{\Gamma(x+w)}. \tag{3.5}$$

(3.6) Théorème. *On a le q-analogue suivant de la relation (3.5), du à Askey et al (cf [4] p. 158) :*

$$\int_0^{+\infty} \frac{(-tq^w;q)_\infty(-q^{x+1}/t;q)_\infty}{(-t;q)_\infty(-q/t;q)_\infty}\frac{dt}{t} = \frac{\ln q}{q-1}\frac{\Gamma_q(x)\Gamma_q(w)}{\Gamma_q(x+w)}, \tag{3.7}$$

où $x,\ w \in \mathbb{A}$.

Preuve – Notons $B_q(x,w)$ la fonction définie par l'intégrale de (3.7) ; c'est une fonction analytique sur $\mathbb{A}^2$ telle que : $|B_q(x,w)| \leq |B_q(\Re x, \Re w)|$. Posons $a = q^{w+1}$ dans (3.3) ; avec l'identité

$$q^{-1}t(-t;q)_\infty(-q/t;q)_\infty = (-t/q;q)_\infty(-q^2/t)_\infty,$$

on trouve :

$$B_q(1,w) = \frac{1}{q}\int_0^{+\infty}\frac{(-tq^w;q)_\infty}{(-t/q;q)_\infty}dt = \frac{\ln q}{q-1}\frac{1}{[w]}. \tag{3.8}$$

Faisons le changement de variable $t \mapsto qt$ dans l'intégrale de (3.7) ; on obtient :

$$\begin{aligned} B_q(x+1,w) &= \int_0^{+\infty}\frac{(-tq^{w+1};q)_\infty(-q^{x+1}/t;q)}{(-t;q)_\infty(-q/t;q)_\infty}t\frac{dt}{t} \\ &= q^{-w}(B_q(x,w) - B_q(x,w+1)); \end{aligned}$$

de même, on a : $B_q(x,w+1) = q^{-x}(B_q(x,w) - B_q(x+1,w))$. En combinant ces deux dernières relations, on trouve :

$$[x+w]B_q(x+1,w) = [x]B_q(x,w), \quad [x+w]B_q(x,w+1) = [w]B_q(x,w).$$

Posons enfin $h(x,w) = \frac{q-1}{\ln q}B_q(x,w)\Gamma_q(x+w)$ pour $x,\ w \in \mathbb{A}$; on a :

$$h(x+1,w) = [x]h(x,w), \quad h(x,w+1) = [w]h(x,w).$$

Comme h est bornée dans $U\times U$, on en déduit que $h(x,w) = \Gamma_q(x)\Gamma_q(w)$, d'après le théorème 1.4 et la relation (3.8). □

Quand $\Re x$, $\Re w$ tendent vers $+\infty$, la relation (3.7) devient :

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{(-t;q)_\infty(-q/t;q)_\infty}\frac{dt}{t} = -\ln q. \tag{3.9}$$

Dans [4] p. 158, on trouve une généralisation de la formule (3.7). Des généralisations au cas multidimensionnel sont données dans [9], p. 121-130.

4. Un autre q-analogue de Γ.

Soit $\Theta_q(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{n(n-1)/2}z^n$ une série théta de Jacobi. On a, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$:

$$z\Theta_q(qz) = \Theta_q(z), \quad \Theta_q(z) = (q;q)_\infty(-z;q)_\infty(-q/z;q)_\infty. \tag{4.1}$$

Il en résulte que $\Theta_q(z) = 0$ si et seulement si $z \in \{-q^n : n \in \mathbb{Z}\}$. Soit $x \in \mathbb{C}$; si $\Theta_q(q^x z) \neq 0$, on pose

$$\Theta_q(x; z) = \frac{\Theta_q(z)}{\Theta_q(q^x z)} (= \frac{(-z; q)_\infty (-q/z; q)_\infty}{(-q^x z; q)_\infty (-q^{1-x}/z; q)_\infty}).$$

On a :

$$\Theta_q(x; qz) = q^x \Theta_q(x; z), \quad \Theta_q(x + 1; z) = q^x z \Theta_q(x; z) = z \Theta_q(x; qz), \tag{4.2}$$

ce qui montre que $\Theta_q(x; z)$ est analogue à la fonction $(x, z) \mapsto z^x$. Par calcul, on s'aperçoit que le q-analogue décrit par (3.6) pour la fonction Bêta s'obtient en effectuant dans la définition (3.4) les substitutions suivantes :

$$t^x \mapsto \Theta_q(x; t), \quad (1 + t)^{x+w} \mapsto \frac{(-q^{x+w} t; q)_\infty}{(-t; q)_\infty},$$

(nous remarquons que $\lim\limits_{q \to 1^-} \dfrac{(-q^{x+w} t; q)_\infty}{(-t; q)_\infty} = (1 + t)^{x+w}$, d'après [4], p. 9). Nous allons définir un q-analogue de Γ au moyen d'une intégrale utilisant $\Theta_q(x; t)$ et $e_q(-t)$.

(4.3) Lemme. *(1) Pour tout $\theta \in]0, \pi[$, il existe des constantes K_1, $K_2 > 0$ telles que, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ avec $|\arg z| \leq \theta$, on ait :*

$$K_1 |e^{-\frac{1}{2 \ln q} (\log z) \log(z/q)}| \leq |\Theta_q(z)| \leq K_2 |e^{-\frac{1}{2 \ln q} (\log z) \log(z/q)}|.$$

(2) Si $a \in \mathbb{C}$ et $\theta \in]-\pi, \pi[$ vérifient $(q^a e^{i\theta}) \notin]-\infty, 0[$, alors il existe une constate $K > 0$ telle que, pour tout $\rho \in]0, +\infty[$, on ait :

$$|\Theta_q(a; \rho e^{i\theta})| < K |\rho^a|.$$

Preuve – (1) Posons $f(z) = \Theta_q(z) e^{\frac{1}{2 \ln q} (\log z) \log(z/q)}$ pour $z \in \mathbb{C} \backslash]-\infty, 0]$; la première relation de (4.1) implique celle-ci : $f(qz) = f(z)$. En choisissant K_1 (resp. K_2) le minimun (resp. maximum) de $|f|$ sur le compact

$$\{z \in \mathbb{C} : q \leq |z| \leq 1, |\arg z| \leq \theta\},$$

on obtient l'encadrement annoncé pour Θ_q.

La seconde assertion découle directement de la première. □

Ceci étant fait, considérons la fonction définie par

$$g_q(x; 0) = \int_0^{+\infty} \Theta_q(x; t) e_q(-t) \frac{dt}{t} \tag{4.4}$$

pour tous les $x \in \mathbb{A}$ tels que $|\Im(x)| < \pi/|\ln q|$. En modifiant continuement le chemin d'intégration $[0, +\infty[$ en une demi-droite $[0, e^{i\theta}\infty[$ avec $\theta \in]-\pi, \pi[$, la fonction $g_q(x)$ se prolonge en une fonction, notée encore $g_q(x; 0)$, analytique dans $\{x \in \mathbb{A} : |\Im(x)| < 2\pi/|\ln q|\}$.

Posons :

$$V = \{x \in \mathbb{A} : |\Im(x)| < \frac{2\pi}{|\ln q|}\}, \quad V_- = \{x \in \mathbb{A} : \frac{2\pi}{\ln q} < \Im(x) < 0\}.$$

(4.5) Lemme. *On a* $g_q(1;0)=1$ *et, pour tout* $x\in V$: $g_q(x+1;0)=[x]g_q(x;0)$.

Preuve – Si $x=1$, on a $\Theta_q(x;t)=t$, ce qui donne $g_q(1;0)=\gamma_q(1)=1$.

Compte tenu des relations (2.5), (4.2), on a, pour $x\in\mathbb{A}$ tel que $|\Im(x)|<\pi/|\ln q|$:

$$g_q(x+1;0)=q^x\int_0^{+\infty}\Theta_q(x;t)te_q(-t)\frac{dt}{t}=...=[x]g_q(x;0).$$

Par prolongement analytique, la relation $g_q(x+1;0)=[x]g_q(x;0)$ s'étend sur V tout entier. □

(4.6) Lemme. *Pour tout* $x\in V_-$, *on a :*

$$g_q(x-\frac{2\pi i}{\ln q};0)-g_q(x;0)=2\pi i\frac{(1-q)^x\Theta_q(x;\frac{1}{q-1})}{\Gamma_q(1-x)}.$$

Preuve – Les deux cotés de la formule du lemme étant des fonctions analytiques sur V_-, il nous suffit, d'après le théorème du prolongement analytique, d'établir la formule pour une partie de V_- "assez grande" ; nous le ferons avec une demi-droite. Soit $x\in V_-$ tel que $\Im x=\pi/(2\ln q)$; on a :

$$\begin{aligned}g_q(x-\frac{2\pi i}{\ln q};0)-g_q(x;0)&=(\int_0^{\infty e^{2\pi i/3}}-\int_0^{\infty e^{-2\pi i/3}})\Theta_q(x;t)e_q(-t)\frac{dt}{t}\\&=(\int_0^{\infty e^{2\pi i/3}}-\int_0^{\infty e^{4\pi i/3}})\Theta_q(x;t)e_q(-t)\frac{dt}{t},\end{aligned}\tag{4.7}$$

la deuxième égalité résultant du fait que la fonction $\Theta_q(x;t)e_q(-t)$ est uniforme, *i.e* invariante pour $t\mapsto te^{2\pi i}$. On note les propriétés suivantes :

(1) la fonction $t\mapsto e_q(-t)$ admet des pôles simples aux points $q^{-n}/(q-1)$, $n\in\mathbb{N}$;

(2) la fonction $t\mapsto\Theta_q(x;t)$ est analytique si $q^xt\notin]-\infty,0]$, c'est-à-dire que si $\arg t\neq\pi/2$ modulo 2π.

Considérons le secteur ouvert $W=\{t\in\mathbb{C}^*:\arg t\in]7\pi/12,17\pi/12[\}$ où $\Theta_q(x;t)$ est analytique ; appliquons le théorème des résidus à la dernière intégrale de contour de (4.7). On en déduit :

$$\begin{aligned}g_q(x-\frac{2\pi i}{\ln q};0)-g_q(x;0)=&2\pi i\sum_{n\geq0}q^n(q-1)\Theta_q(x;\frac{q^{-n}}{q-1})\mathrm{Res}(e_q(-t);\frac{q^{-n}}{q-1})\\=&2\pi i(q-1)\Theta_q(x;\frac{1}{q-1})\sum_{n\geq0}q^{(1-x)n}\mathrm{Res}(e_q(-t);\frac{q^{-n}}{q-1}),\end{aligned}$$

le second passage utilisant la première relation de (4.2). Pour terminer, il suffit d'appliquer le théorème des résidus dans la formule (2.9) :

$$\frac{1}{\Gamma_q(x)}=\sum_{n\geq0}q^{nx}(1-q)^x\mathrm{Res}(e_q(z);\frac{q^{-n}}{1-q}).\qquad\square$$

En tant que différence de deux solutions de l'équation fondamentale (0.2) de Γ_q, la fonction

$$x \mapsto \frac{(1-q)^x \Theta_q(x; \frac{1}{q-1})}{\Gamma_q(1-x)} \Big(= \frac{(q^{1-x};q)_\infty (1/(1-q);q)_\infty (q(1-q);q)_\infty}{(q;q)_\infty (q^x/(1-q);q)_\infty (q^{1-x}(1-q);q)_\infty}\Big)$$

obtenue dans le lemme (4.6) vérifie également cette équation. En plus, elle est invariante par la translation $x \mapsto x + \frac{2\pi i}{\ln q}$ et admet pour pôles (simples) les x tels que $q^x/(1-q) \in q^{\mathbb{Z}}$. Nous désignons par $g_q(x)$ la fonction définie sur $\mathbb{A}$ par les conditions suivantes :

$$g_q(x) = g_q(x;0) \quad \text{si } x \in V,$$
$$g_q(x) = g_q(x + \frac{2\pi i}{\ln q}) + 2\pi i \frac{(1-q)^x \Theta_q(x; \frac{1}{q-1})}{\Gamma_q(1-x)} \quad \text{pour } x \in \mathbb{A}.$$

La fonction $g_q(x)$ existe et est unique car elle peut être obtenue de la manière suivante : pour $x \in \mathbb{A}$, on choisit $k \in \mathbb{Z}$ de sorte que $\Im x + 2\pi k/\ln q \in]\pi/\ln q, -\pi/\ln q]$; on pose

$$g_q(x) = g_q(x + 2\pi k/\ln q; 0) + 2\pi k i \frac{(1-q)^x \Theta_q(x; \frac{1}{q-1})}{\Gamma_q(1-x)}.$$

(4.8) Théorème. *Pour tout $x \in \mathbb{A}$, on a :*

$$g_q(x) = \frac{(1-q)^x \Theta_q(x; \frac{1}{q-1})}{\Gamma_q(1-x)} \Big(- \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{2\pi \sin(2\pi \frac{\ln(1-q)}{\ln q})}{\lambda_q^n - 2\cos(2\pi \frac{\ln(1-q)}{\ln q}) + \lambda_q^{-n}} + \\ + \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{2\pi \sin(2\pi x)}{\lambda_q^n - 2\cos(2\pi x) + \lambda_q^{-n}} \Big) \tag{4.9}$$

où $\lambda_q = e^{4\pi^2/\ln q}$.

En outre, on a :

$$\lim_{q\to 1, q<1} g_q(x) = \Gamma(x), \tag{4.10}$$

la convergence étant uniforme sur tout compact de $\mathbb{A}$.

La preuve du théorème fait l'objet du paragraphe qui suit.

5. Démonstration du théorème (4.8).

Considérons la fonction f définie pour $x \in \mathbb{A}$ par :

$$f(x) = \frac{g_q(x)\Gamma_q(1-x)}{(1-q)^x \Theta_q(x; \frac{1}{q-1})}.$$

Nous remarquons les propriétés suivantes.

(5.1) On a $f(x+1) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{A}$, d'après les lemmes (4.5) et (4.6).

(5.2) La fonction f est méromorphe sur $\mathbb{A}$, admet des pôles simples aux points x tels que $q^{1-x} \in q^{-\mathbb{N}}$, points auxquels la fonction $x \mapsto \Gamma_q(1-x)$ n'est pas analytique.

(5.3) On a $f(x) = f(x + 2\pi i/\ln q) + 2\pi i$ pour tout $x \in \mathbb{A}$.

Les propriétés (5.1), (5.2) impliquent qu'il existe une fonction méromorphes $h : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ vérifiant $f(x) = h(e^{2\pi ix})$ et dont les pôles, simples, sont $e^{4k\pi^2/\ln q}$, $k \in \mathbb{Z}$. La propriété (5.3) exprime alors que h vérifie l'équation :

$$y(\lambda z) = y(z) + 2\pi i, \quad \lambda = \lambda_q = e^{4\pi^2/\ln q} \in]0,1[. \tag{5.4}$$

Posons $u(z) = \theta_\lambda(-z) = (\lambda;\lambda)_\infty(z;\lambda)_\infty(\lambda/z;\lambda)_\infty$, $v(z) = -2\pi i z u'(z)/u(z)$; on a :

$$v(z) = \frac{2\pi iz}{1-z} + \sum_{n\geq 1}\left(\frac{2\pi i}{z\lambda^{-n}-1} - \frac{2\pi i}{\lambda^{-n}z^{-1}-1}\right). \tag{5.5}$$

En dérivant par rapport à z les deux côtés de l'équation $-zu(\lambda z) = u(z)$, on obtient que v vérifie l'équation (5.4). Il en résulte que la fonction $h-v$ est "λ-périodique" au sens suivant : $(h-v)(\lambda z) = (h-v)(z)$.

Montrons que la fonction $h-v$ est constante. Puisque h et v sont analytiques sur $\mathbb{C}^*\backslash\lambda^{\mathbb{Z}}$, il suffit de vérifier que leurs résidus sont égaux en l'un de leurs pôles, tous simples. Considérons le pôle $z = 1$; avec (5.5) on a $\mathrm{Res}(v;1) = -2\pi i$. Pour évaluer $\mathrm{Res}(h;1)$, on remarque que $\mathrm{Res}(h;1) = 2\pi i\mathrm{Res}(f;1)$; or, $\mathrm{Res}(f;1) = -\mathrm{Res}(\Gamma_q;0)$, ce qui donne $\mathrm{Res}(h;1) = \mathrm{Res}(v;1)$.

Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{A}$, on a :

$$f(x) = f(1/2) + v(e^{2\pi ix}) - v(-1) = f(1/2) + v(e^{2\pi ix}) + \pi i.$$

En remplaçant z par $e^{2\pi ix}$ dans (5.5) et en regroupant les $e^{2\pi ix}$, $e^{-2\pi ix}$, on obtient :

$$v(e^{2\pi ix}) + \pi i = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{2\pi\sin(2\pi x)}{\lambda_q^n - 2\cos(2\pi x) + \lambda_q^{-n}}.$$

La fonction f s'annulant en chaque $x > 0$ vérifiant $q^x/(1-q) \in q^{\mathbb{N}}$, on a :

$$f(1/2) = -(v(e^{2\pi i\frac{\ln(1-q)}{\ln q}}) + \pi i);$$

ceci prouve la formule (4.9).

Soit $\alpha \in [0,1[$; on pose $Q_\alpha = \{q \in]0,1[: (1-q) \in q^{\alpha+\mathbb{N}}\}$; autrement dit, $q \in Q_\alpha$ si et seulement si $\frac{\ln(1-q)}{\ln q} - \alpha \in \mathbb{N}$. La famille $\{Q_\alpha : \alpha \in [0,1[\}$ constitue une partition de l'intervalle $]0,1[$. En effet, soit s la fonction définie sur $]0,1[$ par $s(q) = \frac{\ln(1-q)}{\ln q}$. On a

$$s'(q) = \frac{q\ln q + (1-q)\ln(1-q)}{q(q-1)(\ln q)^2} > 0;$$

il s'ensuit que s établit un homéomorphisme entre $]0,1[$ et $]0,+\infty[$.

A chaque $q \in]0,1[$, on pose $\alpha_q \in [0,1[$ le nombre défini par la relation $q \in Q_{\alpha_q}$. D'après (4.9), on a :

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(\frac{2\pi\sin(2\pi x)}{\lambda_q^n - 2\cos(2\pi x) + \lambda_q^{-n}} + \frac{2\pi\sin(2\pi\alpha_q)}{\lambda_q^n - 2\cos(2\pi\alpha_q) + \lambda_q^{-n}}\right).$$

Quand q tend vers 1, on a $\lambda_q \to 0$; il vient que tous les termes d'indice non nul figurant dans la formule sommatoire précédente convergent vers zéro ; d'où :

$$\lim_{q\to 1, q<1}\left(\frac{f(x)}{\sin(\pi(x+\alpha_q))} - \frac{\pi}{\sin(\pi x)\sin(\pi\alpha_q)}\right) = 0, \tag{5.6}$$

la convergence étant uniforme sur tout compact de $\mathbb{A}$.

Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $1 - q = q^{k+\alpha_q}$ (k dépendra de q). On a, d'après (4.2) :

$$\Theta_q(x; \frac{1}{q-1}) = \Theta_q(x; -q^{-k-\alpha_q}) = q^{-kx}\Theta_q(x; -q^{-\alpha_q}),$$

ce qui donne :

$$(1-q)^x\Theta_q(x; \frac{1}{q-1}) = q^{\alpha_q x}\Theta_q(x; -q^{-\alpha_q}) = q^{\alpha_q x}\frac{\Gamma_q(x+\alpha_q)\Gamma_q(1-x-\alpha_q)}{\Gamma_q(\alpha_q)\Gamma_q(1-\alpha_q)}.$$

En d'autres termes, on a :

$$g_q(x) = q^{\alpha_q x}\frac{\Gamma_q(x+\alpha_q)\Gamma_q(1-x-\alpha_q)}{\Gamma_q(\alpha_q)\Gamma_q(1-\alpha_q)\Gamma_q(1-x)}f(x).$$

La seconde assertion du théorème (4.8) découle de la formule (2.2) du complément de Γ, en utilisant la limite (5.6) et le fait que Γ_q converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{A}$ vers Γ quand q tend vers 1. □

6. Développement asymptotique de la fonction g_q.

Le lemme (4.5) et la relation (4.10) montrent que la fonction g_q peut être vue comme un q-analogue de la fonction Γ. C'est un q-analogue complètement différent de Γ_q : g_q a des pôles dans $\mathbb{A}$ tandis que Γ_q est une fonction analytique sur $\mathbb{A}$. On verra que g_q se développe en une série de Laurent en q^x divergente.

Supposons $x \in \mathbb{A}$ vérifiant $|\Im x| < \pi/|\ln q|$, posons $u = q^{-x}$; la définition (4.4) devient :

$$g_q(x) = \int_0^{+\infty}\frac{H(t)}{\Theta_q(t/u)}\frac{dt}{t}, \quad H(t) = \Theta_q(t)e_q(-t). \tag{6.1}$$

Notons $\sum_{n\in\mathbb{Z}} H_n t^n$ la série de Laurent de $H(t)$; en combinant la série de Laurent de $\Theta_q(t)$ et la série de Taylor (2.7) de $e_q(z)$, on obtient :

$$H_n = q^{n(n-1)/2}\sum_{m\geq 0}(-1)^m\frac{q^{m(m-1)/2}}{[m]_q!}\ q^{(1-n)m};$$

en appliquant une formule de [4], p. 9, on en déduit, pour $n \in \mathbb{Z}$:

$$H_n = q^{n(n-1)/2}((1-q)q^{1-n}; q)_\infty. \tag{6.2}$$

Supposons $n \in \mathbb{N}$; en décomposant $((1-q)q^{1-n}; q)_\infty$ en $((1-q)q^{1-n}; q)_n((1-q)q; q)_\infty$, on a :

$$H_n = (q-1)^n(1/(1-q); q)_n((1-q)q; q)_\infty;$$

donc il existe $K > 0$ vérifiant l'inégalité :

$$|H_n| > K(1-q)^n, \qquad \forall n \in \mathbb{N} \tag{6.3}$$

si $((1-q)q;q)_\infty \neq 0$, c'est-à-dire si $(1-q) \notin q^{-\mathbb{N}^*}$.

(6.4) Lemme. Soient $n \in \mathbb{Z}$ et $u \in \mathbb{C}\backslash]-\infty, 0]$; on a :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^n}{\Theta_q(t/u)} \frac{dt}{t} = \frac{-\ln q}{(q;q)_\infty} q^{-n(n-1)/2} u^n.$$

Preuve – En utilisant la relation $t\Theta_q(qt) = \Theta_q(t)$, on obtient

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^n}{\Theta_q(t)} \frac{dt}{t} = q^n \int_0^{+\infty} \frac{t^n}{\Theta_q(qt)} \frac{dt}{t} = q^n \int_0^{+\infty} \frac{t^{n+1}}{\Theta_q(t)} \frac{dt}{t},$$

ce qui donne

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^n}{\Theta_q(t)} \frac{dt}{t} = q^{-n(n-1)/2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\Theta_q(t)} \frac{dt}{t}.$$

Le lemme s'obtient grâce à la formule (3.9). □

Utilisons la série de Laurent $\sum_{n\in\mathbb{Z}} H_n t^n$ dans l'intégrale de (6.1) ; avec (6.2) et (6.4), on obtient la série de Laurent suivante :

$$\hat{g}_q(x) = \frac{-\ln q}{(q;q)_\infty} \sum_{n\in\mathbb{Z}} ((1-q)q^{1-n};q)_\infty u^n, \quad u = q^{-x}, \tag{6.5}$$

qui est généralement **divergente** pour tout $x \in \mathbb{A}$, d'après l'estimation (6.3) ci-dessus.

On vérifie aisément que la série $\hat{g}_q(x)$ satisfait terme à terme l'équation fondamentale de Γ_q. En effet, si l'on pose $y = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n q^{nx}$ dans (0.2), on trouve la relation de récurrence $(1-q)q^n a_n = a_n - a_{n-1}$, laquelle donne, pour $n \in \mathbb{Z}$: $a_n = ((1-q)q^{1+n};q)_\infty C$, C étant une constante.

Supposons $(1-q) \notin q^{-\mathbb{N}^*}$. Posons

$$\hat{f}_+(u) = \frac{-\ln q}{(q;q)_\infty} \sum_{n\geq 0} ((1-q)q^{1-n};q)_\infty u^n, \quad \hat{f}_-(u) = \frac{-\ln q}{(q;q)_\infty} \sum_{n<0} ((1-q)q^{1-n};q)_\infty u^n.$$

La série $\hat{f}_-$ converge pour $|u| > 1$ et définit un germe de fonction analytique, noté f_-, au voisinage de l'infini, y compris le point à l'infini. On a :

$$f_-(u) = \int_0^{+\infty} \frac{H_-(t)}{\Theta_q(t/u)} \frac{dt}{t},$$

où $H_-(t) = \sum_{n<0} H_n t^n$ est une fonction analytique sur $\mathbb{C}^* \cup \{\infty\}$. On peut prolonger f_- en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}^* \cup \{\infty\}$ à l'aide de la relation :

$$(1-q)f_-(u/q) = (1 - \frac{1}{u})f_-(u) + \frac{((1-q)/q;q)_\infty}{(q;q)_\infty} \frac{\ln q}{u}.$$

D'autre part, on peut vérifier que $g_q(x) - f_-(q^{-x})$ admet $\hat{f}_+(q^{-x})$ pour développement asymptotique (au sens de Poincaré, par exemple) quand q^{-x} tend vers zéro dans $\mathbb{C}\backslash]-\infty, 0]$.

Dans le travail [10], l'auteur a introduit la notion de développement asymptotique q-Gevrey et la notion de Gq-sommabilité pour les séries entières solutions formelles d'une équation aux q-différences. L'un des outils fondamentaux était l'utilisation d'un q-analogue de la transformation de Borel-Laplace obtenu en remplaçant la fonction exponentielle par son q-analogue $z \mapsto e^{(\log z)(\log z + \ln q)/(2 \ln q)}$, cette dernière fonction satisfaisant à l'équation $y(qz) = zy(z)$. La transformation de Borel formelle correspondante faisait correspondre, à chaque série entière $\sum_{n \geq 0} a_n u^n$, la série $\sum_{n \geq 0} a_n q^{n(n-1)/2} \xi^n$ (dans [10], on utilisait q^{-1} au lieu de q).

Le lemme (6.4) nous suggère que la fonction $\Theta_q(z)$, en tant que fonction q-exponentielle, permettrait de définir un q-analogue de la transformation de Laplace, donnant lieu à une nouvelle méthode de resommation pour la série q-Gevrey divergente. Tout ceci est en cours d'étude.

Références.

[1] R. Askey, The q-gamma and q-beta functions, *Appl. Anal.*, **8** (1978), 125-141.

[2] R. Askey, Ramanujan's extension of the gamma and beta functions, *Amer. Math. Monthly*, **87** (1980), 346-359.

[3] B.C. Berndt, *Ramanujan's Notebooks, Part III*, Springer-Verlag, New York, 1991.

[4] G. Gasper et M. Rahman, *Basic hypergeometric series*, Encycl. Math. Appl., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.

[5] G.H. Hardy, Proof of a formula of Mr. Ramanujan, *Mess. Math.*, **44** (1915), 18-21.

[6] J.P. Ramis, About the growth of entire functions solutions of linear algebraic q-difference equations, *Annales de la Fac. de Toulouse*, Série 6, Vol. I, **1** (1992), 53-94.

[7] R. Remmert, Wielandt's theorem about the Γ-function, *Amer. Math. Monthly*, **103** (1996), 214-220.

[8] J. Sauly, La classification des systemes aux q-differences singuliers reguliers par la matrice de connexion de Birkhoff, *C. R. Acad. Sci., Paris*, Ser. I, Math. 328, No.1 (1999), 51-56.

[9] V. Tarasov et A. Varchenko, Geometry of q-hypergeometric functions, quantum affine algebras and elliptic quantum groups, *Astérisque*, **246** (1997), Soc. Math. de France.

[10] C. Zhang, Développements asymptotiques q-Gevrey et séries Gq-sommables, *Ann. Inst. Fourier*, **49-1** (1999), 227-261.

Département et Laboratoire de Mathématiques
Pôle Sciences et Technologie, Université de La Rochelle
Avenue Michel Crépeau, F-17000 La Rochelle

e-mail : czhang@univ-lr.fr

(Printemps 1999, La Rochelle ; petites modifications en juillet 2000)

Sur les fonctions q-Bessel de Jackson*

Résumé. La transformation de Laplace permet de résoudre des équations différentielles au voisinage d'un point singulier irrégulier. Le but de l'article est d'étudier comment appliquer une transformation de Borel-Laplace basique, aux équations aux q-différences satisfaites par les fonctions q-Bessel de F.H. Jackson. Des matrices de connexion sont obtenues entre des solutions à l'origine et des solutions à l'infini.

Summary (About Jackson q-Bessel functions). Laplace transform allows to resolve differential equations in the neighborhood of an irregular singular point. The purpose of the article is to study how to apply a basic Borel-Laplace transformation to q-difference equations satisfied by the q-Bessel functions of F.H. Jackson. Connection matrices are obtained between solutions at the origin and solutions at infinity.

0. Position du problème.

En 1847, E. Heine a introduit le q-analogue ${}_2\phi_1(a,b;c;q,x)$ de la série hypergéométrique ${}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;x)$ d'Euler-Gauss par la formule

$$ {}_2\phi_1(a,b;c;q,x)=\sum_{n\geq 0}\frac{(a;q)_n(b;q)_n}{(q;q)_n(c;q)_n}x^n, $$

où q désigne un élément de l'intervalle $]0,1[$, a, b, c désignent des nombres complexes tels que $c\notin q^{-\mathbb{N}}$, et où l'on note, pour tous $z\in\mathbb{C}$ et $n\in\mathbb{N}$:

$$ (z;q)_0=1,\quad (z;q)_{n+1}=(1-z)(1-zq)\dots(1-zq^n). $$

On s'aperçoit aussitôt que si $|x|<1$, alors

$$ \lim_{q\to 1^-}{}_2\phi_1(q^\alpha,q^\beta;q^\gamma;q,x)={}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;x) $$

pourvu que γ ne soit pas un entier négatif ou nul.

Soient $\mathcal{D}_q$, σ_q les opérateurs aux q-différences définis respectivement par les formules

$$ \mathcal{D}_qf(x)=\frac{f(x)-f(qx)}{(1-q)x},\qquad \sigma_qf(x)=f(qx). $$

On peut vérifier que la fonction $u(x)={}_2\phi_1(a,b;c;q,x)$ satisfait à l'équation aux q-différences

$$ (0.1)\quad x(c-abx)\mathcal{D}_q^2u+\left[\frac{1-c}{1-q}+\frac{(1-a)(1-b)-(1-abq)}{1-q}x\right]\mathcal{D}_qu-\frac{(1-a)(1-b)}{(1-q)^2}u=0, $$

* Les principaux résultats de cet article ont été présentés à la conférence "Special Functions 2000: Current Perspective and Future Directions", du 29 mai au 9 juin, Tempe, Arizona State University, USA.

Keywords and Subject Classification. q-Bessel function, Connection matrix, Jacobi's theta function, q-Borel-Laplace transform. 33C10, 33D15, 39A13, 44A10.

laquelle est une équation aux q-différences *fuchsienne* sur la sphère de Riemman $\mathbf{P}(\mathbb{C})$. En utilisant une intégrale Barnes-Mellin, G.N. Watson a établi, en 1910, une formule permettant de lier ${}_2\phi_1(a,b;c;q,x)$ à des solutions à l'infini de l'équation (0.1) :

$$\begin{aligned}{}_2\phi_1(a,b;c;q,x) = C_1(x){}_2\phi_1(a,aq/c;aq/b;q,cq/abx)\\ + C_2(x){}_2\phi_1(b,bq/c;bq/a;q,cq/abx)\end{aligned} \tag{0.2}$$

où

$$C_1(x) = \frac{(b,c/a;q)_\infty (ax,q/ax;q)_\infty}{(c,b/a;q)_\infty (x,q/x;q)_\infty}, \quad C_2(x) = \frac{(a,c/b;q)_\infty (bx,q/bx;q)_\infty}{(c,a/b;q)_\infty (x,q/x;q)_\infty}.$$

Ici, on considère le prolongement analytique de la fonction ${}_2\phi_1(a,b;c;q,x)$ dans le secteur ouvert défini par $|\arg(-x)| < \pi$ et on suppose que les paramètres a, b, c vérifient les hypothèses suivantes :

$$a,\ b \neq 0; \qquad c,\ a/b \notin q^{\mathbb{Z}}.$$

Dans (0.2), on a posé, pour tous z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$:

$$(z_1,z_2;q)_\infty = (z_1;q)_\infty (z_2;q)_\infty, \qquad (z_j;q)_\infty = \prod_{n\geq 0}(1-z_j q^n).$$

Il importe de noter que $C_j(qx) = C_j(x)$, $j = 1$, 2, ce qui signifie que les $C_j(x)$ sont des *fonctions q-périodiques*. On peut dire que la formule (0.2) est un q-analogue d'une formule de connexion classique pour la fonction ${}_2F_1(\alpha;\beta;\gamma;x)$ ou, plus exactement, pour l'équation hypergéométrique d'Euler-Gauss associée ; pour plus de détails, voir [GR] page 106 et [Sa] page 116.

Dans le présent article, nous nous proposons d'établir une formule similaire à (0.2) mais cette fois pour la fonction ${}_2\phi_1(0,0;c;x)$ avec $c \neq 0$, cette dernière étant liée à une version q-analogue de l'équation différentielle hypergéométrique de Bessel. En fait, F.H. Jackson a introduit (*cf* [GR] page 25, [Is]), en 1905, deux versions q-analogues pour la famille des fonctions de Bessel J_ν, $\nu \in \mathbb{R} \setminus \{-1,-2,-3,...\}$, dont l'une est la suivante :

$$J_\nu^{(1)}(x;q) = \frac{(q^{\nu+1};q)_\infty}{(q;q)_\infty}\ \left(\frac{x}{2}\right)^\nu\ {}_2\phi_1(0,0;q^{\nu+1};q,-\frac{x^2}{4});$$

la définition de l'autre analogue $J_\nu^{(2)}(x;q)$ sera rappelée au §3 de notre article.

Soit $p = \sqrt{q}$; on a la relation

$$(x\mathcal{D}_p - \frac{1-p^\nu}{1-p})\ (x\mathcal{D}_p - \frac{1-p^{-\nu}}{1-p})J_\nu^{(1)}(x;q) + (\frac{x}{2(1-p)})^2 J_\nu^{(1)}(x;q) = 0,$$

qui n'est rien d'autre qu'une version discrète de l'équation différentielle

$$(x\frac{d}{dx} - \nu)\ (x\frac{d}{dx} + \nu)y + x^2 y = 0,$$

dont la fonction limite $\lim_{q\to 1^-} J_\nu^{(1)}(x(1-q);q)$ est solution. Par ailleurs, l'équation précédente satisfaite par $y(x) = J_\nu^{(1)}(x;q)$ peut se mettre sous la forme ($p = \sqrt{q}$)

$$\{\sigma_q - (q^{\nu/2} + q^{-\nu/2})\sigma_p + (1 + \frac{x^2}{4})\}y(x) = 0, \tag{0.3}$$

laquelle indique que le point à l'origine est un point singulier fucshien et celui à l'infini un point singulier irrégulier (*cf* [Ad], [Zh] (a)).

Dans la suite, nous supposerons que ν **est un nombre réel fixé tel que** $\nu \notin \mathbb{Z}$. Vu que l'équation (0,3) se laisse invariante par la symétrie $\nu \to -\nu$, le couple de fonctions $(J_\nu^{(1)}(x;q), J_{-\nu}^{(1)}(x;q))$ constitue un *système fondamental de solutions* de l'équation au point à l'origine. Le reste de notre article a pour objectif initial d'établir la formule de connexion entre ce système de solutions et *le* système de solutions à l'infini, tout en sachant que deux systèmes fondamentaux de solutions d'une même équation aux q-différences linéaire peuvent être connectés par une matrice composée de *fonctions q-périodiques* ; voir les coefficients $C_j(x)$ de (0.2) ci-dessus.

Décrivons brièvement le contenu de la suite de notre article. Dans les §1 et §2, nous appliquerons une transformation de Borel-Laplace q-analogue à l'équation q-Bessel (0.3) près du point à l'infini et nous obtiendrons un système fondamental de solutions au voisinage de l'infini ; le résultat central est le théorème (1.4) et celui-ci donnera immédiatement la formule de connexion voulue, exprimée dans le théorème (2.1). Dans §3, la seconde famille des fonctions q-Bessel $J_\nu^{(2)}(x;q)$ sera considérée comme transformée de q-Borel-Laplace de la famille $J_\nu^{(1)}(x;q)$; le résultat principal de ce paragraphe est la formule (3.7). Le paragraphe 4 sera consacré à la détermination de $J_\nu^{(2)}(x;q)$ en des points "entiers". Dans le dernier paragraphe, nous ferons quelques commentaires sur des sujets connexes à ce présent travail : localisation des zéros de $J_\nu^{(2)}(x;q)$, fonctions trigonométriques q-analogues, groupe de Galois q-différentiel, phénomène de Stokes associé aux équations différentielles de Bessel, *etc.*

1. Résoudre l'équation (0.3) à l'aide d'une transformation de q-Borel-Laplace.

Posons $t = 1/x$ and $y(x) = z(t)$; l'équation (0.3) s'écrit sous la forme

$$\big\{\sigma_q^{-1} - (q^{\nu/2} + q^{-\nu/2})\sigma_p^{-1} + (1 + \frac{1}{4t^2})\big\} z(t) = 0;$$

on en déduit celle-ci :

$$\big\{(1 + \frac{1}{4q^2t^2})\sigma_q - (q^{\nu/2} + q^{-\nu/2})\sigma_p + 1\big\} z(t) = 0, \tag{1.1}$$

où $t = 0$ est un point singulier irrégulier. Nous allons chercher des solutions s'écrivant comme produit d'une *fonction q-exponentielle* (modifiée) par une série entière en t.

Utilisons la fonction thêta de Jacobi comme fonction q-exponentielle et posons

$$\theta_p(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} p^{n(n-1)/2} t^n \ \left(= \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{n(n-1)/4} t^n \ \right).$$

La série $\theta_p(t)$ définit une fonction analytique sur $\mathbb{C}^*$ et dont $-p^{\mathbb{Z}}$ $(= \{-p^m : m \in \mathbb{Z}\})$ est l'ensemble des zéros ; en outre, elle vérifie la relation fonctionnelle $t\theta_p(pt) = \theta_p(t)$.

Si l'on pose, pour tout $\alpha \in \mathbb{C}^*$:

$$\mathcal{E}_\alpha(t) = \frac{1}{\theta_p(-\alpha t)} \qquad \forall\ t \notin \frac{1}{\alpha} p^{\mathbb{Z}},$$

on définit une fonction méromorphes sur $\mathbb{C}^*$ et ayant $\frac{1}{\alpha}p^{\mathbb{Z}}$ pour ensemble des pôles ; compte tenu de la relation $t\theta_p(pt) = \theta_p(t)$, on obtient

$$\sigma_p\mathcal{E}_\alpha(t) = -\alpha t\ \mathcal{E}_\alpha(t), \quad \sigma_q\mathcal{E}_\alpha(t) = \alpha^2\sqrt{q}\, t^2\ \mathcal{E}_\alpha(t).$$

Choisissons α de manière d'avoir $\alpha^2\sqrt{q}\,\frac{1}{4q^2} = -1$, *i.e* $\alpha = 2q^{3/4}i$ ou $\alpha = -2q^{3/4}i$; substituant $z(t) = \mathcal{E}_\alpha(t)f(t)$ dans l'équation (1.1), on parvient à l'équation

$$\big\{-(1+4q^2t^2)\sigma_q + \alpha\,(q^{\nu/2}+q^{-\nu/2})\,t\,\sigma_p + 1\big\}f(t) = 0, \tag{1.2}$$

laquelle admet des séries entières en t pour solution.

Considérons $f_\alpha(t) = \sum_{n\geq 0} a_n t^n$ la série entière solution de (1.2) et telle que $a_0 = 1$; posons $g_\alpha(\tau)$ la série définie par

$$g_\alpha(\tau) = \mathcal{B}_{p;1}f_\alpha(\tau) := \sum_{n\geq 0} a_n\, p^{-n(n-1)/2}\,\tau^n$$

laquelle correspond formellement, dans la terminologie employée dans [Zh] (a) et (c), à la transformée de "p-Borel" d'ordre un de f_α (mais ici $0 < p < 1$!). De la relation

$$\mathcal{B}_{p;1}(t^m\sigma_p^\ell) = p^{-m(m-1)/2}\tau^m\sigma_p^{\ell-m}\mathcal{B}_{p;1} \qquad \forall \ell,\ m\in\mathbb{N},$$

on déduit que g_α satisfait à l'équation

$$g_\alpha(q\tau) = (1+\alpha\,(q^{\nu/2}+q^{-\nu/2})\,\tau - 4q^{3/2}\,\tau^2)g(\tau).$$

Puisque $\alpha^2 = -4q^{3/2}$ et $0 < q < 1$, par itération on obtient :

$$g_\alpha(\tau) = \frac{1}{(-\alpha\,q^{\nu/2}\,\tau;q)_\infty(-\alpha\,q^{-\nu/2}\,\tau;q)_\infty}; \tag{1.3}$$

d'où la fonction g_α est méromorphe sur $\mathbb{C}$ et admet

$$\{-\frac{q^{\nu/2-n}}{\alpha}, -\frac{q^{-\nu/2-n}}{\alpha} : n\in\mathbb{N}\}$$

pour pôles, simples. Par conséquent, f_α *est une fonction entière.*

(1.4) Théorème. *Conservant les notations et hypothèses ci-dessus, on a :*

$$f_\alpha(t) = \frac{\theta_p(-\alpha q^{\nu/2}t)}{(q,q^{-\nu};q)_\infty}\ {}_2\phi_1(0,0;q^{\nu+1};q,-\frac{x^2}{4}) + \frac{\theta_p(-\alpha q^{-\nu/2}t)}{(q,q^{\nu};q)_\infty}\ {}_2\phi_1(0,0;q^{-\nu+1};q,-\frac{x^2}{4})$$

où $xt = 1$ *et* $|x| < 2$.

Preuve – D'après la définition de g_α, la fonction f_α peut être vue comme le produit de Hadamard de g_α avec la fonction θ_p ; par la formule de Cauchy et le théorème des résidus on trouve :

$$\begin{aligned} f_\alpha(t) =& \frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=r} g_\alpha(\tau)\,\theta_p(\frac{t}{\tau})\frac{d\tau}{\tau} \\ \overset{(*)}{=}& -\sum_{n\geq 0}\mathrm{Res}\,\{\,g_\alpha(\tau)\theta_p(\frac{t}{\tau})\frac{1}{\tau} : \tau = -\frac{q^{\nu/2-n}}{\alpha}\} \\ & \qquad -\sum_{n\geq 0}\mathrm{Res}\,\{\,g_\alpha(\tau)\theta_p(\frac{t}{\tau})\frac{1}{\tau} : \tau = -\frac{q^{-\nu/2-n}}{\alpha}\}, \end{aligned}$$

où $0 < r < r_0 := \max\{q^{\nu/2}/|\alpha|, q^{-\nu/2}/|\alpha|\}$. Le passage $(*)$ peut être justifié de la manière suivante : à chaque entier naturel N on associe dans le plan des τ le cercle $\mathcal{C}_N$, positivement orienté et ayant $|\tau| = q^{-N-1/2}r_0$ pour équation ; on applique ensuite le théorème des résidus à l'intégrale de contour

$$\frac{1}{2\pi i}\ \Big(\int_{\mathcal{C}_N} - \int_{|\tau|=r}\Big)\ g_\alpha(\tau)\,\theta_p(\frac{t}{\tau})\frac{d\tau}{\tau};$$

avec un résultat établi dans [Li] (*cf* [Zh] (a) Lemme 4.3.7), on minore sur les cercles $\mathcal{C}_N$ la fonction entière d'ordre zéro $\tau \mapsto 1/g_\alpha(\tau)$, ce qui implique que la limte de l'intégrale précédente effectuée sur ces celcles, quand N augmente indéfiniment, vaut zéro pourvu que le module de $|t|$ soit suffisamment grand.

On complète la preuve par des calculs des résidus, avec les formules suivantes ($n \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{C}^*$) :

$$\begin{aligned}
&\theta_p(p^n t) = p^{-n(n-1)/2}t^{-n}\theta_p(t),\\
&\mathrm{Res}\Big\{\,\frac{1}{(\tau/\lambda;q)_\infty}\,\frac{1}{\tau} : \tau = \lambda q^{-n}\Big\} = \frac{(-1)^{n+1}q^{n(n+1)/2}}{(q;q)_\infty(q;q)_n},\\
&\frac{1}{(\lambda q^{-n};q)_n} = \frac{(-\lambda)^{-n}q^{n(n+1)/2}}{(\lambda;q)_\infty(q/\lambda;q)_n} \qquad (\lambda \notin q^{\mathbb{Z}}) \qquad \square
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Dans le théorème précédent, $f_\alpha(-t) = f_{-\alpha}(t)$; en outre, on établit aisément le

(1.6) Corollaire. *On a :*

$${}_2\phi_1(0,0;q^{\nu+1};q,-\frac{x^2}{4}) = \frac{(q,q^{-\nu};q)_\infty\ \big(\theta_p(-\alpha q^{-\nu/2}t)f_\alpha(t) - \theta_p(\alpha q^{-\nu/2}t)f_\alpha(-t)\big)}{\theta_p(-\alpha q^{\nu/2}t)\ \theta_p(\alpha q^{-\nu/2}t) - \theta_p(\alpha q^{\nu/2}t)\ \theta_p(-\alpha q^{-\nu/2}t)}$$

où $xt = 1$ *et* $0 < |x| < 2$ $\square$

2. Formule de connexion pour l'équation (0.3).

Les fonctions $J_\nu^{(1)}(x;q)$, $J_{-\nu}^{(1)}(x;q)$ introduites par F.H. Jackson contituent une base de solution en $x = 0$ pour l'équation (0.3). En vu d'obtenir des formules de connexion exprimées au moyen de fonctions p-périodiques et uniformes (donc, *p-elliptiques*), nous nous proposons de considérer les fonctions $J_{\nu,\lambda}^{(1)}$, $J_{-\nu,\lambda}^{(1)}$ définies ci-dessous : posons, pour tout nombre compelxe non nul λ :

$$J_{\nu,\lambda}^{(1)}(x;q) = \frac{(q^{\nu+1};q)_\infty}{(q;q)_\infty}\ \frac{\theta_p(\lambda q^{\nu/2}/x)}{\theta_p(\lambda/x)}\ {}_2\phi_1(0,0;q^{\nu+1};q,-\frac{x^2}{4}),$$

la définition de $J_{-\nu,\lambda}^{(1)}$ étant similaire (changer ν par $-\nu$). Puisque $t\theta_p(pt) = \theta_p(t)$, la fonction $x \mapsto \frac{\theta_p(\lambda q^{\nu/2}/x)}{\theta_p(\lambda/x)}$ satisfait à la même équation aux q-différences que $x \mapsto x^\nu$; on en déduit que, étant donné un nombre complexe non nul λ, le couple $(J_{\nu,\lambda}^{(1)}(x;q), J_{-\nu,\lambda(x;q)}^{(1)})$ constitue, pour l'équation (0.3), un système fondamental de solutions méromorphes dans le disque pointé $0 < |x| < 2$.

Soient les fonctions $f_\alpha(t)$ ($\alpha = \pm 2q^{3/4}i$) étudiées dans le paragraphe précédent, dépendant du paramètre ν ; posons

$$j^{(1)}_{\nu,\alpha}(t;q) = \frac{(q^{1/2}, q^{1/2}; q)_\infty}{\theta_p(-\alpha t)}\ f_\alpha(t);$$

on a les “symétries”

$$j^{(1)}_{-\nu,\alpha}(t;q) = j^{(1)}_{\nu,\alpha}(t;q) = j^{(1)}_{\nu,-\alpha}(-t;q);$$

par ailleurs, on fait remarquer que les fonctions $j^{(1)}_{\nu,\alpha}(t;q)$, $j^{(1)}_{\nu,-\alpha}(t;q)$ forment un système de solutions méromorphes dans le plan $\mathbb{C}^*$.

Posons enfin :

$$C_{\nu,\alpha}(\lambda, t; q) = \frac{(q^{1/2}, q^{1/2}; q)_\infty\ \theta_p(-\alpha q^{\nu/2} t)\ \theta_p(\lambda t)}{(q^{1+\nu}, q^{-\nu}; q)_\infty\ \theta_p(-\alpha t)\ \theta_p(\lambda q^{\nu/2} t)};$$

ceci définit une famille de fonctions p-elliptiques en t, c'est à dire :

$$C_{\nu,\alpha}(\lambda, te^{2\pi i}; q) = C_{\nu,\alpha}(\lambda, t; q), \qquad C_{\nu,\alpha}(\lambda, pt; q) = C_{\nu,\alpha}(\lambda, t; q).$$

(2.1) Théorème (**Formule de connexion**). *On a :*

$$\begin{pmatrix} j^{(1)}_{\nu,\alpha}(t;q) \\ \\ j^{(1)}_{\nu,-\alpha}(t;q) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{\nu,\alpha}(\lambda,t;q) & C_{-\nu,\alpha}(\lambda,t;q) \\ \\ C_{\nu,-\alpha}(\lambda,t;q) & C_{-\nu,-\alpha}(\lambda,t;q) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J^{(1)}_{\nu,\lambda}(x;q) \\ \\ J^{(1)}_{-\nu,\lambda}(x;q) \end{pmatrix}$$

où $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $xt = 1$ *et* $0 < |x| < 2$.

Preuve – Ceci n'est qu'une réécriture du théorème (1.4). □

Discutons maintenant du cas limite, quand q tend vers 1, de la formule de connexion (2.1) où l'on substituera x par $(1-q)x$ et t par $t/(1-q)$ respectivement ; pour ceci, on a besoin notamment de connaître du comportement asymptotique de la fonction $\theta_q(x)$ ($= \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{n(n-1)/2} x^n$) pour q infiniment proche de 1. Notons d'abord l'équation fonctionnelle

$$\theta_q(\sqrt{q}\ x) = \sqrt{-2\pi/\ln q}\ \ e^{-\frac{1}{2\ln q}(\log x)^2}\ \theta_{q^*}(\sqrt{q^*}\ x^*), \tag{2.2}$$

où l'on utilise la transformation $(q, x) \mapsto (q^*, x^*)$ définie par

$$q^* = e^{4\pi^2/\ln q}, \quad x^* = e^{-\frac{2\pi i}{\ln q}\log x},$$

log désignant la détermination principale du logarithme sur la surface de Riemann de celui-ci notée $\tilde{\mathbb{C}}^*$. En posant, pour tous $q \in]0,1[$ et $x \in \tilde{\mathbb{C}}^*$:

$$T_q(x) = (-\ln q/(2\pi))^{1/4}\ e^{(\log x)^2/(4\ln q)}\ \theta_q(\sqrt{q}\ x),$$

on constate aussitôt que (2.2) équivaut à la suivante :

$$T_q(x) = T_{q^*}(x^*),$$

laquelle peut être obtenue, comme grand classique, avec la formule sommatoire de Poisson (*cf* [La] page 244, [Sa] page 69). Remarquons en passant que (2.2) représente une formule de connexion entre *les deux solutions types* – qui sont $\theta_q(\sqrt{q}\ x)$ et $e^{-(\log x)^2/(2\ln q)}$ – de la même équation aux q-différences $\sqrt{q}\ xy(qx) = y(x)$, la fonction $x \mapsto \theta_{q^*}(\sqrt{q^*}\ x^*)$ étant en fait *q-périodique* ; cette dernière remarque guiderait une piste de retrouver la formule (2.2), avec des idées exploitées dans §5 de [Zh] (b).

A l'aide de la formule (2.2) (où $q^* \to 0$ si $q \to 1$) et/ou la formule du binôme basique, on peut établir la

(2.3) Proposition ([Sa] pages 71 et 74 ; [GR] page 9). *Soient γ, β deux nombres complexes non nuls et soit* log *la détermination principale du logarithme dans le plan coupé $\mathbb{C}\backslash]-\infty, 0]$. On a les assertions suivantes.*

(i) Pour tout $x \in \mathbb{C}\backslash]-\infty, 0]$, on a :

$$\lim_{q\to 1^-} \frac{\theta_q(q^\gamma/x)}{\theta_q(q^\beta/x)} = x^{\gamma-\beta} \equiv e^{(\gamma-\beta)\log x};$$

(ii) Pour tout $x \in \mathbb{C} \setminus [1, +\infty[$, on a :

$$\lim_{q\to 1^-} \frac{(q^\gamma x; q)_\infty}{(x; q)_\infty} = (1-x)^{-\gamma} \equiv e^{-\gamma \log(1-x)} \quad \square$$

Comme cas limite du résultat (ii) ci-dessus, on a la limite suivante de la fonction q-Gamma de Jackson (*cf* [As]) :

$$\lim_{q\to 1^-} \frac{(q^{\gamma+1}; q)_\infty}{(q; q)_\infty} (1-q)^\gamma = \frac{1}{\Gamma(\gamma+1)}, \tag{2.4}$$

laquelle implique la limite

$$\lim_{q\to 1^-} \frac{(q^{1/2}, q^{1/2}; q)_\infty}{(q^{\nu+1}, q^{-\nu}; q)_\infty} = \frac{\Gamma(\nu+1)\ \Gamma(-\nu)}{\Gamma(1/2)\ \Gamma(1/2)} = -\frac{1}{\sin(\nu\pi)}. \tag{2.5}$$

Avec la formule (2.2), on établit la version suivante de la proposition (2.3) :

$$\begin{aligned} &\lim_{q\to 1^-} \frac{\theta_q(q^\gamma/((1-q)x))}{\theta_q(q^\beta/((1-q)x))} (1-q)^{\beta-\gamma} \\ &= \lim_{q\to 1^-} \frac{(-q^\gamma/((1-q)x); q)_\infty}{(-q^\beta/((1-q)x); q)_\infty} (1-q)^{\beta-\gamma} = x^{\gamma-\beta} \end{aligned} \tag{2.6}$$

pour tout $x \in \mathbb{C}\backslash]-\infty, 0]$.

Revenons à la formule de connexion énoncée dans le théorème (2.1), substituons x par $(1-q)x$ et t par $t/(1-q)$ respectivement ; pour alléger l'exposé, **fixons** $\alpha = 2q^{3/4}i$ et considérons seulement le cas où $\lambda = \alpha = 2q^{3/4}i$.

Quand $q \to 1$, on a $p \to 1$ et $1-q \approx 2(1-p)$; avec (2.6) ou (2.2), on trouve $(x = 1/t)$:

$$\lim_{q\to 1^-} \frac{\theta_p(-\alpha q^{\nu/2} t/(1-q))}{\theta_p(-\alpha t/(1-q))}\,(1-q)^{-\nu} = \big(\frac{ix}{2}\big)^{\nu} \quad \text{si } \arg(ix) \in]-\pi,\pi[,$$
$$\lim_{q\to 1^-} \frac{\theta_p(\alpha t/(1-q))}{\theta_p(\alpha q^{\nu/2} t/(1-q))}\,(1-q)^{\nu} = \big(-\frac{ix}{2}\big)^{-\nu} \quad \text{si } \arg(-ix) \in]-\pi,\pi[.$$

On en déduit que, si la partie réelle de x est non nulle, alors

$$\lim_{q\to 1^-} \frac{\theta_p(-\alpha q^{\nu/2} t/(1-q))\,\theta_p(\alpha t/(1-q))}{\theta_p(-\alpha t/(1-q))\,\theta_p(\alpha q^{\nu/2} t/(1-q))} = e^{\nu\pi i};$$

en utilisant (2.5), on obtient

$$\lim_{q\to 1^-} C_{\nu,\alpha}(\alpha, t/(1-q); q) = -\frac{e^{\nu\pi i}}{\sin(\nu\pi)}$$

pour tout nombre complexe x de partie réelle non nulle.

Dans la même ligne de raisonnement, en combinant cette fois (2.4) et (2.6), on trouvera que pour tout $x \in \tilde{\mathbb{C}}^*$ tel que $\arg x \in]-\pi/2, 3\pi/2[$, on a :

$$\lim_{q\to 1^-} J^{(1)}_{\nu,\alpha}((1-q)x; q) = e^{-\nu\pi i/2} J_\nu(x),$$

où l'on désigne par $J_\nu(x)$ la fonction de Bessel d'indice ν définie par

$$J_\nu(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\,\big(\frac{x}{2}\big)^{\nu}\,{}_0F_1(—; \nu+1; -\frac{x^2}{4}).$$

En conclusion, on a établi le résultat qui suit.

(2.7) Théorème. *Dans le théorème (2.1), fixons $\lambda = \alpha = 2q^{3/4} i$ et supposons $x \in \tilde{\mathbb{C}}^*$ vérifiant* $\arg x \in]-\pi/2, \pi/2[\cup]\pi/2, 3\pi/2[$ *; on a $(t = 1/x)$:*

$$\lim_{q\to 1^-} \begin{pmatrix} j^{(1)}_{\nu,\alpha}(t/(1-q); q) \\ \\ j^{(1)}_{\nu,-\alpha}(t/(1-q); q) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{e^{\nu\pi i/2}}{\sin(\nu\pi)} & \frac{e^{-\nu\pi i/2}}{\sin(\nu\pi)} \\ \\ e^{-\nu\pi i/2} & e^{\nu\pi i/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_\nu(x) \\ \\ J_{-\nu}(x) \end{pmatrix} \qquad \square$$

Dans ce dernier théorème, la matrice limite a pour déterminant $\cot(\pi\nu)$; les limites, quand $q \to 1$, de $j^{(1)}_{\nu,\alpha}(t/(1-q); q)$ et $j^{(1)}_{\nu,-\alpha}(t/(1-q); q)$ sont alors deux fonctions proportionnelles si $\nu = 1/2$ modulo $\mathbb{Z}$.

3. Les fonctions q-Bessel $J^{(2)}_\nu(x; q)$ vues comme transformées de q-Borel-Laplace de $J^{(1)}_\nu(x; q)$.

Une seconde famille de fonctions q-Bessel introduite par F.H. Jackson est la suivante :

$$J_\nu^{(2)}(x;q) = \frac{(q^{\nu+1};q)_\infty}{(q;q)_\infty}\ \left(\frac{x}{2}\right)^\nu\ {}_0\phi_1(-;q^{\nu+1};q,-\frac{x^2q^{\nu+1}}{4}),$$

où $x \in \tilde{\mathbb{C}}^*$ et où la série hypergéométrique basique ${}_0\phi_1(...)$, de rayon de convergence infini, est définie par

$${}_0\phi_1(-;c;q,x) = \sum_{n\geq 0} \frac{q^{n(n-1)}}{(q;q)_n(c;q)_n}\ x^n \quad (c \notin q^{-\mathbb{N}}).$$

Par un calcul directe, on peut vérifier que la fonction $J_\nu^{(2)}(x;q)$ est solution de l'équation aux q-différences ([Is])

$$\big\{(1+q\frac{x^2}{4})\sigma_q - (q^{\nu/2}+q^{-\nu/2})\sigma_p + 1\big\}y(x) = 0, \tag{3.1}$$

pour laquelle $J_{-\nu}^{(2)}(x;q)$ est aussi solution.

D'après W. Hahn (*cf* [GR] page 25), on a la relation

$$J_\nu^{(2)}(x;q) = (-x^2/4;q)_\infty\ J_\nu^{(1)}(x;q), \quad |x|<2; \tag{3.2}$$

celle-ci équivaut à dire que la transformation $y \to (-x^2/4;q)_\infty\ y$ permet de passer de l'équation (0.3), satisfaite par $J_\nu^{(1)}(x;q)$, à l'équation (3.1) de $J_\nu^{(2)}(x;q)$. Par ailleurs, avec (3.2) on obtient que

$$\lim_{q\to 1^-} J_\nu^{(2)}((1-q)x;q) = \lim_{q\to 1^-} J_\nu^{(1)}((1-q)x;q).$$

Un point de vue adopté dans ce paragraphe consiste de regarder les fonctions $J_\nu^{(2)}(x;q)$ comme transformées de q-Borel-Laplace de $J_\nu^{(2)}(x;q)$. Comme dans [Zh] (a), appelons *transformation de p-Laplace d'ordre un* (ou de q-Laplace d'ordre 1/2) l'automorphisme $\mathcal{L}_{p;1}$ de l'espace $\mathbb{C}$-vectoriel $\mathbb{C}[[x]]$ qui envoie tout monôme x^n en $p^{n(n-1)/2}x^n$. On a :

$$\mathcal{L}_{p;1}\ {}_2\phi_1(0,0;q^{\nu+1};q,-\frac{x^2}{4}) = {}_0\phi_1(-;q^{\nu+1};q,-\frac{x^2q^{1/2}}{4}), \tag{3.3}$$

ce qui implique, avec (3.2), la relation

$${}_0\phi_1(-;q^{\nu+1};q,-\frac{x^2q^{1/2}}{4}) = \mathcal{L}_{p;1}\ \left(\frac{{}_0\phi_1(-;q^{\nu+1};q,-x^2q^{\nu+1}/4)}{(-x^2/4;q)_\infty}\right). \tag{3.4}$$

Pour abréger, notons

$$\phi_\nu(x) = {}_0\phi_1(-;q^{\nu+1};q,-\frac{x^2}{4});$$

c'est une fonction entière qui admet à l'infini une croissance du type $O(e^{-\frac{1}{2\ln p}((\ln|x|)^2-4\ln 2)})$.

D'une façon tout à fait analogue à ce que l'on a fait dans la preuve du théorème (1.4), on déduit de la relation (3.4) les égalités suivantes :

$$(3.5)\quad \begin{aligned}\phi_\nu(\sqrt{p}\ x) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=r} \frac{\phi_\nu(p^{\nu+1}\xi)}{(-\xi^2/4;q)_\infty}\ \theta_p(\frac{x}{\xi})\ \frac{d\xi}{\xi}\\ &\overset{(*)}{=} -\sum_{n\geq 0} \mathrm{Res}\ \Big(\frac{\phi_\nu(p^{n+1}\xi)}{(i\xi/2;p)_\infty\ (-i\xi/2;p)_\infty}\ \theta_p(\frac{x}{\xi})\ \frac{1}{\xi} : \xi = \pm 2ip^{-n}\Big)\\ &\overset{(**)}{=} \frac{1}{2\ (q;q)_\infty}\ \Big(\theta_p(-\frac{ix}{2})\ \sum_{n\geq 0}\frac{p^{n(n+1)/2}}{(q;q)_n}\ \phi_\nu(2ip^{\nu+1-n})\ (-\frac{2pi}{x})^n\\ &\qquad + \theta_p(\frac{ix}{2})\ \sum_{n\geq 0}\frac{p^{n(n+1)/2}}{(q;q)_n}\ \phi_\nu(-2ip^{\nu+1-n})\ (\frac{2pi}{x})^n\Big)\ .\end{aligned}$$

Ici, le rayon r est choisi plus petit que 2 ; l'égalité (*) résulte du théorème des résidus car, pour tout (paramètre) x de module assez grand, l'intégrand est une fonction du type $O(|\xi|^{-2})$ quand $|\xi| = 2p^{-n+1/2} \to \infty$ (un argument du à Littlewood) ; et l'on obtient le passage (**) en réactualisant les formules (1.5).

Puisque la fonction $x \mapsto \phi_\nu(x)$ est paire, on a, dans (3.5), $\phi_\nu(2ip^{\nu+1-n}) = \phi_\nu(-2ip^{\nu+1-n})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si $n = 0$, on a :

$$\phi_\nu(2ip^{\nu+1}) = \sum_{n\geq 0} \frac{q^{n(n-1)}}{(q,q^{\nu+1};q)_n}\ q^{(\nu+1)n} = \frac{1}{(q^{\nu+1};q)_\infty},$$

d'après la formule (1.5.1) de [GR], page 10 (avec $c = q^{\nu+1}$, a et b tendant vers l'infini).

(3.6) Proposition. *Pour tout entier n positif ou nul, on a :*

$$(q^{\nu+1};q)_\infty\ \phi_\nu(2ip^{\nu+1-n})\ p^{-\nu n} = (q^{-\nu+1};q)_\infty\ \phi_{-\nu}(2ip^{-\nu+1-n})\ p^{\nu n}.$$

Ce résultat sera obtenu comme une conséquence du théorème (1.4) ; pour ne pas couper la "file de conduite" suivie, nous nous contenterions de mettre la preuve en début du paragraphe suivant (§4).

Cela étant, posons $t = 1/x$ et associons, à chaque $\alpha \in \{2q^{3/4}i, -2q^{3/4}i\}$ (**ces α étant déjà choisis dans §1 !**), la série entière de t :

$$h_\alpha(t) = (q^{\nu+1};q)_\infty \sum_{n\geq 0} \frac{p^{n(n-1)/2}}{(q;q)_n}\ \phi_\nu(2ip^{\nu+1-n})\ p^{-\nu n}\ (\alpha t)^n,$$

dont 1/2 est le rayon de convergence et qui vaut 1 en $t = 0$. Il importe de noter que, d'après la proposition (3.6), la série $h_\alpha(t)$ se laisse invariante par l'involution $\nu \leftrightarrow -\nu$ (penser à la fonction f_α définie dans le paragraphe 1).

En vertu de (3.5) et de la relation $\theta_p(px) = \theta_p(1/x)$, on obtient :

$$(3.7)\qquad \phi_\nu(p^{\nu+1}x) = \frac{1}{2\ (q,q^{\nu+1};q)_\infty}\ \big(\theta_p(-\alpha p^{-\nu-1}t)\ h_\alpha(t) + \theta_p(\alpha p^{-\nu-1}t)\ h_\alpha(-t)\big)\ ;$$

autrement dit, on a :

$$J_\nu^{(2)}(x;q) = \frac{1}{2\,(q,q;q)_\infty}\,\left(\frac{x}{2}\right)^\nu\,\left(\theta_p(-\alpha p^{-\nu-1}t)\,h_\alpha(t) + \theta_p(\alpha p^{-\nu-1}t)\,h_\alpha(-t)\right)\,.$$

Introduisons les versions "uniformes" $J_{\nu,\lambda}^{(2)}(x;q)$ des fonctions $J_\nu^{(2)}(x;q)$ où λ est un paramètre complexe non nul :

$$J_{\nu,\lambda}^{(2)}(x;q) = \frac{(q^{\nu+1};q)_\infty}{(q;q)_\infty}\,\frac{\theta_p(\lambda q^{\nu/2}/x)}{\theta_p(\lambda/x)}\,{}_0\phi_1(—;q^{\nu+1};q,-\frac{x^2q^{\nu+1}}{4}).$$

Posons enfin :

$$j_{\nu,\alpha}^{(2)}(t;q) = \frac{\theta_p(-\alpha p^{-1}t)}{(q,q;q)_\infty}\,h_\alpha(t),\quad |t| < 1/2.$$

(3.8) Théorème (**Formule de connexion**). *Pour tout nombre complexe non nul λ, on a :*

$$\begin{pmatrix} J_{\nu,\lambda}^{(2)}(x;q) \\ \\ J_{-\nu,\lambda}^{(2)}(x;q) \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} D_{\nu,\alpha}(\lambda,t;q) & D_{\nu,-\alpha}(\lambda,t;q) \\ \\ D_{-\nu,\alpha}(\lambda,t;q) & D_{-\nu,-\alpha}(\lambda,t;q) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} j_{\nu,\alpha}^{(2)}(t;q) \\ \\ j_{\nu,-\alpha}^{(2)}(t;q) \end{pmatrix}$$

où $\alpha \in \{2p^{3/2}i, -2p^{3/2}i\}$, $xt = 1$, $|x| > 2$ et où l'on pose :

$$D_{\nu,\alpha}(\lambda,t;q) = \frac{\theta_p(-\alpha p^{-\nu-1}t)\,\theta_p(\lambda p^\nu t)}{\theta_p(-\alpha p^{-1}t)\,\theta_p(\lambda t)}.$$

De plus, les $(J_{\nu,\lambda}^{(2)}(x;q), J_{-\nu,\lambda}^{(2)}(x;q))$ et $(j_{\nu,\alpha}^{(2)}(t;q), j_{\nu,-\alpha}^{(2)}(t;q))$ constituent deux systèmes de solutions méromorphes sur $\mathbb{C}^*$ pour l'équation (3.1), et la matrice composée des fonctions $t \mapsto D_{\pm\nu,\pm\alpha}(\lambda,t;q)$ est p-elliptique.

Preuve – Avec (3.7), on obtient immédiatement la matrice de connexion énoncée, qui est clairement p-elliptique ; en plus, $(J_{\nu,\lambda}^{(2)}(x;q), J_{-\nu,\lambda}^{(2)}(x;q))$ est un système de solutions pour (3.1), il en est alors de même pour $(j_{\nu,\alpha}^{(2)}(t;q), j_{\nu,-\alpha}^{(2)}(t;q))$. □

Comme dans §3, on pourrait étudier, quand q tend vers 1, l'évolution de la matrice de connexion formée des fonctions $D_{\pm\nu,\pm\alpha}(\lambda, t/(1-q);q)$.

4. Les valeurs de ${}_0\phi_1(—;q^{\nu+1};q,-x^2/4)$ en des points "entiers".

Démontrons d'abord la proposition (3.6) ; pour ceci, on va appliquer au théorème (1.4) le

(4.1) Lemme. *Soit λ un nombre complexe différent de zéro, x, t deux indéterminées telles que $xt = 1$, et soit $w(x)$ une série entière de rayon de convergence non nul. Si l'on développe la fonction produit $\theta_p(\lambda t)\,w(x)$ en une série de Laurent de t, on a :*

$$\theta_p(\lambda t)w(x) = \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \lambda^\ell p^{\ell(\ell-1)/2}\,\left(\mathcal{L}_{p;1}w(p^\ell\lambda)\right)\,t^\ell,$$

où $\mathcal{L}_{p;1}w(p^\ell\lambda)$ désigne la valeur prise au point $x = p^\ell\lambda$ par la transformée de p-Laplace d'ordre un de la série $w(x)$.

Preuve – Cela découle d'un calcul directe. $\square$

Compte tenu du lemme précédent et de la formule (3.3), le théorème (1.4) équivaut à dire que, si l'on pose $f_\alpha(t) = \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} f_{\alpha,\ell}t^\ell$, alors

$$\begin{aligned} f_{\alpha,\ell} =& \frac{p^{\ell(\ell-1)/2}}{(q,q^{-\nu};q)_\infty}\ {}_0\phi_1(—;q^{\nu+1};q,q^{\ell+2+\nu})\ (-\alpha q^{\nu/2})^\ell \\ &+ \frac{p^{\ell(\ell-1)/2}}{(q,q^{\nu};q)_\infty}\ {}_0\phi_1(—;q^{-\nu+1};q,q^{\ell+2-\nu})\ (-\alpha q^{-\nu/2})^\ell. \end{aligned}$$

Puisque $f_{\alpha,-n-1} = 0$ pour tout entier n positif ou nul, on obtient ainsi la proposition (3.6).

En développant g_α au moyen de la formule du binôme basique ([GR] page 9, formule (1.3.15)), on trouvera les coefficients $f_{\alpha,n}$ de f_α comme suit :

$$f_{\alpha,n} = p^{n(n-1)/2}\ (-\alpha)^n \sum_{\ell=0}^{n} \frac{q^{(-\nu\ell+\nu(n-\ell))/2}}{(q;q)_\ell\ (q;q)_{n-\ell}} \qquad \forall n \in \mathbb{N}; \tag{4.2}$$

on en déduit l'identité : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \frac{q^{n\nu/2}}{(q^{-\nu};q)_\infty}\ {}_0\phi_1(—;q^{\nu+1};q,q^{\nu+n+2}) + \frac{q^{-n\nu/2}}{(q^{\nu};q)_\infty}\ {}_0\phi_1(—;q^{-\nu+1};q,q^{-\nu+n+2}) \\ = \sum_{\ell=0}^{n} \frac{q^{(-\nu\ell+\nu(n-\ell))/2}}{(q;q)_\ell\ (q;q)_{n-\ell}} \end{aligned}$$

ou, compte tenu de la relation (3.2) :

$$\begin{aligned} \frac{q^{n\nu/2}}{(q^{-\nu};q)_\infty}\ {}_2\phi_1(0,0;q^{\nu+1};q,q^{n+1}) + \frac{q^{-n\nu/2}}{(q^{\nu};q)_\infty}\ {}_2\phi_1(0,0;q^{-\nu+1};q,q^{n+1}) \\ = \sum_{\ell=0}^{n} \frac{(q;q)_n}{(q;q)_\ell\ (q;q)_{n-\ell}}\ q^{(-\nu\ell+\nu(n-\ell))/2}. \end{aligned}$$

Des expressions, relativement lourdes, de ${}_2\phi_1(0,0;q^{k+1};q,q^{n+1})$ et ${}_0\phi_1(—;q^{k+1};q,q^{k+n+2})$ ($k \in \mathbb{N}$) pourraient être déduites par passage à la limite dans les deux dernières identités ci-dessus, avec $\nu = k + \varepsilon$, $\varepsilon \to 0$.

Le théorème (3.8) affirme que $\theta_p(-\alpha p^{-1}t)h_\alpha(t)$ est solution de l'équation (3.1). Soit $y(x) = \theta_p(-\alpha p^{-1}t)z(t)$; l'équation (3.1) se transforme en celle-ci :

$$\bigl\{\sigma_q + \alpha(q^{\nu/2} + q^{-\nu/2})t\sigma_p - (1 + 4qt^2)\bigr\}z(t) = 0$$

(ici $\sigma_p z(t) = z(pt)$, $\sigma_q z(t) = z(qt)$). Si l'on pose $\eta_\alpha(t) = \mathcal{L}_{p;1}h_\alpha(t)$, on obtient :

$$\bigl\{(1 + \alpha(q^{\nu/2} + q^{-\nu/2})t - 4q^{3/2}t^2)\sigma_q - 1\bigr\}\eta_\alpha(t) = 0, \tag{4.3}$$

où l'on a utilisé les relations opérationnelles

$$\mathcal{L}_{p;1}\sigma_p = \sigma_p \mathcal{L}_{p;1}, \quad \mathcal{L}_{p;1}(t\sigma_p) = t\sigma_q \mathcal{L}_{p;1}, \quad \mathcal{L}_{p;1}(t^2) = pt^2 \sigma_q \mathcal{L}_{p;1}.$$

Par itération, la relation (4.3) ci-dessus donne :

$$\eta_\alpha(t) = (-\alpha q^{\nu/2} t; q)_\infty \; (-\alpha q^{-\nu/2} t; q)_\infty,$$

ce qui permet d'écrire, avec la formule du binôme basique ([GR] page 9, formule (1.3.16)) :

$$\eta_\alpha(t) = \sum_{n\geq 0} q^{n(n-1)/2} (\alpha t)^n \sum_{\ell=0}^{n} \frac{q^{(\nu\ell - \nu(n-\ell))/2}}{(q;q)_\ell \; (q;q)_{n-\ell}}.$$

En revenant à la définition de la série entière $h_\alpha(t)$, on obtient :

$${}_0\phi_1(-;q^{\nu+1};q;q^{\nu+1-n}) = \frac{(q;q)_n}{(q^{\nu+1};q)_\infty} \sum_{\ell=0}^{n} \frac{q^{(n-\ell)(\nu-\ell)}}{(q;q)_\ell \; (q;q)_{n-\ell}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

En conclusion, on a démontré le

(4.4) Théorème. *Si $c \notin q^{-\mathbb{N}}$, alors on a pour tout entier n positif ou nul :*

$${}_0\phi_1(-;c;q,c/q^n) = \frac{1}{(c;q)_\infty} \sum_{\ell=0}^{n} q^{\ell(\ell-1)} \begin{bmatrix} n \\ \ell \end{bmatrix}_q \big(c/q^n\big)^\ell,$$

où $\begin{bmatrix} n \\ \ell \end{bmatrix}_q = \dfrac{(q;q)_n}{(q;q)_\ell \; (q;q)_{n-\ell}}$. □

Il est à noter que ce dernier résultat peut aussi être obtenu à partir d'une formule générale de S. Ramanujan (*cf* [ABBW] page 9, Entry 9).

5. Commentaires.

Il est bien connu que la transformation de Laplace joue un rôle important dans l'analyse de la singularité d'une équation différentielle analytique ainsi que dans la théorie des fonctions spéciales. Nous avons examiné ([Zh] (a), (c)) durant ces dernières années, des possibilités de faire adapter cette transformation à l'étude locale d'une singularité d'une équation aux q-différences ; la version adoptée dans le présent article est introduite dans la Note [Zh] (c). Nous allons terminer l'article par quelques commentaires sur les résultats obtenus ci-dessus.

(5.1) La formule (3.7), valable pour tout paramètre ν n'appartenant pas à l'ensemble des entiers strictement négatifs, est une version q-analogue du développement asymptotique suivant (*cf* [In] page 173) :

$$J_\nu(x) \sim \big(\frac{2}{\pi x}\big)^{1/2} \big(U_\nu \cos(x - \nu\pi/2 - \pi/4) + V_\nu \sin(x - \nu\pi/2 - \pi/4)\big)$$

où U, V sont deux séries entières, divergentes, de $1/x$. Les “grands zéros” ξ de $J_\nu(x)$ sont approximativement donnés par la simple relation trigonométrique

$$\cot(\xi - \nu\pi/2 - \pi/4) = 0.$$

De façon similaire, les “grands zéros” ξ de $J_\nu^{(2)}(x;q)$ sont voisins des grandes racines de l'équation “elliptique”

$$\theta_p(-\alpha p^{-\nu-1}\xi) + \theta_p(\alpha p^{-\nu-1}\xi) = 0;$$

ceci fournit une explication à des résultats de M.E.H. Ismail [Is].

(5.2) Dans le théorème (2.1), les fonctions $j_{\nu,\alpha}^{(1)}(t/(1-q);q)$ converge sur des secteurs quand q tend vers 1. Ecrivons

$$j_{\nu,\alpha}^{(1)}(t/(1-q);q) = E(x;q)\ A(t;q)\ \hat{f}(t;q)$$

avec $x = 1/t$, $\theta_p(u) = (p;p)_\infty\ (-u;p)_\infty\ (-p/u;p)_\infty$ et

$$\begin{aligned} E(x;q) &= \frac{(q^{1/2}, q^{1/2}; q)_\infty}{(p, p^{3/2}(1-q)x/\alpha; p)_\infty}\ (1-q)^{-1/2}, \\ A(t;q) &= \frac{\theta_p(-\alpha p^{-1/2}t/(1-q))}{\theta_p(-\alpha t/(1-q))}\ (1-q)^{1/2}, \\ \hat{f}(t;q) &= \frac{1}{(\alpha p^{1/2}t/(1-q);p)_\infty}\ f_\alpha(t/(1-q)); \end{aligned}$$

au moyen des arguments développés au §2, on obtiendra que

$$\lim_{q\to 1^-} E(x;q) = \frac{e^{\pm xi}}{\Gamma(1/2)}, \quad \lim_{q\to 1^-} A(t;q) = \big(\pm\frac{2}{ix}\big)^{1/2},$$

où l'on utilise le signe “+” si $\alpha = 2q^{3/4}i$, et “$-$” sinon. Il en résulte que la fonction analytique somme de la série entière $\hat{f}(t;q)$ converge pour $q \to 1$. Connaissant la formule explicite (4.2) pour les coefficients de f_α, il serait possible de prouver que les séries $\hat{f}(t;q)$, ayant q pour paramètre, convergent terme à terme vers une série entière divergente. Peut-t-on en déduire une explication sur le phénomène de Stokes associé à la famille des équations différentielles de Bessel ?

(5.3) Dans la famille des fonctions q-Bessel $J_\nu^{(k)}(x;q)$ ($k = 1,\ 2$), il y a notamment les versions q-analogues de $\sin x$ et $\cos x$, introduites par F.H. Jackson (*cf* [GR] page 23) ; ces dernières correspondent aux cas où $\nu = -1/2,\ 1/2$. Par exemple, on a :

$$\cos_p(x) = {}_2\phi_1(0,0;q^{1/2};q,-x^2),$$

et le corollaire (1.6) impliquera :

$$\cos_p(x) = -\frac{(q,p;q)_\infty}{2}\Big(\frac{f_\alpha(t/2)}{\theta_p(\alpha t p^{-1/2}/2)} + \frac{f_\alpha(-t/2)}{\theta_p(-\alpha t p^{-1/2}/2)}\Big).$$

Nous avons supposé $\nu \notin \mathbb{Z}$. Comme on vient de faire remarquer dans (5.1), cette hypothèse restrictive peut être remplacée dans une bonne partie de §3, par $\nu \notin -\mathbb{N}^*$. En ce qui concerne le théorème (1.4), si ν était un entier non strictement négatif, on aurait à la place de ${}_2\phi_1(0, 0; q^{-\nu+1}; q, -x^2/4)$ une partie q-logarithmique ; ceci résulte du fait que l'on aurait à appliquer le théorème des résidus à une fonction ayant des pôles doubles (voir le dernier paragraphe de [Zh] (c)). Une autre façon de traiter le cas de ν entier non négatif consisterait à poser, dans (1.4), $\nu = k + \varepsilon$ ($k \in \mathbb{N}$) puis à passer à la limite avec $\varepsilon \to 0$.

(5.4) La formule de connexion (0.2), rappelée au début de l'article et due à G.N. Watson, concerne la famille des séries hypergéométriques basiques ${}_2\phi_1(a, b; c; q, x)$, mais elle ne reste valable que si $ab \neq 0$. Nous ne savons pas s'il existe une manière de voir nos formules (1.4) et (3.7) comme cas "dégénérés" de (0.2). Dans cette direction, y a-t-il des formules similaires pour les séries ${}_2\phi_1(a, b; c; q, x)$ avec $a = 0$ mais $bc \neq 0$?

La connaissance de la matrice de connexion à la Birkhoff permet de classifier les équations aux q-différences linéaires fuchsiennes sur $\mathbf{P}(\mathbb{C})$; en plus, elle sert à décrire leur groupe de Galois associé. Pour ces matières, voir [Bi], [Et], [Sa]. On en connaît peu d'énoncés dans le cas non fuchsien.

Nota. Je tiens à remercier les professeurs Mourad E.H. Ismail et Jean-Pierre Ramis pour le témoignage de leurs intérêt et encouragement.

Références

[ABBW] C. Adiga, B.C. Berdt, S. Bhargava et G.N. Watson, Chapter 16 of Ramanujan's second notebook: Theta-functions and q-series, *Mem. A. M. S.* 315, 1-85 (1985).

[Ad] C.R. Adams, Linear q-Difference Equations, *Bull. A. M. S.* 37, 361-382 (1931).

[As] R. Askey, The q-gamma and q-beta functions, *Appl. Anal.* 8 , 125-141 (1978).

[Bi] G.D. Birkhoff, The Generalized Riemann Problem for Linear Differential Equations and the Allied Problems for Linear Difference and q-Difference Equations, *Proc. Am. Acad.* 49, 521-568 (1913).

[Et] P.I. Etingof, Galois groups and connection matrices of q-difference equations, *Electronic Research Announcements of A. M. S.* 1, 1-9 (1995).

[GR] G. Gasper et M. Rahman, *Basic hypergeometric series*, Encycl. Math. Appl., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.

[In] E.L. Ince, *Ordinary differential equations*, Dover publications, Inc., 1956.

[Is] M.E.H. Ismail, The zeros of basic Bessel functions, the functions $J_{(\nu+ax)}(x)$, and associated orthogonal polynomials, *J. Math. Anal. Appl.* 86, 1-19 (1982).

[La] S. Lang, *Real and Functional Analysis*, Third Edition, Springer-Verlag New-York, Inc. 1993.

[Li] J.E. Littlewood, On the asymptotic approximation to integral functions of zero order, *Proc. London Math. Soc.*, Serie 2, no 5, 361-410 (1907).

[Ra] J.P. Ramis, About the growth of entire functions solutions of linear algebraic q-difference equations, *Annales de la Fac. de Toulouse*, Série 6, Vol. I, no 1, 53-94 (1992).

[Sa] J. Sauloy, Théorie de Galois des équations aux q-différences fuchsiennes, *Thèse de Toulouse*, 1999.

[Zh] C. Zhang, (a) Développements asymptotiques q-Gevrey et séries Gq-sommables, *Ann. Inst. Fourier*, 49, no 1, 227-261 (1999) ; (b) Sur la fonction q-Gamma de Jackson, *Aequationes Mathematicae*, à paraître ; (c) Transformations de q-Borel-Laplace au moyen de la fonction thêta de Jacobi, *C. R. Acad. Sci. Paris*, à paraître (2000).

Changgui ZHANG (czhang@univ-lr.fr)

Département et Laboratoire de Mathématiques

Pôle Sciences, Université de La Rochelle

Avenue M. Crépeau

F-17042 La Rochelle cédex

La Rochelle, Juin 2000

Remarques sur les développements asymptotiques *

Résumé – Etant donnée une fonction analytique complexe bornée sur un secteur et admettant un développement asymptotique dans une direction du secteur, on démontre que le domaine de validité du développement asymptotique s'étend à tout le secteur. On considère d'une part l'asymptotique au sens de Poincaré et d'autre part celle au sens Gevrey. Dans ce dernier cas, on précise le type dans les estimations Gevrey. On compare aussi la fonction à certaines transformées de Laplace tronquées de la transfomée de Borel de son développement. Le travail est fait en détails pour le cas Gevrey d'ordre 1. On décrit ensuite les modifications à apporter dans le cas Gevrey d'ordre k quelconque. L'article termine sur un résultat analogue concernant les développements q-Gevrey.

Abstract – Consider a complex function analytic and bounded on some sector and suppose that this function has an asymptotic expansion in one direction of the sector. Then it is proven that the asymptotics remains valid on the whole sector. Both asymptotics in the Poincaré sense and in the Gevrey sense are considered. In the later case, explicit Gevrey estimates are given. The function is also compared with some truncated Laplace transforms of the Borel transform of its expansion. The proofs are given in details for the case Gevrey of order 1. Modifications for the general case of Gevrey of order k are outlined. The article ends with a q-analog of the main result.

1. Introduction.

Soit $\tilde{\mathbb{C}}^*$ la surface de Riemann de la fonction logarithme et Log la détermination principale du logarithme. On a $\mathrm{Log} x = \ln|x| + i \arg x$ pour tout $x \in \tilde{\mathbb{C}}^*$. Etant donnés ρ, α, β des nombres réels tels que $\rho > 0$ et $\alpha < \beta$, on note $S(\alpha, \beta; \rho)$ le secteur ouvert $S(\alpha, \beta; \rho) := \{x \in \tilde{\mathbb{C}}^* : 0 < |x| < \rho, \arg x \in]\alpha, \beta[\}$. Un élément θ de l'intervalle $]\alpha, \beta[$ s'appellera *direction de* $S(\alpha, \beta; \rho)$.

Etant donnés $\hat{f} := \sum_{n \geq 0} a_n x^n \in \mathbb{C}[[x]]$ une série entière et $N \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel, on note $\hat{f}_N$ la somme partielle d'ordre $(N-1)$ de $\hat{f}$, *i.e* $\hat{f}_N = \sum_{n=0}^{N-1} a_n x^n$.

Soit $S := S(\alpha, \beta; \rho)$ un secteur, θ une direction de S et f une fonction analytique dans S. Par définition, on dira que f possède $\hat{f}$ pour *développement asymptotique dans la direction* θ si, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in S$ avec $\arg x = \theta$, on a

$$|f(x) - \hat{f}_N(x)| < C_N |x|^N,$$

* Ecrit en collaboration avec Augustin Fruchard, l'article est publié dans *Ann. Fac. Sci. Toulouse*, Série 6, Vol. VIII Fasc. 1 (1999), p. 91–116.

Mots-clés: Asymptotique Gevrey, transformée de Borel-Laplace, formule de Cauchy-Heine, asymptotique q-Gevrey.

Classification AMS: 40G10, 41A60, 30E15, 30E20.

C_N étant une constante > 0 dépendant de N. Si, de plus, les constantes C_N peuvent être choisies telles que $C_N = CA^N N!$ avec des constantes C, $A > 0$ indépendantes de N, on dira que f possède $\hat{f}$ pour *développement asymptotique Gevrey d'ordre 1 dans la direction* θ. Dans ce cas, $R > 0$ étant donné, si pour tout $\delta > 0$ la constante A précédente peut être choisie égale à $\frac{1}{R} + \delta$, on dira que la fonction f possède $\hat{f}$ pour *développement asymptotique Gevrey d'ordre 1 et de type* R dans la direction θ.

Les définitions ci-dessus sont issues de l'asymptotique réelle et adaptées à $\mathbb{C}$. Habituellement en analyse asymptotique complexe on considère plutôt des développements asymptotiques sur des secteurs ouverts (*cf* [7] Chap. III et [3]). L'objectif de cet article est d'établir un lien entre ces deux asymptotiques. Notre résultat principal est le théorème suivant.

Théorème 1. *Soit f une fonction analytique et bornée sur un secteur ouvert $S := S(\alpha, \beta; \rho)$ avec $\alpha < \beta$ et $\rho > 0$.*

(1) S'il existe une direction de S dans laquelle la fonction f admet $\hat{f}$ pour développement asymptotique, alors $\hat{f}$ est un développement asymptotique de f sur le secteur S tout entier.

(2) On a le même énoncé dans le cas d'un développement asymptotique Gevrey d'ordre 1.

Plus précisément, si f possède $\hat{f}$ pour développement asymptotique Gevrey d'ordre 1 et de type $R(\theta_0)$ dans une direction $\theta_0 \in]\alpha, \beta[$, alors dans toute direction θ de S, f possède $\hat{f}$ pour développement asymptotique Gevrey d'ordre 1 et de type $R(\theta)$, où $R(\theta)$ est défini de la façon suivante. En posant $\alpha' = \min(\theta_0, \alpha + \pi/2)$ et $\beta' = \max(\theta_0, \beta - \pi/2)$, on a $R(\theta) = R(\theta_0)\frac{\sin(\theta-\alpha)}{\sin(\alpha'-\alpha)}$ si $\theta \in]\alpha, \alpha']$, $R(\theta) = R(\theta_0)$ si $\theta \in [\alpha', \beta']$ et $R(\theta) = R(\theta_0)\frac{\sin(\theta-\beta)}{\sin(\beta'-\beta)}$ si $\theta \in [\beta', \beta]$.

Graphiquement, l'application $]\alpha, \beta[\to \mathbb{C}$, $\theta \mapsto R(\theta)e^{i\theta}$ admet pour courbe représentative la réunion de trois arcs de cercles, l'un centré en 0 et de rayon $R(\theta_0)$, le deuxième passant par les points 0 et $R(\theta_0)e^{i\alpha'}$ et tangent à la direction α, et le troisième défini de même en remplaçant α et α' par β et β'.

Figure 1 – Représentation du type $R(\theta)$ en fonction de l'angle $\theta \in]\alpha, \beta[$ que satisfait le développement asymptotique d'une fonction f supposée bornée dans un secteur $S(\alpha, \beta; \rho)$ et admettant un développement asymptotique Gevrey d'ordre 1 et de type $R(\theta_0)$ dans une direction $\theta_0 \in]\alpha, \beta[$.

Avant de continuer, nous voudrions faire le lien avec ce qui existe déjà sur ce sujet. Considérons par exemple une fonction f bornée sur un secteur d'ouverture inférieure à π et possédant un développement asymptotique $\hat{f}$ Gevrey-1 de type R aux deux bords du secteur. Alors dans ce cas les résultats classiques permettent d'en déduire aisément que f

admet le même développement asymptotique $\hat{f}$ Gevrey-1 sur tout le secteur. En effet, les coefficients du développement lui-même satisfont des estimations Gevrey-1 de type R, donc la transformée de Borel de $\hat{f}$ définit une fonction φ analytique dans le disque de centre 0 et de rayon R. La transformée de Laplace tronquée $\mathcal{L}_a\varphi$ de φ le long d'un segment $[0,a]$ médian au secteur (avec $|a| < R$ arbitraire) satisfait des estimations Gevrey dans tout le secteur. Il s'ensuit que la différence $f - \mathcal{L}_a\varphi$ est exponentiellement petite aux deux bords du secteur (d'après la formule de Stirling) donc dans tout le secteur (d'après le théorème de Phragmén-Lindelöf) ce qui prouve que f admet $\hat{f}$ comme développement asymptotique Gevrey-1 dans tout le secteur (en utilisant de nouveau Stirling).

La nouveauté ici est d'une part que l'on suppose que le développement asymptotique Gevrey-1 n'est donné que dans une direction du secteur, et d'autre part nous précisons le type, et nous obtenons un type optimal en un certain sens (voir la remarque (3) du paragraphe 5) contrairement à celui qui découlerait du raisonnement précédent. Par ailleurs, nous obtenons des résultats plus précis concernant le domaine d'analyticité de la transformée de Borel φ et la comparaison de f avec certaines transformées de Laplace (voir la proposition 9).

Remarque. On peut remplacer l'hypothèse *bornée* par celle d'*asymptotiquement bornée* dans le sens suivant. Une fonction analytique sur un secteur $S := S(\alpha,\beta;\rho)$ est dite asymptotiquement bornée sur S si elle est bornée sur tout sous-secteur propre de S, $S' = S(\alpha',\beta';\rho')$, $\alpha < \alpha' < \beta' < \beta$, $0 < \rho' < \rho$. Le théorème 1 montre qu'il est équivalent de posséder un développement asymptotique (resp. Gevrey d'ordre 1) sur un secteur ou d'être asymptotiquement borné sur le secteur et de posséder un développement asymptotique (resp. Gevrey d'ordre 1) dans une direction du secteur.

Plan de la suite de l'article – Dans le paragraphe 2, on présente quelques résultats auxillaires, dont certains confirment le théorème 1 dans le cas des développements asymptotiques nuls. On rappelle ensuite deux résultats sur la transformée de Borel-Laplace, l'un concernant le calcul du type d'asymptoticité de la transformée de Laplace incomplète et l'autre portant sur le domaine de validité de la transformée de Borel d'une famille de fonctions exponentiellement proches. La preuve, ainsi qu'une généralisation du théorème 1, seront données dans le paragraphe 4 ; voir le théorème 10. Après quelques remarques générales, on donne les modifications à apporter pour le cas Gevrey d'ordre k général. Enfin, on donne un énoncé analogue à notre résultat principal concernant les développements q-Gevrey.

2. Le cas des développements asymptotiques nuls.

La notation $S(\alpha,\beta;\rho)$ a été introduite au début de l'article. Pour des raisons de commodité, on considérera souvent des secteurs de rayon $\rho = 1$, qu'on notera $S(\alpha,\beta)$. On note $\bar{S}(\alpha,\beta)$ le secteur fermé correspondant $\{x \in \tilde{\mathbb{C}}^* : 0 < |x| \leq 1, \arg x \in [\alpha,\beta]\}$. On désigne par $\mathcal{H}_b(\alpha,\beta)$ l'ensemble des fonctions continues et bornées sur le secteur fermé $\bar{S}(\alpha,\beta)$ et analytiques sur $S(\alpha,\beta)$.

Nous utiliserons à plusieurs reprises le théorème de Phragmén-Lindelöf (*cf* [5], p.177) sous la forme suivante.

Soit f une fonction analytique dans un secteur $S = S(\alpha,\beta;\rho)$, continue et bornée par M sur $\partial S \setminus \{0\}$. On suppose de plus :

$$\exists K, L > 0,\ \exists a < \frac{\beta - \alpha}{\pi},\ \forall x \in S,\quad |f(x)| < K\exp(\frac{L}{|x|^a})\ .$$

Alors f est bornée par M dans tout le secteur S.

Citons également la conséquence suivante (*cf* [5], p.179) :

Etant donnée $f \in \mathcal{H}_b(\alpha,\beta)$, si $f(x)$ admet une limite pour x tendant vers zéro sur chacune des directions α et β, alors les deux limites sont égales. De plus, f converge uniformément vers la même limite lorsque x tend vers zéro dans $S(\alpha,\beta)$.

Nous présentons un résultat similaire dans le lemme suivant. On suppose ici que la fonction est bornée sur le secteur et tend vers 0 dans une direction du secteur. Quitte à considérer séparément les deux sous-secteurs bordés par cette direction, on peut supposer qu'il s'agit d'un bord du secteur. Bien que ce résultat semble classique, nous ne l'avons pas rencontré explicitement dans la littérature. On trouvera des résultats et des techniques de démonstration analogues chez Titchmarsh **[5]**, Chapitre V.

Lemme 2. *Soit $f \in \mathcal{H}_b(\alpha,\beta)$. On suppose qu'il existe $C \geq 1$, $\lambda \geq 0$ tels que, pour tout $x \in S(\alpha,\beta)$ on ait $|f(x)| \leq 1$ et pour tout $x \in \bar{S}(\alpha,\beta)$ avec $\arg x = \alpha$, on ait*

$$|f(x)| \leq C|x|^{\lambda}.$$

Alors, pour tout $x \in \bar{S}(\alpha,\beta)$, en notant $\theta = \arg x$, on a

$$|f(x)| \leq C^{\frac{\beta-\theta}{\beta-\alpha}}|x|^{\frac{\beta-\theta}{\beta-\alpha}\lambda}.$$

Preuve – On considère la fonction g définie et continue sur le secteur $\bar{S}(\alpha,\beta)$ et analytique sur $S(\alpha,\beta)$, donnée par

$$g(x) = \exp(ia(\mathrm{Log}x)^2/2 + (b+ic)\mathrm{Log}x)f(x)\ ,$$

avec

$$a = -\frac{\lambda}{\beta-\alpha}, \qquad b = -\frac{\lambda\beta}{\beta-\alpha}, \qquad c = -\frac{\ln C}{\beta-\alpha}.$$

On a

$$|g(x)| = |x|^{-a\arg x+b}e^{-c\arg x}|f(x)| = |x|^{\frac{\theta-\beta}{\beta-\alpha}\lambda}C^{\frac{\theta}{\beta-\alpha}}|f(x)|,$$

avec $\theta = \arg x$. Ceci montre que la fonction g admet une *croissance sous-exponentielle* lorsque x tend vers 0 dans $S(\alpha,\beta)$. De plus, on vérifie aisément l'estimation suivante, pour tout $x \in \partial S(\alpha,\beta)(:= \bar{S}(\alpha,\beta) \setminus S(\alpha,\beta))$:

$$|g(x)| \leq C^{\frac{\beta}{\beta-\alpha}}.$$

Nous appliquons finalement le théorème de Phragmén-Lindelöf à la fonction g, ce qui termine la preuve du lemme. □

En ce qui concerne le développement asymptotique nul au sens de Poincaré, on déduit du lemme 2 la proposition suivante.

Proposition 3. *Soit f une fonction analytique et bornée sur un secteur ouvert $S(\alpha, \beta; \rho)$ avec $\alpha < \beta$ et $\rho > 0$. Si f admet le développement asymptotique nul dans une direction $\theta_0 \in]\alpha, \beta[$, alors elle admet le développement asymptotique nul sur le secteur $S(\alpha, \beta; \rho)$ tout entier.* $\square$

Une fonction admettant le développement asymptotique nul est traditionnellement appelée *fonction plate*. On sait également (*cf* [6] pp 7-8) que f admet le développement asymptotique nul Gevrey d'ordre 1 et de type $R > 0$ dans une direction θ_0 si, et seulement si, lorsque x tend vers 0 sur la direction θ_0, pour tout $\delta > 0$ on a

$$|f(x)| = O(e^{-\frac{R-\delta}{|x|}}).$$

Dans ce cas, f sera appelée *fonction exponentiellement plate (d'ordre 1) de type R dans la direction θ_0* ou simplement *fonction exponentiellement plate dans la direction θ_0* lorsqu'on ne précise pas le type correspondant. Par convention (et non par extension), une fonction exponentiellement plate de *type* $R = 0$ signifiera que la fonction est bornée. Le résultat suivant est classique. Il est souvent présenté comme une variante du théorème de Phragmén-Lindelöf.

Lemme 4. *Soit $f \in \mathcal{H}_b(\alpha, \beta)$. On suppose que $\beta - \alpha < \pi$ et que f est exponentiellement plate de type $R(\alpha) > 0$ (resp. $R(\beta) \geq 0$) dans la direction α (resp. β). Alors, dans toute direction $\theta \in [\alpha, \beta[$, f est exponentiellement plate de type $R(\theta)$ donné par*

$$R(\theta) = \frac{R(\beta)\sin(\theta - \alpha) - R(\alpha)\sin(\theta - \beta)}{\sin(\beta - \alpha)}.$$

Preuve – Appliquer le théorème de Phragmén-Lindelöf à la fonction $f_a : x \mapsto f(x)e^{a/x}$, où $a \in \mathbb{C}$ est tel que $[0, a]$ est un diamètre de $\mathcal{C}$. $\square$

Remarque. Si $R(\beta) > 0$, la courbe $\gamma :]\alpha, \beta[\to \mathbb{C}$, $\theta \mapsto R(\theta)e^{i\theta}$ représente ici le cercle $\mathcal{C}$ circonscrit aux points 0, $R(\alpha)e^{i\alpha}$ et $R(\beta)e^{i\beta}$. Si $R(\beta) = 0$ (f est supposée seulement bornée dans la direction β), c'est le cercle tangent en 0 à la direction β et passant par le point d'affixe $R(\alpha)e^{i\alpha}$.

Nous proposons à présent une amélioration du lemme de Watson (*cf* [2] p. 14). Ce lemme est le suivant.

Soit $f \in \mathcal{H}_b(\alpha, \beta)$. Si $\beta - \alpha \geq \pi$ et si f est exponentiellement plate dans les directions α et β, alors f est identiquement nulle.

Grâce au lemme 4 précédent, on obtient le résultat suivant.

Lemme 5. *Soit $f \in \mathcal{H}_b(\alpha, \beta)$. On suppose que $\beta - \alpha \geq \pi$ et que f est exponentiellement plate dans la direction α. Alors f est identiquement nulle.*

Preuve – Il suffit de traiter le cas où $\beta - \alpha = \pi$. Quitte à effectuer une rotation de la variable x, on peut supposer que $\alpha = -\pi/2$ et $\beta = \pi/2$. Puisque f est exponentiellement plate de type $R > 0$ dans la direction α, d'après le lemme 4 appliqué à la fonction f sur le secteur $\bar{S}(-\pi/2, 0)$ (ici $R(0) = 0$) on obtient que, dans toute direction comprise entre $-\pi/2$ et $-\pi/4$, f est exponentiellement plate de type $R/\sqrt{2}$. On vérifie que la fonction $f(x)e^{-(1+i)R/(2x)}$ satisfait les conditions du lemme de Watson sur $\bar{S}(-\pi/2, \pi/2)$ et on en déduit que f est identiquement nulle. $\square$

En combinant les lemmes 4 et 5, on en déduit la proposition suivante.

Proposition 6. *Soit f une fonction analytique et bornée sur un secteur ouvert $S(\alpha, \beta; \rho)$ avec $\alpha < \beta$ et $\rho > 0$. On suppose que f admet le développement asymptotique nul Gevrey d'ordre 1 et de type $R > 0$ dans une direction $\theta_0 \in]\alpha, \beta[$. Alors :*

(1) si $\beta - \alpha > \pi$, f est identiquement nulle ;

(2) si $\beta - \alpha \leq \pi$, dans chaque direction $\theta \in]\alpha, \theta_0]$ (resp. $\theta \in [\theta_0, \beta[$) la fonction f admet le développement asymptotique nul Gevrey d'ordre 1 et de type $R(\theta)$ avec

$$R(\theta) = R\frac{\sin(\theta - \alpha)}{\sin(\theta_0 - \alpha)} \quad (resp.\ \ R\frac{\sin(\theta - \beta)}{\sin(\theta_0 - \beta)}). \qquad \square$$

On a ainsi démontré dans le cas des développements asymptotiques nuls le théorème 1 annoncé dans l'introduction. Au moyen des théorèmes de Borel-Ritt (-Gevrey), on va ramener le cas d'un développement asymptotique (Gevrey) quelconque au cas qu'on vient de traiter. Pour le théorème de Borel-Ritt classique, voir Wasow [7] theorem 9.3 p.43. Dans le paragraphe suivant, nous allons étudier la transformée de Borel-Laplace, laquelle permet d'établir le théorème de Borel-Ritt dans le cas Gevrey (*cf* [6], pp 10-12 ; voir aussi [4] pp. 200-201).

3. Sur la transformation de Borel-Laplace.

Soit $R > 0$. On considère une *série entière* $\hat{f} := \sum_{n\geq 0} a_n x^{n+1}$ *supposée être Gevrey d'ordre 1 et de type* R, c'est-à-dire telle que, pour tout $\delta > 0$, il existe $C_\delta > 0$ tel que $|a_n| < C_\delta(\frac{1}{R} + \delta)^n n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $R_\delta := \frac{R}{1+\delta R}$. La série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n!} t^n$, appelée *transformée de Borel formelle de* $\hat{f}$ et notée $\hat{\mathcal{B}}\hat{f}$, converge dans tout disque $D(0; R_\delta)$ de centre 0 et de rayon R_δ, donc converge dans le *disque de Borel* $D(0; R)$. On note φ la somme de cette série. Soit $z \in D(0; R)$ arbitrairement fixé. Pour tout $x \in \tilde{\mathbb{C}}^*$, on pose

$$\mathcal{L}_z\varphi(x) := \int_0^z \varphi(t) e^{-t/x} dt,$$

laquelle s'appelle *transformée de Laplace tronquée à z de φ.*

Lemme 7 (Théorème de Borel-Ritt-Gevrey)**.** *Soit $R > 0$ et $z \in D(0; R)$. On considère $\hat{f} = \sum_{n\geq 0} a_n z^{n+1}$ une série entière Gevrey d'ordre 1 et de type R. La fonction $f := \mathcal{L}_z\varphi$ définie ci-dessus possède $\hat{f}$ pour développement asymptotique Gevrey d'ordre 1 sur $S := S(\arg z - \frac{\pi}{2}; \arg z + \frac{\pi}{2})$. De plus, dans toute direction θ de S, le type $R(\theta)$ de ce développement est donnée par $R(\theta) = |z| \cos(\theta - \arg z)$.*

Preuve – Nous donnons ici une preuve faite dans [6], pp 10-12. Quitte à effectuer une rotation de la variable x, on supposera que $z = r > 0$, *i.e* $\arg z = 0$. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ fixé, on note $\varphi_N(t) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{a_n}{n!} t^n$ la N-ième somme partielle de φ. Par définition de la fonction Gamma, on obtient

$$\hat{f}_N(x) = \int_0^{+\infty} \varphi_N(t) e^{-t/x} dt.$$

Soit

$$\delta_N(x) = \int_0^r (\varphi - \varphi_N)(t) e^{-t/x} dt, \qquad \sigma_N(x) = \int_r^{+\infty} \varphi_N(t) e^{-t/x} dt.$$

Puisque $r \in]0, R[$ et que $|\varphi(t) - \hat{\varphi}_N(t)| \leq C_1|\frac{a_N}{N!}|t^N \leq C(t/r)^N$ pour $t \in [0, r]$ (C_1, $C > 0$ indépendants de N), on trouve, pour tout $x \in S$ ($\theta = \arg x \in] - \pi/2, \pi/2[$) :

$$\begin{aligned}|\delta_N(x)| &\leq C \int_0^r \frac{t^N}{r^N} |\exp(-t/x)| dt \\ &\leq C \frac{|x|^{N+1}}{r^N (\cos\theta)^{N+1}} \int_0^r \left(\frac{t\cos\theta}{|x|}\right)^N \exp\left(-\frac{t\cos\theta}{|x|}\right) d\left(-\frac{t\cos\theta}{|x|}\right) \\ &\leq \frac{C|x|}{\cos\theta} N! \left(\frac{|x|}{r\cos\theta}\right)^N .\end{aligned}$$

D'autre part, pour $t \geq r$, on a

$$|\hat{\varphi}_N(t)| \leq \left(\sum_{n=0}^{N-1} \left|\frac{a_n}{n!}\right| r^n\right) \left(\frac{t}{r}\right)^{N-1} < D \left(\frac{t}{r}\right)^{N-1}$$

avec D indépendant de N (mais dépendant de R). Un calcul identique à celui que l'on vient de faire pour $|\delta_N(t)|$ prouve que, pour tout $x \in S$,

$$|\sigma_N(x)| < rD(N-1)! \left(\frac{|x|}{r\cos\theta}\right)^N .$$

D'où, pour tout $x \in S$, en notant $\theta = \arg x$, on a

$$|f(x) - \hat{f}_N(x)| < KN! \left(\frac{|x|}{r\cos\theta}\right)^N$$

avec $K > 0$ indépendant de x et de N. Autrement dit, le type du développement $\hat{f}$ de f dans chaque direction $\theta \in] - \pi/2, \pi/2[$ est $r\cos\theta$. $\square$

Nous conservons les notations $S(\alpha, \beta)$, $\mathcal{H}_b(\alpha, \beta)$ introduites au début du paragraphe 2 précédent. Soit $D^* \subset \mathbb{C}^*$ le disque unité privé de l'origine et $S_j := S(\alpha_j, \beta_j)$, $1 \leq j \leq m$, des secteurs ouverts. On dit que les S_j constituent *un bon recouvrement de* D^* si $\alpha_1 < \beta_m - 2\pi < \alpha_2 < \beta_1 < \alpha_3 < \beta_2 < ... < \alpha_m < \beta_{m-1} < \alpha_1 + 2\pi$.

Lemme 8 (Théorème 1 de [1], p. 1001)**.** *Soit $S_j := S(\alpha_j, \beta_j)$ ($1 \leq j \leq m$) un bon recouvrement du disque unité privé de l'origine, et soit $f_j \in \mathcal{H}_b(\alpha_j, \beta_j)$. On suppose que, pour chaque $j = 1, ..., m$, il existe une direction $\varphi_j \in]\alpha_{j+1}, \beta_j[$ dans laquelle la fonction différence $f_{j+1} - f_j$ (avec $\alpha_{m+1} = \alpha_1 + 2\pi$, $f_{m+1} = f_1$) est exponentiellement plate de type $\gamma_j > 0$. Alors, on a les assertions suivantes.*

(1) Il existe une série entière $\hat{f}$ qui est le développement asymptotique Gevrey d'ordre 1 de f_j sur $S(\alpha_j, \beta_j)$ pour tout $j = 1, ..., m$.

(2) La transformée de Borel formelle de $\hat{f}$ peut être prolongée analytiquement sur le convexe

$$C = \bigcap_{j=1}^{m} H_j, \quad H_j := \{t \in \mathbb{C} : \Re(te^{i\varphi_j}) < \gamma_j\}. \qquad \square$$

Ce résultat est un raffinement du théorème de Ramis-Sibuya (*cf* [3], [4]).

On peut en affaiblir les hypothèses, en demandant à chaque f_j d'être asymptotiquement bornée sur son secteur S_j (il suffira de restreindre S_j pour que f_j soit bornée).

Le résultat qui suit est un résultat de comparaison d'une fonction ayant une asymptotique Gevrey dans deux directions avec la transformée de Borel-Laplace incomplète de son développement. On trouve une meilleure asymptotique entre les deux directions, de même que le lemme 4 améliorait le type dans les directions intermédiaires pour une fonction exponentiellement plate dans deux directions. On trouvera dans [1] un résultat voisin, avec cependant une preuve très différente. Ce résultat n'est pas utilisé dans la preuve du théorème 1. En revanche il sert pour la preuve du théorème 10.

Proposition 9. *Soit $S := S(\alpha, \beta)$ un secteur ouvert d'ouverture $\beta - \alpha < \pi$, $f \in \mathcal{H}_b(\alpha, \beta)$ et $\hat{f}$ une série entière sans terme constant. On suppose que f possède $\hat{f}$ pour développement asymptotique Gevrey d'ordre 1 et de type respectivement $R_1 > 0$ et $R_2 > 0$ dans deux directions θ_1 et θ_2 de S telles que $\alpha < \theta_1 < \theta_2 < \beta$. On note $A_j = R_j e^{i\theta_j}$ ($j = 1, 2$) et A le point tel que $[0, A]$ est un diamètre du cercle circonscrit aux points A_1, A_2 et 0.*

Alors on a les assertions suivantes.

(1) La fonction φ somme de $\hat{\mathcal{B}}\hat{f}$ dans le disque $D(0; \max(R_1, R_2))$ se prolonge analytiquement sur le triangle ouvert $]A, A_1, A_2[$ en une fonction notée $\tilde{\varphi}$.

(2) Pour tout point $a \in]0, A[$, la fonction différence $f_a := f - \mathcal{L}_a \tilde{\varphi}$ est exponentiellement plate de type $R_a(\theta)$ dans toute direction $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ où $[\theta_1, \theta_2] \to \mathbb{C}$, $\theta \mapsto R_a(\theta) e^{i\theta}$ est une paramétrisation par l'angle de l'arc correspondant du cercle de diamètre $[0, a]$.

Figure 2 – A la transformée de Borel formelle de $\hat{f}$ correspond une fonction φ analytique dans la réunion du disque $D(0; \max(R_1, R_2))$ et du triangle $]A, A_1, A_2[$.

Preuve – Quitte à effectuer une rotation de la variable x, on supposera que $-\pi/2 < \alpha < 0 < \beta < \pi/2$. On peut aussi supposer $R_1 \geq R_2$. Fixons $a \in]0, A[$ un point arbitrairement proche de A et désignons par a_1 (resp. a_2) le projeté du point a sur le segment $[0, A_1]$ (resp. $[0, A_2]$). Voir la figure 2 ci-dessus.

Puisque f possède $\hat{f}$ pour développement Gevrey d'ordre 1 et de type R_2 dans la direction θ_2, la série $\hat{f}$ est Gevrey d'ordre 1 et de type R_2 et la fonction φ, somme de la transformée de Borel formelle $\hat{\mathcal{B}}\hat{f}$ est définie et analytique dans le disque $D(0; R_2)$.

(1) Les points a, a_j pouvant être choisis arbitrairement proches des points A, A_j, il suffit de montrer que φ est analytique dans le triangle $]a, a_1, a_2[$. On pose $r = |a_1|$ $(\geq |a_2|)$. On considère les couples $(f_j, S_j)_{1 \leq j \leq 5}$ donnés de la façon suivante. On pose : $f_1 = f$, $S_1 = S(\alpha, \beta)$; pour $j = 2, ..., 5$, $f_j = \mathcal{L}_{z_j}\varphi$ et $S_j = S(\arg z_j - \pi/2, \arg z_j + \pi/2)$ avec $z_2 = re^{i\theta_2}$, $z_3 = re^{i(\theta_1+\pi)}$, $z_4 = re^{i(\theta_2+\pi)}$ et $z_5 = re^{i(\theta_1+2\pi)}$. A ce stade de la preuve, il nous faut utiliser l'assertion suivante :

Si f et g admettent le même développement asymptotique Gevrey d'ordre 1 et de type respectivement r_1 et r_2 dans une direction θ, alors la différence $f - g$ est exponentiellement plate de type $r = \min(r_1, r_2)$ dans la direction θ.

Cette assertion est une conséquence directe de la remarque qui suit la proposition 3.

La fonction f_1 possède $\hat{f}$ pour développement asymptotique Gevrey 1 de type $|a_2|$ dans la direction θ_2. Il en est de même de la fonction $f_2 = \mathcal{L}_{z_2}\varphi$ d'après le lemme 7. Donc la différence $f_2 - f_1$ est exponentiellement plate de type $\gamma_1 = |a_2|$ dans la direction $\varphi_1 = \theta_2$. De même, en notant $\theta = \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2)$, dans les directions $\varphi_2 = \frac{1}{2}(\arg z_2 + \arg z_3) = \theta + \frac{\pi}{2}$, $\varphi_3 = \theta + \pi$, $\varphi_4 = \theta + \frac{3\pi}{2}$ et $\varphi_5 = \theta_1$, on a $f_{j+1} - f_j$ exponentiellement plate de type γ_j avec $\gamma_2 = \min(|z_2|\cos(\varphi_2 - \arg z_2), |z_3|\cos(\varphi_2 - \arg z_3)) = r\cos\left(\frac{1}{2}(\arg z_3 - \arg z_2)\right)$, $\gamma_3 = r\cos\left(\frac{1}{2}(\arg z_4 - \arg z_3)\right)$, $\gamma_4 = r\cos\left(\frac{1}{2}(\arg z_5 - \arg z_4)\right)$ et $\gamma_5 = |a_1| = r$.

Ainsi le demi-plan $H_2 = \{t \in \mathbb{C} : \Re(te^{i\varphi_2}) < \gamma_2\}$ est bordé par la droite passant par les points z_2 et z_3. De même les demi-plans H_3 et H_4 définis de manière identique sont bordés par les droites z_3z_4 et z_4z_5. Enfin les demi-plans H_5 et H_1 sont bordés par les droites z_5a et a_2a. Il s'ensuit que le convexe $C = \cap_{j=1}^5 H_j$ contient le triangle $]a, a_1, a_2[$ et le lemme 8 fournit le résultat.

(2) Soit $j = 1$ ou 2 fixé. Dans la direction θ_j, on a

$$\mathcal{L}_a\varphi(x) - \mathcal{L}_{a_j}\varphi(x) = \int_{a_j}^{a} \varphi(t)e^{-t/x}dt = O(e^{-|a_j|/|x|})$$

où le chemin d'intégration est le segment $[a_j, a]$. Par ailleurs, puisque $\mathcal{L}_{a_j}\varphi$ (resp. f) possède $\hat{f}$ pour développement asymptotique Gevrey d'ordre 1 et de type $|a_j|$ (resp. R_j), la différence $f - \mathcal{L}_{a_j}\varphi$ est exponentiellement plate de type $\min(|a_j|, R_j) = |a_j|$. Par conséquent, la fonction f_a est exponentiellement plate de type $|a_j|$ dans la direction θ_j. En appliquant le lemme 4 (et la remarque qui le suit) à la fonction f_a sur le secteur $\bar{S}(\theta_1, \theta_2)$, on obtient le cercle voulu. $\square$

4. Preuve du théorème 1 et généralisation.

Nous présentons ici une preuve n'utilisant pas les résultats de [1]. En revanche la preuve de la généralisation qui suit utilisera la proposition 9, qui est elle-même une conséquence de ces résultats.

Preuve du théorème 1 – Soit $\omega \in]0, \pi/2[$ fixé (par exemple $\omega = \frac{\pi}{4}$). D'après le théorème de Borel-Ritt (*cf* [7] Chap. III), il existe une fonction analytique f_0 sur $S(\alpha-\omega, \beta+\omega; \rho)$ qui y admet $\hat{f}$ pour développement asymptotique. La fonction différence $g := f - f_0$, analytique et bornée sur $S = S(\alpha, \beta; \rho)$, admet alors le développement asymptotique nul dans la direction θ_0. *La première assertion du théorème 1* s'obtient en appliquant à la fonction g la proposition 3 du paragraphe 2 précédent.

On suppose à présent que *la fonction f possède $\hat{f}$ pour développement asymptotique Gevrey d'ordre 1 et de type $R(\theta_0)$ dans la direction θ_0*. La série formelle $\hat{f}$ est donc Gevrey d'ordre 1 et de type $R(\theta_0)$. On note φ la somme de $\hat{\mathcal{B}}\hat{f}$ dans le disque $D(0; R(\theta_0))$. On distingue deux cas différents.

Cas des petits secteurs : $\theta_0 - \pi/2 < \alpha < \theta_0 < \beta < \theta_0 + \pi/2$. Soit $r \in]0, R(\theta_0)[$ arbitrairement fixé. D'après le lemme 7 du paragraphe précédent, la fonction $\mathcal{L}_{re^{i\theta_0}}\varphi$ possède $\hat{f}$ pour développement asymptotique Gevrey d'ordre 1 et de type $r\cos(\theta - \theta_0)$ dans chaque direction θ de S puisque $\bar{S}$ est inclus dans $S(\theta_0 - \pi/2, \theta_0 + \pi/2; +\infty)$. La fonction différence $g = f - f_0$ possède alors le développement asymptotique nul Gevrey d'ordre 1 et de type r dans la direction θ_0. Elle l'est également dans chaque direction $\theta \in]\alpha, \theta_0]$ (resp. $\theta \in [\theta_0, \beta[$) de S avec le type correspondant

$$R(\theta) = r\frac{\sin(\theta - \alpha)}{\sin(\theta_0 - \alpha)} \qquad (\textit{resp.}\ \ r\frac{\sin(\theta - \beta)}{\sin(\theta_0 - \beta)}),$$

d'après la proposition 6 (2) du paragraphe 2. Puisque $R(\theta) \le r\cos(\theta - \theta_0)$, on obtient que f possède $\hat{f}$ pour développemment asymptotique Gevrey d'ordre 1 et de type $R(\theta)$ dans chaque direction de S. Le nombre r pouvant être choisi arbitrairement proche de $R(\theta_0)$, on a ainsi démontré la deuxième assertion du théorème 1 dans ce premier cas.

Cas général : Soit $\varepsilon \in]0, \pi/2[$. On considère les directions $(\theta_j)_{-l \le j \le m}$ (l, $m \in \mathbb{N}$) données par $\theta_j = \theta_0 + j\varepsilon$ et telles que $\theta_{-l} - \pi/2 < \alpha < \theta_{-l}$ et $\theta_m < \beta < \theta_m + \pi/2$. En procédant de la même façon que précédemment, on obtient successivement que f possède $\hat{f}$ pour développement asymptotique Gevrey d'ordre 1 dans chacune des directions $(\theta_j)_{-l \le j \le m}$ et donc dans S tout entier.

Il reste alors à montrer que, pour toute direction $\theta \in [\alpha + \pi/2, \theta_0] \cup [\theta_0, \beta - \pi/2]$, le type $R(\theta)$ du développement est supérieur ou égal à $R(\theta_0)$. On supposera que $\theta \in [\theta_0, \beta - \pi/2]$, l'autre cas étant similaire. A chaque $N \in \mathbb{N}^*$, on considère les N directions $\theta_{N,k} := \theta_0 + \frac{\theta - \theta_0}{N}k$, k allant de 1 à N. Pour $N > 2(\theta - \theta_0)/\pi$, on a $\theta_{N,k+1} \in]\theta_{N,k}, \theta_{N,k} + \pi/2[$ pour tout $k = 1$, ..., $N - 1$. Par un raisonnement identique à ce qu'on a fait précédemment dans le cas des petits secteurs, on obtient successivement que le type $R(\theta_{N,k})$ du développement $\hat{f}$ pour la fonction f dans chaque direction $\theta_{N,k}$ satisfait $R(\theta_{N,k+1}) \ge R(\theta_{N,k})\cos(\theta_{N,k+1} - \theta_{N,k})$, donc est au moins égal à $R(\theta_0)(\cos(\frac{\theta - \theta_0}{N}))^k$, donc $R(\theta) \ge R(\theta_0)(\cos(\frac{\theta - \theta_0}{N}))^N$. En faisant tendre N vers l'infini, on obtient $R(\theta) \ge R(\theta_0)$, ce qui termine la preuve du théorème 1. $\square$

Les résultats présentés dans le théorème 1 sont en apparence des résultats d'*extrapolation*. On ne sait rien de la fonction f dehors de la direction θ_0, si ce n'est qu'elle est bornée sur le secteur $S(\alpha, \beta; \rho)$, et on en déduit que le développement asymptotique s'étend à tout le secteur. En réalité, si l'on assimile la propriété d'être borné avec celle d'avoir un développement asymptotique Gevrey d'ordre 1 et de type 0, un résultat similaire est obtenu par *interpolation*.

Théorème 10. *Soit $S := S(\alpha, \beta; \rho)$ un secteur ouvert de $\tilde{\mathbb{C}}^*$, f une fonction analytique et asymptotiquement bornée dans S et $\hat{f}$ une série entière. Soient θ_1, θ_2 tels que $\alpha < \theta_1 < \theta_2 < \beta$, et R_1, $R_2 > 0$ avec $R_1 \ge R_2$ pour fixer les idées. Soit $\theta_\mu \in]\theta_2 - \pi/2, \theta_2]$ déterminé par $\cos(\theta_2 - \theta_\mu) = R_2/R_1$.*

On suppose que f possède $\hat{f}$ pour développement asymptotique Gevrey d'ordre 1 et de type respectivement R_1 et R_2 dans les directions θ_1 et θ_2. Alors, f possède $\hat{f}$ pour *développement asymptotique Gevrey d'ordre 1 et de type $R(\theta)$ dans toute direction $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$, avec $R(\theta) = R_1$ si $\theta \in [\theta_1, \theta_\mu]$ et $R(\theta) = R_1 \cos(\theta - \theta_\mu)$ si $[\theta_\mu, \theta_2]$).*

Remarque. L'application $[\theta_\mu, \theta_2] \to \mathbb{C}$, $\theta \mapsto R(\theta)e^{i\theta}$ est une paramétrisation de l'arc correspondant du cercle passant par les points $R_2 e^{i\theta_2}$ et 0 et tangent au cercle centré en 0 et de rayon R_1. Voir la figure 3 suivante.

Figure 3 – Représentation du type $R(\theta)$ en fonction de l'angle $\theta \in [\theta_1, \theta_2] \subset]\alpha, \beta[$ que satisfait le développement asymptotique d'une fonction f supposée bornée dans un secteur $S(\alpha, \beta; \rho)$ et admettant un développement asymptotique Gevrey d'ordre 1 et de type R_1 (resp. R_2) dans la direction θ_1 (resp. θ_2) de S.

Preuve du théorème 10 — Cas des petits secteurs : $\theta_2 - \theta_1 < \pi$.

On conserve les notations φ, A, a, A_1, A_2 utilisées dans la preuve de la proposition 9 et on choisit $a \in]0, A[$ arbitrairement proche de A. On pose, pour tout $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$, $Z_{a,\theta} := (R_1 - |A - a|)e^{i\theta}$.

Quitte à prendre un sous-secteur de S, on peut supposer que $\beta - \alpha < \pi$. Rappelons que d'après la proposition 9, la fonction $(f - \mathcal{L}_a\varphi)$ est exponentiellement plate de type $R(\theta)$, où $R(\theta)$ est déterminé par le cercle de diamètre $[0, a]$.

Soit $\theta \in [\theta_1, \theta_\mu]$. Le segment $[Z_{a,\theta}, a]$ restant dans le domaine de définition de φ, on écrit

$$(\mathcal{L}_a\varphi - \mathcal{L}_{Z_{a,\theta}}\varphi)(x) = \int_{Z_{a,\theta}}^{a} \varphi(t)e^{-t/x}dt = O(e^{\Re(-Z_{a,\theta}/x)}),$$

ce qui implique que $(\mathcal{L}_a\varphi - \mathcal{L}_{Z_{a,\theta}}\varphi)(x)$ est exponentiellement plate de type $|Z_{a,\theta}|$ dans la direction $\arg x = \theta$. Puisque $|Z_{a,\theta}| < R(\theta)$, on en déduit que $(f - \mathcal{L}_{Z_{a,\theta}}\varphi)$ est exponentiellement plate de type $|Z_{a,\theta}|$ dans la direction θ. Par conséquent, la fonction f, de même que la transformée de Laplace tronquée $\mathcal{L}_{Z_{a,\theta}}\varphi$ elle-même, possède $\hat{f}$ pour développement asymptotique Gevrey d'ordre 1 et de type $|Z_{a,\theta}|$ dans la direction $\theta \in [\theta_1, \theta_\mu]$, où le type $|Z_{a,\theta}|$ tend vers R_1 quand a tend vers A.

Pour toute direction $\theta \in]\theta_\mu, \theta_2]$, puisque le segment $[Z_{a,\theta}, a]$ n'est plus inclus dans le triangle $]A, A_1, A_2[$ pour a suffisamment proche de A, la transformée de Laplace tronquée $\mathcal{L}_{Z_{a,\theta}}\varphi$ n'est peut-être pas définie. On considère alors les fonctions $(f - \mathcal{L}_a\varphi)$ et $(\mathcal{L}_a\varphi - \mathcal{L}_{Z_{a,\theta_\mu}}\varphi)$ et, par des estimations analogues on obtient (avec $a \to A$) que f possède $\hat{f}$ pour développement asymptotique Gevrey d'ordre 1 et de type $R_1 \cos(\theta - \theta_\mu)$ dans toute direction $\theta \in]\theta_\mu, \theta_2]$.

Cas général : Avec le résultat obtenu précédemment dans le cas des petits secteurs, il suffit de noter la propriété suivante, déduite du théorème 1 (avec $\theta_0 = \theta_1$ et $R = R_1$) : la fonction f possède $\hat{f}$ pour développement asymptotique Gevrey d'ordre 1 et de type constant R_1 dans toute direction $\theta \in [\theta_1, \theta_2 - \pi/2]$. $\square$

5. Autres remarques.

(1) On peut considérer le théorème 1 comme *cas limite* du théorème 10.

(2) Les énoncés de l'article suggèrent de définir une *courbe type* pour un comportement asymptotique global sur tout un secteur de la façon suivante. Etant donnée une courbe paramétrée par l'angle $\gamma :]\alpha, \beta[\to \mathbb{C}$, $\theta \mapsto \gamma(\theta) = R(\theta)e^{i\theta}$, la fonction f, analytique dans $S = S(\alpha, \beta, \rho)$, admet $\hat{f}$ pour développement *de type* γ si pour tout $\delta > 0$ il existe $C > 0$ tel que pour tout x dans S et tout entier N :

$$|f(x) - \hat{f}_N(x)| \leq C \left(\frac{1}{R(\theta)} + \delta \right)^N N!$$

avec $\theta = \arg x$. Il convient de remarquer qu'il ne suffit pas *a priori* d'avoir une asymptotique de type $R(\theta)$ dans chaque direction θ du secteur pour obtenir l'asymptotique de type γ. En effet la constante C pourrait dépendre de θ. Cependant, compte tenu de notre définition du type dans une direction et des preuves de l'article, il se trouve que *ces deux notions sont équivalentes.*

(3) Le type $R(\theta)$ donné dans le théorème 1 (ainsi que dans le théorème 10) est optimal comme le montre l'exemple classique de la série d'Euler. Détaillons cet exemple. L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t/x}}{1+t} dt$ définit une fonction analytique dans le demi-plan $\{x \in \mathbb{C} : \Re(x) > 0\}$ et possède la série d'Euler $\hat{f} := \sum_{n \geq 0} n!(-1)^n x^{n+1}$ pour développement asymptotique Gevrey d'ordre 1 dans la direction $\mathbb{R}^+$ avec le type 1. De plus, cette fonction se prolonge en une fonction f analytique et asymptotiquement bornée sur le secteur $S(-3\pi/2, 3\pi/2; +\infty)$ de $\tilde{\mathbb{C}}^*$. Pour le voir il suffit d'écrire f sous la forme $f(x) = \int_0^{\infty e^{i\alpha}} \frac{e^{-t/x}}{1+t} dt$ avec $\alpha \in]-\pi, \pi[$ et $\arg x \in]\theta - \frac{\pi}{2}, \theta + \frac{\pi}{2}[$.

On sait aussi que f possède $\hat{f}$ pour développement asymptotique Gevrey d'ordre 1 et de type $R(\theta)$ dans chaque direction $\theta \in]-3\pi/2, 3\pi/2[$, avec $R(\theta)$ tel que l'application $]-3\pi/2, 3\pi/2[\to \tilde{\mathbb{C}}^*$, $\theta \mapsto R(\theta)e^{iR(\theta)}$ admet pour courbe le cercle unité plus un cercle centré en 1/2 et de rayon 1/2, c'est-à-dire $R(\theta) = 1$ pour $\theta \in [-\pi, \pi]$, et $R(\theta) = \cos(\theta + p)$ pour $\theta \in -\frac{3\pi}{2}, -\pi]$ et $\theta \in [\pi, \frac{3\pi}{2}]$. C'est exactement ce que donne le théorème 1.

(4) Soit $\hat{f}$ une série entière Gevrey d'ordre 1 et f une fonction analytique et asymptotiquement bornée sur un secteur ouvert $S(\alpha, \beta; \rho) \subset \tilde{\mathbb{C}}^*$, avec $\beta - \alpha > \pi$ et $\rho > 0$. Si f admet $\hat{f}$ pour développement asymptotique Gevrey d'ordre 1 dans une direction $\theta_0 \in]\alpha, \beta[$, alors f est *la somme de Borel* de $\hat{f}$ dans la direction $(\alpha + \beta)/2$.

Pour la définition de la somme de Borel d'une série entière, voir [3] ou [2].

6. Le cas des développements Gevrey d'ordre k.

Soit $k > 0$, $S := S(\alpha, \beta; \rho)$ un secteur, θ une direction de S et f une fonction analytique dans S. Comme précédemment, étant donnés $\hat{f}(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n \in \mathbb{C}[[x]]$ et $N \in \mathbb{N}^*$, on note $\hat{f}_N$ la somme partielle $\hat{f}_N(x) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n x^n$. On dira que *$f$ possède $\hat{f}$ pour développement asymptotique Gevrey d'ordre k et de type R dans la direction θ* si, pour tout $\delta > 0$, il existe $C > 0$ tel que :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in S \text{ avec } \arg x = \theta,\ \ |f(x) - \hat{f}_N(x)| < C\, \Gamma\left(1 + \tfrac{N}{k}\right) \left(\frac{1}{R} + \delta\right)^N |x|^N .$$

On vérifie qu'une fonction f est asymptotique à la série nulle Gevrey d'ordre k et de type R dans la direction θ si et seulement si elle satisfait :

$$\forall \delta > 0,\ \exists C > 0,\ \forall x \in S \text{ avec } \arg x = \theta,\ \ |f(x)|\ <\ C \exp\left(-\left(\frac{R - \delta}{|x|}\right)^k\right) .$$

La généralisation du théorème 1 est la suivante.

Théorème 11. *Si f possède $\hat{f}$ pour développement asymptotique Gevrey d'ordre k et de type $R(\theta_0)$ dans une direction $\theta_0 \in]\alpha, \beta[$, alors dans toute direction θ de S, f possède $\hat{f}$ pour développement asymptotique Gevrey d'ordre k et de type $R(\theta)$, où $R(\theta)$ est défini de la façon suivante. En posant $\alpha' = \min(\theta_0, \alpha + \frac{\pi}{2k})$ et $\beta' = \max(\theta_0, \beta - \frac{\pi}{2k})$, on a $R(\theta) = R(\theta_0) \left(\frac{\sin k(\theta - \alpha)}{\sin k(\alpha' - \alpha)}\right)^{1/k}$ si $\theta \in]\alpha, \alpha']$,*

$R(\theta) = R(\theta_0)$ si $\theta \in [\alpha', \beta']$ et

$R(\theta) = R(\theta_0) \left(\frac{\sin k(\theta - \beta)}{\sin k(\beta' - \beta)}\right)^{1/k}$ si $\theta \in [\beta', \beta]$.

Nous avons volontairement limité les parenthèses dans les formules, espérant ne pas creer de confusion : la notation $\sin k\xi$ doit se lire $\sin(k\xi)$.

La représentation graphique est analogue à celle de la figure 1 : la courbe entre α' et β' reste un arc de cercle, celles entre α et α' et entre β et β' sont des arcs de fleurs, où on appelle *fleur* l'image par $z \mapsto z^{1/k}$ d'un cercle tangent à l'origine. Lorsque k est entier, la fleur image du cercle de diamètre $[0, z]$ est en fait la lemniscate à k pétales

$$l(z_1, ..., z_k; C) := \left\{\zeta \in \mathbb{C}\ :\ \prod_{\nu=1}^{k} |\zeta - z_\nu| = C\right\}$$

où les z_ν sont toutes les racines k-ièmes de $z/2$ et où $C = |z/2|$. Mentionnons que les *disques de Borel d'ordre* k intervenant dans la théorie de la k-sommabilité sont bordés par un seul pétale (*cf* [3]).

Preuve du théorème 11 – Le schéma de démonstration est le même que précédemment. On démontre d'abord le résultat pour le développement nul. En appliquant le théorème de Phragmén-Lindelöf à la fonction $f(x)\exp\left((Re^{i\theta}/x)^k\right)$ on obtient l'analogue du lemme 4 où $R(\xi)$ est à remplacer par $R(\xi)^k$ et $\sin\xi$ par $\sin k\xi$. On en déduit l'analogue de la proposition 6 où π est remplacé par π/k et le type $R(\theta)$ est donné par

$$R(\theta) = R\left(\frac{\sin k(\theta-\alpha)}{\sin k(\theta_0-\alpha)}\right)^{\frac{1}{k}} .$$

On utilise ensuite les transformées de Borel et de Laplace tronquée d'ordre k, données par

$$\hat{\mathcal{B}}\Big(\sum_{n\geq 0} a_n x^{n+1}\Big) := \sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{\Gamma\left(1+\frac{n}{k}\right)} t^n ,$$

$$\mathcal{L}_{k,a}F(z) := k\int_0^a e^{-(t/z)^k} F(t)\frac{dt}{t} .$$

Le théorème de Brel-Ritt-Gevrey (lemme 7) reste valide pour l'ordre k en remplaçant le secteur par $S(\arg z - \frac{\pi}{2k}, \arg z + \frac{\pi}{2k})$ et la dernière formule par $R(\theta) = |z|\sqrt[k]{\cos k(\theta - \arg z)}$. La suite de la preuve (au paragraphe 4) est identique. □

Il est possible de modifier le théorème 10 de manière analogue, en utilisant des variantes des lemme 8 et proposition 9. Concernant le lemme 8, le domaine où la tranformée de Borel d'ordre k peut être prolongée n'est plus nécessairement convexe et est donné par $C = \bigcap_{j=1}^m H_j$ avec $H_j = \{t \in \mathbb{C} \;:\; \Re(t^k e^{ik\varphi_j}) < \gamma_j^k\}$. Pour cela il faut adapter la preuve faite dans [1] avec la formule de Borel-Heine d'ordre k suivante :

$$F(t) = \frac{1}{2k\pi i}\sum_{j=1}^m \int_0^{x_j} (f_{j+1}(z) - f_j(z))\, e^{t^k/z^k}\frac{dz}{z} + \frac{1}{2k\pi i}\sum_{j=1}^m \int_{x_{j-1}}^{x_j} f_j(z) e^{t^k/z^k}\frac{dz}{z} .$$

En ce qui concerne la proposition 9, le secteur est supposé d'ouverture $\beta - \alpha < \pi/k$, les points A_1, A_2 sont sur un pétale de diamètre $[0, A]$, le triangle $]A, A_1, A_2[$ n'a plus des bords droits, mais paramétrés par $R = \frac{R_i}{(\cos k(\theta-\varphi_i))^{1/k}}$, $i = 1, 2$, et $\theta \mapsto R_a(\theta)e^{i\theta}$ ne paramétrise plus un arc de cercle mais un arc de pétale : $R_a(\theta) = |a|(\cos k(\theta - \arg a))^{1/k}$.

7. Le cas des développements q-Gevrey.

Pour simplifier l'exposition, nous avons choisi de ne traiter que le cas de l'ordre 1, en privilégiant la direction $\mathbb{R}^+$, et sans préciser le type Gevrey. On ne considère aussi que le cas où q est un nombre réel strictement supérieur à 1.

On note $\tilde{\mathbb{C}}^*$ la surface de Riemann du logarithme, et $\tilde{D}(0, R)$ le "disque en colimaçon" $\tilde{D}(0, R) := \{x \in \tilde{\mathbb{C}}^* \;:\; 0 < |x| < R\}$. On rappelle les définitions et notations suivantes (*cf* [8]).

$\mathrm{Log}_q(x) := \frac{\mathrm{Log}x}{\mathrm{Log}q}$, $\arg_q(x) := \frac{\arg x}{\mathrm{Log}q}$. Une série formelle $\hat{f}(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ est dite *q-Gevrey (d'ordre 1)* s'il existe deux constantes $K, A > 0$ telles que pour tout entier n on ait

$|a_n| \leq KA^n q^{n^2/2}$. On écrit dans ce cas $\hat{f} \in \mathbb{C}[[x]]_{q,1}$. Soit f une fonction analytique sur $\tilde{D}(0,R)$. On dit que f est *asymptotique à la série* $\hat{f}$ *q-Gevrey d'ordre 1* s'il existe deux constantes $K, A > 0$ telles que pour tout entier n et tout $x \in \tilde{D}(0,R)$ on ait

$$\left| f(x) - \sum_{n=0}^{N} a_n x^n \right| \leq KA^N q^{\frac{1}{2}(N^2 + \arg_q^2 x)} |x|^N \ .$$

On dira f est asymptotique q-Gevrey à $\hat{f}$ *en restriction à* $\mathbb{R}^+$ si la condition ci-dessus est satisfaite pour $x \in]0, R[$.

La fonction f est dite *à décroissance q-exponentielle* (resp. *en restriction à* $\mathbb{R}^+$) s'il existe $\mu \in \mathbb{R}$ et $K > 0$ tels que pour tout $x \in \tilde{D}(0,R)$ (resp. tout $x \in]0, R[$) on ait

$$|f(x)| \leq K|x|^\mu \left| q^{-\frac{1}{2}\mathrm{Log}_q^2 x} \right| \ .$$

On trouvera dans [8] (propositions 2.2.1 et 2.2.2) une preuve du résultat suivant.

Lemme 12. *(1) La fonction f est asymptotique q-Gevrey d'ordre 1 à la série nulle (respectivement en restriction à $\mathbb{R}^+$) si et seulement si f est à décroissance q-exponentielle (resp. en restriction à $\mathbb{R}^+$).*

(2) Pour toute série formelle q-Gevrey $\hat{f}$, il existe une fonction analytique au voisinage de 0 *dans $\tilde{\mathbb{C}}^*$ admettant $\hat{f}$ pour développement asymptotique q-Gevrey d'ordre 1.*

Nous proposons à présent le q-analogue suivant du théorème 1.

Théorème 13. *Soit $\hat{f}(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n \in \mathbb{C}[[x]]_{q,1}$ et f une fonction analytique sur $\tilde{D}(0,R)$. Alors f est asymptotique q-Gevrey d'ordre 1 à $\hat{f}$ si et seulement si :*

(i) $\exists K, A > 0,\ \forall x \in]0, R[,\ \left| f(x) - \sum_{n=0}^{N} a_n x^n \right| \leq KA^N q^{N^2/2} x^N$,

(ii) $\exists K > 0,\ \forall x \in \tilde{D}(0,R),\ \ |f(x)| \leq Kq^{\frac{1}{2}\arg_q^2 x}$.

De même que précédemment on commence par démontrer le résultat dans le cas du développement nul. Auparavant, remarquons que les deux conditions *(i)* et *(ii)* sont clairement nécessaires : si f est asymptotique q-Gevrey à $\hat{f}$, on obtient *(i)* par restriction à l'axe $\mathbb{R}^+$ et *(ii)* en posant $N = 0$. On se bornera donc à montrer que ces conditions sont suffisantes. Nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 14. *Soit g une fonction définie et continue sur le quart de plan fermé $Q = \{t = u + iv \in \mathbb{C}\ :\ u \geq 0$ et $v \geq 0\}$ et analytique sur l'intérieur de Q. Soit $M > 0$. On suppose :*

(i) $\forall u \geq 0,\ |g(u)| \leq M$,

(ii) $\forall t \in Q,\ |g(t)| \leq Me^{u^2}$.

Alors g est bornée par M en module sur tout Q.

Preuve – Pour $\varepsilon > 0$ quelconque, on considère la fonction $g_\varepsilon(t) = g(t)e^{i\varepsilon t}$. On a $|g_\varepsilon(t)| = |g(t)|e^{-\varepsilon uv}$ donc sur $\mathbb{R}^+$ on a $g_\varepsilon(u) \leq M$ et sur Q, $|g_\varepsilon(t)| \leq Me^{u(u-\varepsilon v)}$.

Appliquons le théorème de Phragmén-Lindelöf à la fonction g_ε sur le secteur $V_\varepsilon = \{t = u + iv \in \mathbb{C}\ :\ 0 < v < u/\varepsilon\}$: on a g_ε à croissance au plus exponentielle d'ordre 2 sur V_ε, bornée par M sur ∂V_ε et V_ε est d'ouverture strictement inférieure à $\pi/2$, donc g_ε est bornée par M sur tout V_ε. On en déduit que g est bornée par $Me^{\varepsilon uv}$ sur V_ε pour tout $\varepsilon > 0$, donc bornée par M sur Q. □

Preuve du théorème 13 dans le cas du développement nul –

D'après le (1) du lemme 12, il suffit de démontrer le résultat suivant.

Lemme 15. *Soit f analytique sur $\tilde{D}(0,R)$ satisfaisant les deux conditions suivantes :*

(i) $\exists \mu \in \mathbb{R},\ \exists K > 0,\ \forall x \in]0,R[,\quad |f(x)| \leq Kq^{-\frac{1}{2}\mathrm{Log}_q^2 x} x^\mu$.

(ii) $\forall x \in \tilde{D}(0,R),\quad |f(x)| \leq Kq^{\frac{1}{2}\arg_q^2 x}$.

Alors il existe $\mu \in \mathbb{R}$ et $K > 0$ tels que, pour tout $x \in \tilde{D}(0,R)$, $|f(x)| \leq K \left| q^{-\frac{1}{2}\mathrm{Log}_q^2 x} x^\mu \right|$,

Preuve – Soit $t = \mathrm{Log}_q x$ et $g(t) = f(x) q^{\frac{1}{2}\mathrm{Log}_q^2 x} x^{-\mu}$. La fonction g est définie dans le demi-plan à gauche $P = \{t \in \mathbb{C}\ :\ \Re t < \mathrm{Log}_q R\}$, bornée sur $]-\infty, \mathrm{Log}_q R[$ et majorée en module par $q^{\frac{1}{2}(\Re t)^2 - \mu \Re t}$ sur P. D'après le lemme 14 appliqué à chacun des deux quarts de plans, la fonction g est donc bornée sur P. □

Preuve du théorème 13 dans le cas général –

Etant donnée f satisfaisant les conditions *(i)* et *(ii)* de l'énoncé, soit f_0 une fonction asymptotique q-Gevrey à $\hat{f}$ donnée par le *(2)* du lemme 12. La fonction $f - f_0$ est asymptotique à 0 q-Gevrey d'ordre 1 en restriction à $\mathbb{R}^+$, donc à décroissance q-exponentielle dans cette direction d'après le lemme 12 *(1)*. De plus, on a pour tout $x \in \tilde{D}(0,R)$, $|f(x) - f_0(x)| \leq |f(x)| + |f_0(x)| = O\left(q^{-\frac{1}{2}\mathrm{Log}_q^2 x}\right)$. D'après le lemme 15, il s'ensuit que $f - f_0$ est à décroissance q-exponentielle dans tout $\tilde{D}(0,R)$. A fortiori, pour tout $x \in \tilde{D}(0,R)$ et tout entier n, on a $|f(x) - f_0(x)| = O\left(A^n q^{\frac{1}{2}(n^2 + \arg_q^2 x)} |x|^n\right)$. On en déduit que f est asymptotique q-Gevrey à $\hat{f}$ en utilisant $|f - \hat{f}_n| \leq |f - f_0| + |f_0 - \hat{f}_n|$ où $\hat{f}_n$ ($n \in \mathbb{N}$) sont les sommes partielles de $\hat{f}$. □

Nous remercions J.P. Ramis, R. Schäfke et G. Wallet pour leurs suggestions et leurs encouragements. Merci aussi au referee pour sa lecture attentive.

Références.

[1] Fruchard A. et Schäfke R., 1996. On the Borel transform, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 323, Série I, pp. 999-1004.

[2] Malgrange B., 1995. *Sommation des séries divergentes*, Exp. Math. 13 n° 2-3 163-222.

[3] Ramis J.-P., 1980. Les séries k-sommables et leurs applications, *Complex Analysis, Microlocal Calculus and Relativistic Quantum Theory, Lecture Notes in Physics*, 126, pp. 178-199.

[4] Sibuya Y., 1990. *Linear differential equations in the complexe domain, problems of analytical continuation*, AMS, Providence (RI).

[5] Titchmarsh E. C., 1939. *The Theory of Functions*, Second edition, Oxford Science Publications.

[6] **Tougeron J.-Cl., 1990.** *An introduction to the theory of Gevrey expansions and to the Borel-Laplace transform with some applications*, Preprint University of Toronto, Canada.

[7] **Wasow W., 1965.** *Asymptotic expansions for ordinary differential equations*, Interscience, New York.

[8] **Zhang C., 1998.** *Les développements asymptotiques q-Gevrey, les séries Gq-sommables et leurs applications*, prépublication La Rochelle.

Augustin Fruchard et Changgui Zhang
Département et Laboratoire de Mathématiques
Pôle Sciences et Technologie // Université de La Rochelle
Avenue Marillac // 17042 La Rochelle cedex 1

e-mail : afruchar@univ-lr.fr ; czhang@univ-lr.fr

Annexe

Notes

Sur la sommabilité des séries entières solutions formelles d'une équation aux q-différences, I*

Changgui ZHANG

Titre courant – Sur les équations aux q-différences, I

Résumé – Nous donnons une version q-analogue de l'asymptotique Gevrey et de la sommabilité de Borel, dues respectivement à G. Watson et E. Borel et systématiquement developpées par J.-P. Ramis, Y. Sibuya, etc... depuis une quinzaine d'années. Le but de ces auteurs était l'étude des équations différentielles dans le champ complexe. De même notre but est l'étude des équations aux q-différences dans le champ complexe, dans la ligne de G.D. Birkhoff et W.J. Trjitzinsky [7].

Plus précisément, nous introduisons une nouvelle notion d'asymptoticité que nous appelons développements asymptotiques q-Gevrey d'ordre 1. Elle est adaptée à la classe des séries entières q-Gevrey d'ordre 1. Nous définissons ensuite la classe des séries entières Gq-sommables d'ordre 1 et nous en donnons une caractérisation en terme de transformations de Borel et de Laplace q-analogues. Nous montrons que toute série entière solution formelle d'une équation aux q-différences linéaire à coefficients analytiques est Gq-sommable d'ordre 1 lorsque le polygone de Newton de l'équation possède une seule pente égale à 1. Une généralisation de ce travail fera l'objet d'une Note ultérieure [4].

On the summability of formal power series solutions of q-difference equations, I

Abstract – We give a q-analogous version of the Gevrey asymptotics and of the Borel summability respectively due to Watson and E. Borel and developped during the last fifteen years by J.-P. Ramis, Y. Sibuya .... The goal of these authors was the study of ordinary differential equations in the complex plane. In the same manner, our goal is the study of q-difference equations in the complex plane along the way indicated by G.D. Birkhoff and W.J. Trjitzinsky [7].

More precisely, we introduce a new notion of asymptoticity which we call q-Gevrey asymptotic expansions of order 1. This notion is well adapted to the class of q-Gevrey power series of order 1. Next, we define the class of Gq-summable power series of order 1 and give a characterization in terms of q-Borel-Laplace transforms. We show that every power serie satisfying a linear analytic q-difference equation is Gq-summable of order 1 when the associated Newton polygon has an unic slope equal to 1. We shall study a generalisation of this work when the Newton polygon is arbitrary in a later paper [4].

Introduction – Soit q un nombre réel strictement supérieur à 1. On considère une équation aux q-différences linéaire à coefficients analytiques en l'origine du plan complexe : $a_n y(q^n x) + a_{n-1} y(q^{n-1}x) + ... + a_0 y(x) = b$, où les a_j $(0 \le j \le n)$, b sont des fonctions analytiques en

* La note est publiée dans *C.R.A.S*, t. 327, Série I, p. 349–352, 1998.

$x = 0$ et y est une fonction à déterminer. Supposons $\hat{f} := \sum_{n \geq 0} \alpha_n x^n$ une solution formelle de cette équation. D'après les théorèmes d'indices obtenus par J.-P. Bézivin [2] (voir aussi [FJ]), si la série $\hat{f}$ n'est pas convergente, alors il existe $k > 0$ tel que $\hat{f} \in \mathbb{C}[[x]]_{q;1/k}$ et que $\hat{f} \notin \mathbb{C}[[x]]_{q;1/k'}$ pour tout $k' > k$. Ici, on note, pour chaque $s > 0$, $\mathbb{C}[[x]]_{q;s}$ l'espace des séries entières (dites q-Gevrey d'ordre s) dont la suite des coefficients est dominée par $(CA^n q^{sn^2/2})_{n \geq 0}$ avec $C > 0$, $A > 0$ convenables.

Nous nous proposons, dans cette Note et dans la Note [4], d'étudier la sommabilité des solutions formelles d'une équation aux q-différences. Il est clair que l'on ne peut appliquer dans notre situation (au cas général) ni la méthode de Borel-Laplace ni le procédé de la multisommabilité étudié par J. Ecalle, J. Martinet, J.-P. Ramis, etc. Notre point de départ est d'introduire une notion de développement asymptotique qui puisse jouer, en théorie des équations aux q-différences, le rôle similaire à ce que fait le développement asymptotique Gevrey en théorie des équations différentielles. Les principaux résultats de la présente Note sont les théorèmes 7 et 8.

Notations. – On note respectivement $\mathbb{C}[[x]]$ l'espace des séries entières, $\mathbb{C}\{x\}$ l'espace des séries entières de rayon de convergence non nul, $\tilde{\mathbb{C}}$ la surface de Riemann du logarithme, log la détermination principale de celui-ci, et $\log_q x = \log_q |x| + i \arg_q x$ pour $x \in \tilde{\mathbb{C}}$. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on note $d_\theta = \{x \in \tilde{\mathbb{C}} \ : \arg x = \theta\}$ la direction d'argument θ ; pour $R > 0$, on note $\tilde{D}(0; R) = \{x \in \tilde{\mathbb{C}} : |x| < R\}$ le 'disque' de centre $0 \in \tilde{\mathbb{C}}$ et de rayon R. On note enfin $\tilde{\mathbb{O}}$ l'espace des germes de fonction analytique 'en $0 \in \tilde{\mathbb{C}}$', *i.e* l'ensemble des fonctions définies et analytiques sur un disque $\tilde{D}(0; R)$ avec $R > 0$ arbitraire.

Définition 1. – Soit $\theta \in \mathbb{R}$, $f \in \tilde{\mathbb{O}}$ et $\hat{f} = \sum_{n \geq 0} \alpha_n x^n \in \mathbb{C}[[x]]$. On dit que f admet $\hat{f}$ pour *développement asymptotique q-Gevrey d'ordre 1 dans la direction* d_θ et on notera $f \sim_{q;1}^{\theta} \hat{f}$, s'il existe $C > 0$, $A > 0$ tels que, pour tout $n \geq 0$, on ait :

$$|f(x) - \sum_{p=0}^{n-1} \alpha_p x^p| < CA^n q^{\frac{1}{2}(n^2 + (\arg_q(xe^{-i\theta}))^2)} |x|^n,$$

et ceci pour tout $x \in \tilde{D}(0; R)$ avec $R > 0$ suffisamment petit.

Si $f \sim_{q;1}^{\theta} \hat{f}$, alors $\hat{f}$ est un développement asymptotique de $\hat{f}$, au sens de Poincaré, dans un secteur de sommet $0 \in \tilde{\mathbb{C}}$ et d'ouverture finie arbitraire. On en déduit que le développement asymptotique q-Gevrey $\hat{f}$ est unique ; de plus, on a $\hat{f} \in \mathbb{C}[[x]]_{q;1}$. En notant $\mathbb{A}_{q;1}^{\theta}$ le sous-ensemble de $\tilde{\mathbb{O}}$ formé des fonctions ayant un développement asymptotique q-Gevrey d'ordre 1 dans d_θ, on obtient un morphisme d'espace vectoriel $J_{q;1}^{\theta} : \mathbb{A}_{q;1}^{\theta} \to \mathbb{C}[[x]]_{q;1}$ tel que $f \sim_{q;1}^{\theta} J_{q;1}^{\theta}(f)$ si $f \in \mathbb{A}_{q;1}^{\theta}$.

Proposition 2. – *Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a les assertions suivantes :*

1. l'application $J_{q;1}^{\theta} : \mathbb{A}_{q;1}^{\theta} \to \mathbb{C}[[x]]_{q;1}$ est surjective ;

2. étant donné $f \in \tilde{\mathbb{O}}$, on a $f \in \ker J_{q;1}^{\theta}$ si et seulement s'il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = O(|x|^\mu q^{-\frac{1}{2}(\log_q(xe^{-i\theta}))^2})$ pour tout $x \in \tilde{\mathbb{C}}$ de module suffisamment petit.

La première assertion est une version q-Gevrey du théorème de Borel-Ritt classique, et sa preuve peut être faite à l'aide de la transformée de Borel-Laplace q-analogue introduite plus loin. La seconde assertion suggère que l'on peut identifier $\ker J_{q;1}^{\theta}$ à l'ensemble des fonctions à *décroissance q-exponentielle d'ordre 1 dans la direction d_θ*. Avec le principe de Phragmën-Lindelof, on vérifie la

Proposition 3. – *Soit θ_1, θ_2 deux nombres réels distincts. On a* $\ker J_{q;1}^{\theta_1} \cap \ker J_{q;1}^{\theta_2} = \{0\}$.

Définition 4. – Soit $\theta \in \mathbb{R}$, $f \in \tilde{\mathbb{O}}$ et $\hat{f} = \sum_{n\geq 0} \alpha_n x^n \in \mathbb{C}[[x]]$.

1. On note $\hat{f} \in \mathbb{C}\{x\}_{q;1}^{\theta}$ et on dit que $\hat{f}$ *est Gq-sommable d'ordre 1, de Gq-somme f, dans la direction d_θ* s'il existe $\eta > 0$, $C > 0$, $A > 0$ tels que, pour tous $n \geq 0$ et $\vartheta \in]\theta - \eta, \theta + \eta[$, on ait :

$$|f(x) - \sum_{p=0}^{n-1} \alpha_p x^p| < CA^n q^{\frac{1}{2}(n^2 + (\arg_q(xe^{-i\vartheta}))^2)} |x|^n,$$

et ceci pour tout $x \in \tilde{D}(0; R)$ avec $R > 0$ suffisamment petit.

2. On note $\hat{f} \in \mathbb{C}\{x\}_{q;1}$ et on dit que $\hat{f}$ est *Gq-sommable d'ordre 1* si l'ensemble des directions d_θ, d'argument $\theta \in [0, 2\pi]$, dans chacune desquelles $\hat{f}$ n'est pas Gq-sommable d'ordre 1 est *fini*.

Soit $\hat{f} \in \mathbb{C}\{x\}_{q;1}^{\theta}$. On a $\hat{f} \in \mathbb{C}\{x\}_{q;1}^{\theta'}$ pour tout θ' suffisamment voisin de θ et, de la proposition 3, on déduit que la Gq-somme de $\hat{f}$ est *unique*, que l'on notera $\mathcal{S}_{q;1}^{\theta}\hat{f}$. On remarque également que $\mathbb{C}\{x\} \subset \mathbb{C}\{x\}_{q;1}^{\theta} \subset \mathbb{C}[[x]]_{q;1}$ et que $\hat{f} \in \mathbb{C}\{x\}$ si et seulement si $\hat{f}$ est Gq-sommable dans toute direction de $\tilde{\mathbb{C}}$.

Définition 5. – Soit $\hat{f} = \sum_{n\geq 0} \alpha_n x^n \in \mathbb{C}[[x]]$. On appelle *transformée de q-Borel formelle d'ordre 1 de $\hat{f}$*, notée $\hat{\mathcal{B}}_{q;1}\hat{f}$, la série $\sum_{n\geq 0} \alpha_n q^{-n(n-1)/2} \xi^n$.

Utilisant la formule de Cauchy, on vérifie que $\hat{f} \in \mathbb{C}\{x\}$ si et seulement si $\hat{\mathcal{B}}_{q;1}\hat{f}$ converge dans $\mathbb{C}$ vers une fonction entière φ vérifiant la propriété suivante : il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi(\xi) = O(|\xi|^\mu q^{\frac{1}{2}(\log_q \xi)^2})$ pour $\xi \to \infty$ dans $\mathbb{C}$ (*cf* [5]).

Définition 6. – Soit U un ouvert connexe non radialement borné de $\tilde{\mathbb{C}}$. Une fonction f définie et analytique dans U est dite *à croissance q-exponentielle d'ordre 1 et de type fini dans U* s'il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = O(|\xi|^\mu q^{\frac{1}{2}(\log_q \xi)^2})$ pour $x \in U$, $|x| \to \infty$.

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On notera $\mathbb{H}_{q;1}^{\theta}$ l'espace des germes de fonctions analytiques en $0 \in \mathbb{C}$ qui peuvent se prolonger en une fonction analytique et à croissance q-exponentielle d'ordre 1 et de type fine dans un secteur du type $\{x \in \tilde{\mathbb{C}} \ : |\arg x - \theta| < \eta\}$ avec $\eta > 0$.

Théorème 7. – *Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et soit $\hat{f} \in \mathbb{C}[[x]]_{q;1}$, φ la fonction somme de $\hat{\mathcal{B}}_{q;1}\hat{f}$.*

1. On a $\hat{f} \in \mathbb{C}\{x\}_{q;1}^{\theta}$ si et seulement si $\varphi \in \mathbb{H}_{q;1}^{\theta}$.

2. Si $\hat{f} \in \mathbb{C}\{x\}_{q;1}^{\theta}$, la Gq-somme $\mathcal{S}_{q;1}^{\theta}\hat{f}$ est donnée par la transformée de q-Laplace de φ dans la direction d_θ :

$$\mathcal{L}_{q;1}^{\theta}\varphi(x) = \frac{q^{-1/8}}{\sqrt{2\pi \log q}} \int_{d_\theta} q^{-\frac{1}{2}(\log_q \frac{x}{\xi})(\log_q \frac{x}{\xi} - 1)} \varphi(\xi) \frac{d\xi}{\xi}.$$

3. Si $\hat{f} \in \mathbb{C}\{x\}_{q;1}^{\theta}$ et $f = \mathcal{S}_{q;1}^{\theta}\hat{f}$, la fonction φ est égale à la transformée de q-Borel de f :

$$\mathcal{B}_{q;1}f(\xi) := -i\frac{q^{1/8}}{\sqrt{2\pi \log q}} \int_{\partial^+ \tilde{D}(0;r)} q^{\frac{1}{2}\log_q \frac{x}{\xi}(\log_q \frac{x}{\xi} - 1)} f(x) \frac{dx}{x},$$

où $r > 0$ est choisi assez petit et $\partial^+ \tilde{D}(0; r)$ désigne le bord positivement orienté du disque $\tilde{D}(0; r) \subset \tilde{\mathbb{C}}$.

Revenons maintenant à l'équation aux q-différences introduite au début de la Note : $\Delta y = b$ avec $\Delta = a_n \sigma_q^n + a_{n-1} \sigma_q^{n-1} + ... + a_0 \in \mathbb{C}\{x\}[\sigma_q]$, $\sigma_q y(x) = y(qx)$ et $b \in \mathbb{C}\{x\}$. On supposera que $a_0 a_n \not\equiv 0$. On note $PN(\Delta)$ le polygone de Newton de Δ qui est, par définition, l'enveloppe convexe engendrée dans $[0, n] \times [0, \infty[$ par les demi-droites ascendantes partant des points d'affixe (i, j) tels que $a_{i,j} \neq 0$, où l'on désigne par $a_{i,j}$ le coefficient de x^j dans la série entière a_i, $0 \leq i \leq n$ et $j \geq 0$.

Théorème 8. – *Soit $\Delta \in \mathbb{C}\{x\}[\sigma_q]$ un opérateur aux q-différences dont 1 est la seule pente du polygone de Newton. Soit $\hat{f} \in \mathbb{C}[[x]]$. On suppose que $\Delta \hat{f} \in \mathbb{C}\{x\}$. Alors la série $\hat{f}$ est Gq-sommable d'ordre 1.*

La preuve de ce théorème peut être obtenue à l'aide d'une factorisation *analytique* de Δ.

Lemme 9. – *Considérons $\Delta \in \mathbb{C}\{x\}[\sigma_q]$ un opérateur aux q-différences ayant k_1, k_2, ..., k_n pour pente de $PN(\Delta)$, avec $-\infty < k_1 \leq k_2 \leq ... \leq k_n < +\infty$. On suppose que $k_i \in \mathbb{Z}$ $(1 \leq i \leq n)$. Alors on a :*

$$\Delta = h_0(x)(x^{k_1}\sigma_q - \alpha_1)h_1(x)(x^{k_2}\sigma_q - \alpha_2)h_2(x)...(x^{k_n}\sigma_q - \alpha_n)h_n(x),$$

où $h_0 \in \mathbb{C}\{x\}$ (ayant en $x = 0$ la même valuation que le coefficient de σ_q^0 de Δ), $\alpha_j \in \mathbb{C}^*$, $h_j \in \mathbb{C}\{x\}$ et $h_j(0) = 1$ $(1 \leq j \leq n)$.

Soulignons enfin que, dans le théorème 8, on pourrait localiser les directions singulières de $\hat{f}$ et étudier ainsi le phénomène de Stokes ; voir [8] pour plus de détails. Le cas où $PN(\Delta)$ a plusieurs pentes sera étudié dans la Note [4], où l'on introduira la notion de *multisommabilité* q-Gevrey.

Références bibliographiques.

[1] Adams C. R., Linear q-Difference Equations, Bull. A. M. S. (1931) 361-382.

[2] Bézivin J.-P., Sur les équations fonctionnelles aux q-différences, Aequationes Mathematicae 43 (1993) 159-176.

[3] Fleinert-Jensen M., Calcul d'indices Gevrey pour des équations aux q-différences, Prépublication de l'IRMA de Strasbourg, 1993.

[4] Marotte F. et Zhang C., Sur la sommabilité des séries entières solutions formelles d'une équation aux q-différences, II (CRAS 1998).

[5] Ramis J.-P., About the growth of entire functions solutions of linear algebraic q-difference equations, Annales de la Fac. de Toulouse Série 6, Vol. I, no 1 (1992) 53-94.

[6] Ramis J.-P., Séries divergentes et théories asymptotiques, Panoramas et synthèses 0 (1993) Supplément au Bulletin de la S.M.F. 121.

[7] Trjitzinsky W.J., Analytic Theory of Linear q-Difference Equations, Acta Mathematica 61 (1933) 1-38.

[8] Zhang C., Les développements asymptotiques q-Gevrey, les séries Gq-sommables et leurs applications, Prépublication, La Rochelle (soumis pour publication à *Ann. Inst. Fourier*, 1998).

Sur la sommabilité des séries entières solutions formelles d'une équation aux q-différences, II*

Fabienne MAROTTE et Changgui ZHANG

Titre courant – Sur les équations aux q-différences, II

Résumé – Nous introduisons une version q-analogue du procédé d'accélération élémentaire d'Ecalle-Martinet-Ramis et définissons la série entière Gq-multisommable. Nous montrons que toute série entière solution formelle d'une équation aux q-différences linéaire analytique est Gq-multisommable.

On the summability of formal power series solutions of q-difference equations, II

Abstract – We introduce a q-analogous version of the elementary acceleration method of Ecalle-Martinet-Ramis and define the Gq-multisummable power series. We show that every formal power series satisfying a linear analytic q-difference equation is Gq-multisummable..

Introduction. – Dans la Note [8], nous avons introduit la notion de développement asymptotique q-Gevrey d'ordre 1 et celle de série entière Gq-sommable d'ordre 1. Nous avons obtenu un q-analogue d'un résultat de J.-P. Ramis [6] sur la solution formelle d'une équation différentielle en un point singulier irrégulier : toute série entière solution formelle d'une équation aux q-différences linéaire à coefficients analytiques en l'origine du complexe est Gq-sommable d'ordre 1 quand le polygone de Newton de l'équation n'admet qu'une unique pente égale à 1. L'objectif de la présente Note est de généraliser notre résultat au cas où le polygone de Newton a plusieurs pentes.

Nous commençons par étendre la méthode de Gq-sommation à l'ordre $s > 0$ quelconque ; nous introduisons ensuite un proécédé d'accélération et définissons la série Gq-multisommable. On verra que toute série entière solution formelle d'une équation aux q-différences linéaire analytique est Gq-multisommable ; ceci constitue une version q-analogue d'un résultat assez récent sur la sommabilité de la solution formelle d'une équation différentielle linéaire analytique ([1]).

On suppose que q est un nombre réel strictement positif. Soit les notations suivantes de [8] : $\mathbb{C}[[x]]_{q;1}$, $\mathbb{C}\{x\}^{\theta}_{q;1}$, $\mathbb{G}^{\theta}_{q;1}$, $\mathbb{H}^{\theta}_{q;1}$, $\mathcal{S}^{\theta}_{q;1}$, $\hat{\mathcal{B}}_{q;1}$, $\mathcal{B}_{q;1}$, $\mathcal{L}^{\theta}_{q;1}$, etc. Etant donnés $s > 0$ et \$ l'un des symboles $\mathbb{C}[[x]]$, $\mathbb{C}\{x\}^{\theta}$, ..., on définit $\$_{q;s}$ comme étant $\$_{q^s;1}$. Par exemple, $\mathbb{H}^{\theta}_{q;s}$ désignera l'ensemble des germes de fonctions analytiques en $0 \in \mathbb{C}$ qui peuvent se prolonger en une fonction analytique et à croissance du type $O(|\xi|^{\mu} q^{\frac{1}{2s}(\log_q x)^2})$ (dite *q-exponentielle d'ordre k et de type fini*, $k = 1/s$) dans un secteur de bissectrice d_θ alors que $\mathcal{B}_{q;s}$ et $\mathcal{L}^{\theta}_{q;s}$ exprimeront les opérateurs définis par :

$$\mathcal{B}^{\theta}_{q;s} f(\xi) := -i\frac{q^{1/(8k)}\sqrt{k}}{\sqrt{2\pi \log q}} \int_{\partial^+ \tilde{D}(0;R)} q^{\frac{k}{2}\log_q \frac{x}{\xi}(\log_q \frac{x}{\xi} - \frac{1}{k})} f(x) \frac{dx}{x},$$

$$\mathcal{L}^{\theta}_{q;s}\varphi(x) := \frac{q^{-1/(8k)}\sqrt{k}}{\sqrt{2\pi \log q}} \int_{d_\theta} q^{-\frac{k}{2}(\log_q \frac{x}{\xi})(\log_q \frac{x}{\xi} - \frac{1}{k})} \varphi(\xi) \frac{d\xi}{\xi}.$$

* La note est publiée dans *C.R.A.S.*, t. 327, Série I, p. 715–718, 1998.

On obtiendra ainsi une méthode de sommation adaptée cette fois à la solution formelle d'une équation aux q-différences ayant une seule pente égale à $1/s$ dans son polygone de Newton.

Proposition 1. – *Soit $0 < s' < s$ et $\theta \in \mathbb{R}$. On a :*

$$\mathbb{C}\{x\}_{q;s}^{\theta} \cap \mathbb{C}\{x\}_{q;s'}^{\theta} = \mathbb{C}\{x\}_{q;s}^{\theta} \cap \mathbb{C}[[x]]_{q;s'} = \mathbb{C}\{x\}.$$

Cette proposition est un résultat du type taubérien et elle peut être vérifiée à l'aide du théorème de Phragmén-Lindelöf. Dans la théorie des séries Gevrey ordinaires, on a à peu près le même énoncé. Noter que notre énoné est porté sur *une seule direction d_θ* alors que dans le cas Gevrey on utilise les séries sommables dans presque toutes les directions (*cf* [6]). Cette remarque a une conséquence importante :

Corollaire 2. – *Soit $\hat{f} := \sum_{n\geq 0} q^{n(n-1)/2}x^n$. On a $\hat{f} \in \mathbb{C}\{x\}_{q;1}$ mais, pour toute suite finie de réels strictement positifs $(s_j)_{1\leq j\leq r}$ et tout $\theta \in \mathbb{R}$, il n'existe pas de $\hat{f}_j \in \mathbb{C}\{x\}_{q;s_j}^{\theta}$ vérifiant $(\hat{f})^2 = \hat{f}_1 + ... + \hat{f}_r$.*

Cependant, la série $\hat{f}$ vérifiant formellement $xy(qx) - y(x) = -1$, le carré $(\hat{f})^2$ correspond à une équation aux q-différences linéaire à coefficients polynomiaux. On verra plus tard qu'il est Gq-multisommable d'ordre $(1, 1/2)$ (*cf* Proposition 5).

L'idée d'introduire une accélération consiste ici à combiner $\mathcal{B}_{q;s'}$ et $\mathcal{L}_{q;s}$ avec $s > s' > 0$; ceci donnera lieu à la définition de $\mathcal{A}_{q;k',k}^{\theta}$ et $\mathcal{D}_{q;k',k}^{\theta}$. Notons d'abord $\tilde{\mathbb{H}}_{q;s}^{\theta}$ le sous-ensemble de $\widetilde{\mathbb{O}}$ formé des fonctions φ vérifiant ceci : φ admet un développement asymptotique (au sens de Poincaré) en '$0 \in \tilde{\mathbb{C}}^*$' dans un secteur de bissectrice d_θ et elle peut être prolongée en une fonction analytique ayant à l'infini une croissance q-exponentielle d'ordre $k = 1/s$ et de type fini dans ce secteur. Notons aussi $\tilde{\mathbb{G}}_{q;s}^{\theta}$ le sous-ensemble de $\widetilde{\mathbb{O}}$ constitué des fonctions $\phi(\zeta)$ asymptotiquement développables en $0 \in \tilde{\mathbb{C}}^*$ dans un secteur ouvert de bissectrice d_θ et ayant une croissance angulaire du type $O(q^{\frac{k}{2}(\arg_q(\zeta e^{-i\nu}))^2})$ uniformément pour tout ν appartenant à un voisinage non vide de θ et pour tout $\zeta \in \tilde{\mathbb{C}}^*$ de module suffisamment petit. On a $\mathbb{H}_{q;s}^{\theta} \subset \tilde{\mathbb{H}}_{q;s}^{\theta}$, $\mathbb{G}_{q;s}^{\theta} \subset \tilde{\mathbb{G}}_{q;s}^{\theta}$; les transformations $\mathcal{L}_{q;s}^{\theta}$, $\mathcal{B}_{q;s}$ opèrent de façon évidente sur $\tilde{\mathbb{H}}_{q;s}^{\theta}$, $\tilde{\mathbb{G}}_{q;s}^{\theta}$ et leur relèvement sera noté respectivement $\tilde{\mathcal{L}}_{q;s}^{\theta}$, $\tilde{\mathcal{B}}_{q;s}$.

Lemme 3. – *Soit $\theta \in \mathbb{R}$, $s > s' > 0$. On pose $k = 1/s$, $k' = 1/s'$. L'application $\varphi \mapsto \mathcal{A}_{q;k',k}^{\theta}\varphi$ donnée par*

$$\mathcal{A}_{q;k',k}^{\theta}\varphi(\zeta) = \frac{\sqrt{kk'}\ q^{(k-k')/(8kk')}}{\sqrt{2(k'-k)\pi\log q}} \int_{d_\theta} q^{-\frac{kk'}{2(k'-k)}(\log_q\frac{\zeta}{\xi})(\log_q\frac{\zeta}{\xi}-1/k+1/k')}\varphi(\xi)\frac{d\xi}{\xi}$$

définit une bijection de $\tilde{\mathbb{H}}_{q;s-s'}^{\theta}$ sur $\tilde{\mathbb{G}}_{q;s-s'}$ et son inverse, noté $\mathcal{D}_{q;k',k}^{\theta}$, vérifie :

$$\mathcal{D}_{q;k',k}^{\theta}\phi(\xi) = -i\frac{\sqrt{kk'}\ q^{(k'-k)/(8kk')}}{\sqrt{2(k'-k)\pi\log q}} \int_{\partial^+\tilde{D}(0;R)} q^{\frac{k'k}{2(k'-k)}\log_q\frac{\zeta}{\xi}(\log_q\frac{\zeta}{\xi}-\frac{1}{k}+\frac{1}{k'})}\phi(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta}$$

où $\phi \in \tilde{\mathbb{G}}_{q;s-s'}^{\theta}$, $R > 0$ petit.

La vérification du lemme précédent est immédiate, d'après le théorème de Fubini. L'opérateur $\mathcal{A}_{q;k',k}^{\theta}$ sera appelé *q-accélérateur du niveau k au niveau k' dans la direction d_θ* et son inverse $\mathcal{D}_{q;k',k}^{\theta}$ *q-décélérateur du niveau k' au niveau k dans cette direction.*

A présent, on désigne par Ω^+ l'ensemble des suites finies, strictement croissantes, formées de réels strictement positifs. Par convention, on admet que $\emptyset \in \Omega^+$. On pose $\Omega^{+*} = \Omega^+ \backslash \{\emptyset\}$. On note $\vec{s}$ (resp. $[\vec{s}]$) un élément arbitraire (resp. l'ensemble des réels constituant $\vec{s}$) de Ω^+.

Définition 4. – Soit $\vec{s} := (s_1, s_2, ..., s_r) \in \Omega^{+*}$ et soit k_j l'inverse de s_j pour $j = 1, ..., r$. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $\hat{f} \in \mathbb{C}[[x]]$.

1. On dit que $\hat{f} \in \mathbb{C}[[x]]$ est *Gq-multisommable d'ordre $\vec{s}$ dans la direction d_θ* et on note $\hat{f} \in \mathbb{C}\{x\}^\theta_{q;\vec{s}}$ si les conditions suivantes sont remplies :

- $\hat{f} \in \mathbb{C}[[x]]_{q;s_r}$;
- $\hat{\mathcal{B}}_{q;s_r}\hat{f} \in \mathbb{H}^\theta_{q;s_r - s_{r-1}}$;
- $\mathcal{A}^\theta_{q;k_{r-j},k_{r-j+1}} ... \mathcal{A}^\theta_{q;k_{r-1},k_r}\hat{\mathcal{B}}_{q;s_r}\hat{f} \in \tilde{\mathbb{H}}^\theta_{q;s_{r-j}-s_{r-j-1}}$ pour j compris entre 1 et $r-2$;
- $\mathcal{A}^\theta_{q;k_1,k_2} ... \mathcal{A}^\theta_{q;k_{r-1},k_r}\hat{\mathcal{B}}_{q;s_r}\hat{f} \in \tilde{\mathbb{H}}^\theta_{q;s_1}$.

2. Si $\hat{f} \in \mathbb{C}\{x\}^\theta_{q;\vec{s}}$, on appelle *Gq-somme d'ordre $\vec{s}$ de $\hat{f}$* la fonction définie de la façon suivante :

$$\mathcal{S}^\theta_{q;\vec{s}}\hat{f} := \tilde{\mathcal{L}}^\theta_{q;s_1}\mathcal{A}^\theta_{q;k_1,k_2} ... \mathcal{A}^\theta_{q;k_{r-1},k_r}\hat{\mathcal{B}}_{q;s_r}\hat{f}.$$

3. La série $\hat{f}$ est dite *Gq-multisommable d'ordre $\vec{s}$* si l'ensemble des directions d_θ d'argument $\theta \in [0, 2\pi]$ dans chacune desquelles on a $\hat{f} \notin \mathbb{C}\{x\}^\theta_{q;\vec{s}}$ est fini. Dans ce cas, on dit aussi que $\hat{f} \in \mathbb{C}\{x\}_{q;\vec{s}}$.

L'ensemble $\mathbb{C}\{x\}^\theta_{q;\vec{s}}$ constitue un $\mathbb{C}\{x\}$-module stable par l'opérateur aux q-différences σ_q. De plus, on a $\mathbb{C}\{x\}^\theta_{q;\vec{s}} \subset \mathbb{C}\{x\}^\theta_{q;\vec{s}'}$ si $[\vec{s}] \subset [\vec{s}']$; et la proposition 1 se généraliserait de façon évidente.

Proposition 5. – *Soit $s > 0$, $\theta \in \mathbb{R}$ et soit $\hat{f}$, $\hat{g} \in \mathbb{C}\{x\}^\theta_{q;s}$. On a $\hat{f}\hat{g} \in \mathbb{C}\{x\}^\theta_{q;s/2,s}$.*
De plus, $\mathcal{S}^\theta_{q;s/2,s}(\hat{f}\hat{g}) = \mathcal{S}^\theta_{q;s}\hat{f}\ \mathcal{S}^\theta_{q;s}\hat{g}$.

La preuve de la proposion précédente peut obtenir à l'aide d'une formule du produit de q-convolution. Cependant, nous ne savons pas si le produit de deux séries Gq-multisommables reste encore Gq-multisommable.

Nous énonçons maintenant le résultat central de notre Note.

Théorème 6. – *Toute série entière solution formelle d'une équation aux q-différences linéaire à coefficients analytiques en $0 \in \mathbb{C}$ est Gq-multisommable et le multi-ordre de sommabilité est donné par le polygone de Newton.*

En effet, d'après le lemme 9 de [8], toute équation aux q-différences linéaire analytique peut se factoriser comme produit d'opérateurs d'ordre 1 du type $h(x)(x^k\sigma_q - \alpha)$, où $h(x) \in \mathbb{C}\{x\}$, $k \in \mathbb{Q}$ (après une transformation prélimiaure sur x, on peut supposer que $k \in \mathbb{Z}$) et $\alpha \in \mathbb{C}^*$. Pour terminer la preuve du théorème, le lemme suivant joue un rôle important.

Lemme 7. – *Soit $\theta \in \mathbb{R}$, $\vec{s} = (s_1, ..., s_r) \in \Omega^{+*}$, $\hat{f} \in \mathbb{C}\{x\}^\theta_{q;\vec{s}}$ et $\hat{g} \in \mathbb{C}[[x]]$. On suppose que $(\hat{\mathcal{B}}_{q;s_1}\hat{g})(\xi) = (\hat{\mathcal{B}}_{q;s_1}\hat{f})(\xi)/(1-\xi)$. Alors $\hat{g} \in \mathbb{C}\{x\}^\theta_{q;\vec{s}}$ si $\theta \neq 0 \mod 2\pi$.*

Dans le théorème 6, on peut préciser les directions singulières et étudier le phénomène de Stokes ; pour plus de détails, voir [3]. Nous souhaiterions que notre travail puisse servir à l'étude locale du groupe de Galois associé à une équation aux q-différences ([4], [5, Chap. 12]).

Références bibliographiques.

[1] Balser W., Braaksma B.J.L., Ramis J.-P. et Sibuya Y., Multisummability of formal power series solutions of linear ordinary differential equations, Asymptotic Analysis 5 (1991) 27-45.

[2] Ecalle J., Introduction aux fonctions analysables et preuve constructive de la conjecture de Dulac, Hermann, Paris, 1992.

[3] Marotte F. et Zhang C., Multisommabilité des séries entières solutions formelles d'une équation aux q-différences linéaire analytique, Prépublication, La Rochelle (soumis pour publication à Ann. Inst. Fourier (1998)).

[4] Fahim A., Ramis J.-P. et Zhang C., Phénomène de Stokes et groupe de Galois aux q-différences local, en préparation.

[5] Van der Put M. et Singer M.F., Galois Theory of Difference Equations, Lect. Notes in Math. 1666 (1997), Springer.

[6] Ramis J.-P., Les séries k-sommables et leurs applications, Complex Analysis, Microlocal Calculus and Relativistic Quantum Theory, Lecture Notes in Physics 126 (1980) 178-199.

[7] Wallisser R., Über ganze Functionen, die in einer geometrischen Folge ganze Werte annehmen, Monatshefte für Math. 100 (1985) 329-335.

[8] Zhang C., Sur la sommabilité des séries entières solutions formelles d'une équation aux q-différences, I, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 327, Série I (1998) 349-352.

Transformations de q-Borel-Laplace au moyen de la fonction thêta de Jacobi*

Changgui ZHANG

Résumé. Dans cette Note, nous présentons une notion de développement asymptotique adaptée aux séries entières q-Gevrey d'ordre un. Nous montrons que cette asymptotique est naturellement liée à la fonction thêta de Jacobi, q-analogue de la fonction exponentielle. Une méthode de resommation en est ainsi déduite.

q-Borel-Laplace transforms by means of the Jacobi theta function

Abstract. In this paper, we present a notion of asymptotic expansion adapted for one order q-Gevrey power series. It's shown that this notion is naturally related to the Jacobi theta function, which is a q-analog of the usual exponential function. A summation method is then obtained.

Introduction – Dans tout ce qui suit, q désigne un nombre réel strictement supérieur à un. Dans [4a], on a introduit une notion de développement asymptotique adaptée aux séries q-Gevrey d'ordre un. Cette asymptotique est en quelque sorte une asymptotique "exacte", compte tenu de la propriété remarquable suivante. Si une fonction admet le même développement asymptotique dans deux directions distinctes, alors elle est uniquement déterminée. Par conséquent, d'une façon tout à fait analogue à ce que l'on a fait avec la notion de développement asymptotique Gevrey de Watson, on développe un procédé de resommation basé sur cette notion d'asymptoticité q-analogue. Ce dernier utilise, en effet, un formalisme fort similaire à la méthode de Borel-Laplace, en faisant intervenir la fonction $q^{\frac{1}{2}\log_q^2 x(\log_q x-1)}$ ($\log_q x = \frac{\log x}{\ln q}$) comme q-analogue de la fonction exponentielle.

Comme l'a remarqué J. Sauloy dans sa thèse [3], la fonction thêta de Jacobi ($p = 1/q$)

$$\theta(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} q^{-n(n-1)/2} x^n = \prod_{n=0}^{+\infty} (1-p^{n+1})(1+xp^n)(1+p^{n+1}/x)$$

non seulement joue le rôle de la fonction "q-exponentielle" dans la résolution formelle d'une équation aux q-différences, mais surtout présente un aspect "elliptique" : *uniforme*, quasi-invariante pour la q-différentielle $f(x) \mapsto f(qx)$. Nous avons ainsi étudié, dans l'article [4b], sur l'exemple de la solution formelle de l'équation aux q-différences vérifiée par la fonction q-Gamma de Jackson, comment sommer une série q-Gevrey à l'aide de la fonction θ de Jacobi. Cette étude donne lieu à un nouveau q-analogue de la fonction Gamma ; et la méthode exploitée est succeptible d'être généralisée – c'est ce que nous voudrions montrer dans la présente Note.

Dans la suite, on commence par une notion de développement asymptotique Gevrey q-analogue, beaucoup plus faible que celle proposée dans [4a]. On définit ensuite une transformation analytique de Borel q-analogue au moyen de la fonction θ. En se restreignant

* La note est publiée dans *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 331, Série I, p. 31-34, 2000.

à la classe des séries Gq-sommables au sens de [4a], on introduit une transformation de Laplace q-analogue avec la fonction θ et on obtient alors une nouvelle méthode de resommation. Les résultats principaux de cette Note sont le théorème 8 et son corollaire 9 ; on trouvera des démonstrations de ces résultats dans la prépublication [4c] (http://www.univ-lr.fr/Labo/MATH/).

Premières notations – Sauf mention expresse du contraire, on entend par secteur ouvert tout secteur limité sur la surface de Riemann du logarithme notée $\tilde{\mathbf{C}}^*$ de la forme

$$V = \{x \in \tilde{\mathbf{C}}^* : 0 < |x| < R, \alpha < \arg x < \beta\}, \quad R > 0,\ -\infty < \alpha < \beta < +\infty.$$

On utilisera les notations suivantes (*cf* [4a]) :

– $\mathbf{C}[[x]]_{q;1}$ l'espace des séries entières q-Gevrey d'ordre un, c'est-à-dire, l'ensemble des séries entières $\hat{f} = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ dont la transformée de q-Borel formelle d'ordre un

$$\hat{\mathcal{B}}_{q;1}\hat{f}(\xi) := \sum_{n\geq 0} q^{-n(n-1)/2}\xi^n$$

admet un rayon de convergence non nul.

– $\mathbf{H}^{\alpha}_{q;1}$ l'ensemble des germes de fonctions analytiques en l'origine du plan complexe qui peuvent être prolongés en une fonction analytique, admettant une croissance q-exponentielle d'ordre un et de type fini (*i.e.* majorée par $C|x^{\mu}e^{(\log x)^2/2\ln q}|$, avec $C > 0$, $\mu \in \mathbf{R}$ des constantes ; *cf* [2]) dans un secteur illimité contenant la direction d'argument α.

– $\mathbf{C}\{x\}^{\alpha}_{q;1}$ l'ensemble des séries entières $\hat{f}$ telles que $\hat{\mathcal{B}}_{q;1}\hat{f} \in \mathbf{H}^{\alpha}_{q;1}$.

– $\mathbf{E}_{q;1} = \cap_{\alpha\in[0,2\pi]}\mathbf{H}^{\alpha}_{q;1}$; $\mathbf{E}_{q;-1}(V)$ l'ensemble des fonctions à décroissance q-exponentielle d'ordre un et de type fini dans un secteur V.

Définition 1 – Soient f une fonction analytique sur un secteur ouvert V et $\hat{f} = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière. On dit que f admet $\hat{f}$ pour *développement asymptotique Gevrey d'ordre* $(q;1)$ *sur* V si, pour tout sous-secteur U relativement compact de V, il existe des constantes A, $C > 0$ telles que, $\forall x \in U$ et $\forall n \in \mathbf{N}$,

$$|f(x) - \sum_{m=0}^{n-1} a_m x^m| < CA^n q^{n(n-1)/2}|x|^n.$$

Lorsque c'est le cas, on note $f \in \mathbf{A}_{q;1}(V)$ et $f \sim^{V}_{q;1} \hat{f}$.

Soit $T : \mathbf{A}_{q;1}(V) \to \mathbf{C}[[x]]_{q;1}$ l'application “Série de Taylor” telle que $f \sim^{V}_{q;1} T(f)$ pour tout $f \in \mathbf{A}_{q;1}(V)$; elle est surjective et $\ker T = \mathbf{E}_{q;-1}(V)$, d'après [4a] ; on en déduit que l'application T induit un isomorphisme entre les $\mathbf{C}$-espaces vectoriels $\mathbf{A}_{q;1}(V)/\mathbf{E}_{q;-1}(V)$ et $\mathbf{C}[[x]]_{q;1}$.

Si V est un secteur ouvert d'ouverture $> 2\pi$, notons $V_- = \{x \in V : xe^{2\pi i} \in V\}$. Pour tout élément $f \in \mathbf{A}_{q;1}(V)$, on pose $\operatorname{var} f(x) = f(xe^{2\pi i}) - f(x)$ si $x \in V_-$; on a $\operatorname{var} : \mathbf{A}_{q;1}(V) \to \mathbf{E}_{q;-1}(V_-)$. En utilisant un argument classique du genre Cauchy-Heine (*cf* [1]), on peut démontrer le résultat suivant.

Proposition 2 – *Soient $\alpha \in \mathbf{R}$ et $\mathcal{V}^\alpha$ la famille des secteurs ouverts bissectés par la direction d'argument α et ayant chacun une ouverture $> 2\pi$; posons*

$$\mathbf{A}_{q;1}^\alpha = \cup_{V\in\mathcal{V}^\alpha}\mathbf{A}_{q;1}(V), \quad \mathbf{E}_{q;-1}^\alpha = \cup_{V\in\mathcal{V}^\alpha}\mathbf{E}_{q;-1}(V_-).$$

Alors l'application var *induit un isomorphisme entre les espaces vectoriels $\mathbf{A}_{q;1}^\alpha/\mathbf{C}\{x\}$ et $\mathbf{E}_{q;-1}^\alpha$.*

Introduisons maintenant une transformation de Borel analytique sur $\mathbf{A}_{q;1}^\alpha$. Soit V un secteur ouvert d'ouverture $> 2\pi$, bissecté par la direction d'argument α ; à tout point $a = |a|e^{(\alpha-\pi)i}$ situé sur la bissectrice du secteur V_- on associe deux chemins $[0,a]$, γ_a définis dans V comme suit. On note $[0,a]$ celui allant de l'origine vers le point a suivant la bissectrice de V_- ; γ_a celui paramétrisé par $[0,2\pi] \to V$, $t \mapsto |a|e^{(\alpha-\pi+t)i}$.

Définition 3 – Si $f \in \mathbf{A}_{q;1}(V)$, on appelle *transformée de Borel d'ordre un de f*, notée $\mathcal{B}_{q;1}f$, la fonction définie par :

$$\mathcal{B}_{q;1}f(\xi) = \frac{1}{2\pi i}\int_{[0,a]}\theta(\frac{\xi}{x})\mathrm{var}f(x)\frac{dx}{x} + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_a}\theta(\frac{\xi}{x})f(x)\frac{dx}{x}.$$

Désignons par $\theta_0(x)$ la fonction somme de la série $\sum_{n\geq 0} q^{-n(n-1)/2}x^n$; du fait que $x \mapsto \theta(\frac{\xi}{x}) - \theta_0(\frac{\xi}{x})$ est une fonction entière, la définition 3 est équivalente à celle-ci :

$$\mathcal{B}_{q;1}f(\xi) = \frac{1}{2\pi i}\int_{[0,a]}\theta_0(\frac{\xi}{x})\mathrm{var}f(x)\frac{dx}{x} + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_a}\theta_0(\frac{\xi}{x})f(x)\frac{dx}{x}.$$

Lemme 4 – *La fonction $\mathcal{B}_{q;1}f$ ci-dessus est définie et analytique au voisinage de l'origine du plan compelxe et indépendante du choix du point a sur la bissectrice de V_-.*

En outre, si $f \sim_{q;1}^V \hat{f}$, alors les $\mathcal{B}_{q;1}f$, $\hat{\mathcal{B}}_{q;1}\hat{f}$ sont égaux dans $\mathbf{C}\{\xi\}$.

Proposition 5 – *(i) $\mathcal{B}_{q;1}f = \mathcal{B}_{q;1}g$ si et seulement si $f - g \in \mathbf{E}_{q;-1}^\alpha$.*

(ii) Si f est la Gq-somme de $\hat{f} \in \mathbf{C}\{x\}_{q;1}^\alpha$, alors la transformée $\mathcal{B}_{q;1}f$ définie ci-dessus coïncide avec celle calculée au moyen de la fonction q-exponentielle $q^{\frac{1}{2}\log_q x(\log_q x-1)}$ dans [4a].

Soient $\varphi \in \mathbf{H}_{q;1}^\alpha$ et $\pi_q = \ln q\prod_{n\geq 0}(1-q^{-n-1})^{-1}$; on pose :

$$\mathbf{L}_{q;1}^\alpha\varphi(x) = \frac{1}{\pi_q}\int_0^{\infty e^{i\alpha}}\frac{\varphi(\xi)}{\theta(\frac{\xi}{x})}\frac{d\xi}{\xi},$$

l'intégrale étant prise le long la demi-droite issue de l'origine de $\mathbf{C}$ et ayant α pour argument.

Lemme 6 – *Si $\varphi \in \mathbf{H}_{q;1}^\alpha$ et si $\varphi = \hat{\mathcal{B}}_{q;1}\hat{f}$ ($\hat{f} \in \mathbf{C}\{x\}_{q;1}^\alpha$), alors $\mathbf{L}_{q;1}^\alpha\varphi$ définit un élément de $\mathbf{A}_{q;1}^\alpha$ qui admet $\hat{f}$ pour développement asymptotique.*

Par conséquent, on a $\mathbf{L}_{q;1}^\alpha\mathcal{B}_{q;1}f = f$ et $\mathcal{B}_{q;1}\mathbf{L}_{q;1}^\alpha\varphi = \varphi$ pour tout $f \in \mathbf{L}_{q;1}^\alpha(\mathbf{H}_{q;1}^\alpha)$ et tout $\varphi \in \mathbf{H}_{q;1}^\alpha$ respectivement.

Définition 7 – L'application $\mathbf{L}_{q;1}^\alpha : \mathbf{H}_{q;1}^\alpha \to \mathbf{A}_{q;1}^\alpha$ est appelée *transformation de q-Laplace analytique d'ordre un relative à θ dans la direction d'argument α.*

Pour tout $\hat{f} \in \mathbf{C}\{x\}_{q;1}^{\alpha}$, la fonction $\mathbf{L}_{q;1}^{\alpha}\hat{\mathcal{B}}_{q;1}\hat{f}$ sera notée $\mathbf{S}_{q;1}^{\alpha}\hat{f}$ et sera appelée *la θ-somme de $\hat{f}$ dans la direction d'argument* α. Notons d'abord que l'application $\mathbf{L}_{q;1}^{\alpha}$ envoie $\mathbf{E}_{q;1}$ sur $\mathbf{C}\{x\}$, quel que soit $\alpha \in \mathbf{R}$; elle n'est pas surjective de $\mathbf{H}_{q;1}^{\alpha}$ vers $\mathbf{A}_{q;1}^{\alpha}$.

Théorème 8 – *Soient $\varphi \in \mathbf{H}_{q;1}^{\alpha}$ et $f = \mathbf{L}_{q;1}^{\alpha}\varphi$. On a :*

$$\mathrm{var} f(x) = \frac{2\pi i}{\pi_q} \sum_{n \in \mathbf{Z}} (-1)^n q^{-n(n+1)/2} \varphi(-q^n x)$$

pour tout x élément d'un germe de secteur ouvert V_- bissecté par la direction d'argument $(\alpha - \pi)$.

De plus, f est l'unique élément de $\mathbf{A}_{q;1}^{\alpha}$ ayant $\hat{f}$ pour développement asymptotique et dont la variation soit donnée par la formule ci-dessus.

Posons alors $U^{\alpha} : \mathbf{H}_{q;1}^{\alpha} \to \mathbf{E}_{q;-1}^{\alpha}$ le composé de $\mathbf{L}_{q;1}^{\alpha}$ avec var. On a $U^{\alpha}(\varphi)(x) = \mathbf{S}_{q;1}^{\alpha}\hat{f}(xe^{2\pi i}) - \mathbf{S}_{q;1}^{\alpha}\hat{f}(x)$ si $\varphi = \hat{\mathcal{B}}_{q;1}\hat{f}$ avec $\hat{f} \in \mathbf{C}\{x\}_{q;1}^{\alpha}$; ceci implique directement le résultat suivant.

Corollaire 9 – *On a $U^{\alpha}(\varphi) = 0$ si et seulement si $\varphi \in \mathbf{E}_{q;1}$.*

En particulier, U^{α} annule tout élément de $\mathbf{C}[x]$.

Si $f = \mathbf{S}_{q;1}^{\alpha}\hat{f}$ ($\hat{f} \in \mathbf{C}\{x\}_{q;1}^{\alpha}$) et $g \in \mathbf{C}\{x\}$, alors $\mathrm{var}(fg) = (\mathrm{var} f)g$; on en déduit :

Corollaire 10 – *Si $\hat{f} \in \mathbf{C}\{x\}_{q;1}^{\alpha}$ et $g \in \mathbf{C}\{x\}$, alors $\mathbf{S}_{q;1}^{\alpha}(g\hat{f}) = g\mathbf{S}_{q;1}^{\alpha}(\hat{f})$.*

Exemples 11 – La série entière $\sum_{n\geq 0}(-1)^n q^{n(n-1)/2} x^n$ est solution formelle de l'équation $xy(qx)+y(x) = 1$; sa transformée de q-Borel formelle d'ordre un notée φ vaut $\frac{1}{1+\xi}$. Si $x \in \mathbf{C}$ vérifie $q^n x \neq 1$ pour tout $n \in \mathbf{Z}$, on a, par Cauchy :

$$U^{\alpha}(\varphi)(x) = -\frac{2\pi i}{\pi_q}\frac{1}{\theta(-\frac{1}{x})} = -\frac{2\pi i}{\pi_q}\frac{1}{\theta(-\frac{x}{q})},$$

laquelle est solution de l'équation homogène associée $xy(qx) + y(x) = 0$.

Considérons enfin le cas où φ possède un pôle multiple, et posons par exemple $\varphi = \frac{1}{(\xi+1)^2}$. Avec la formule des résidus, on obtient :

$$U^{\alpha}(\varphi)(x) = -\frac{2\pi i}{\pi_q}\frac{\theta'(-\frac{1}{x})}{x\theta^2(-\frac{1}{x})} = \frac{2\pi i}{q\pi_q}\frac{x\theta'(-\frac{x}{q})}{\theta^2(-\frac{x}{q})}.$$

Soit $\hat{f} = \hat{\mathcal{L}}_{q;1}\varphi$, qui est solution fromelle de $(x\sigma_q + 1)^2 y = 1$. La fonction $U^{\alpha}(\varphi)$ est solution de l'équation homogène $(x\sigma_q + 1)^2 y = 0$, qui se transforme, avec $y = z/\theta(-\frac{x}{q})$, en celle-ci : $(\sigma_q - 1)^2 z = 0$; par là on comprend mieux la présence dans $U^{\alpha}(\varphi)$ de la fonction logarithme q-analogue $\frac{x\theta'(-\frac{x}{q})}{\theta(-\frac{x}{q})}$ définie dans la Thèse [3] de J. Sauloy.

Références bibliographiques

[1] B. Malgrange, Sommation des séries divergentes, *Expositiones Mathematicae*, 13 (1995), no 2-3, 163-222.

[2] J.P. Ramis, About the growth of entire functions solutions of linear algebraic q-difference equations, *Annales de la Fac. de Toulouse*, Série 6, Vol. I, 1 (1992), 53-94.

[3] J. Sauloy, Théorie de Galois des équations aux q-différences fuchsiennes, *Thèse de Toulouse*, 1999.

[4] C. Zhang, a : Développements asymptotiques q-Gevrey et séries Gq-sommables, *Ann. Inst. Fourier*, 49-1 (1999), 227-261 ; b : Sur la fonction q-Gamma de Jackson, *Aequationes Math.*, à paraître ; c : La fonction thêta de Jacobi et la sommabilité des séries entières q-Gevrey, I, *Prépublication de La Rochelle*, 00-3 (2000).