Équations aux q-différences

L. Di Vizio, J-P. Ramis, J. Sauloy*, C. Zhang†

1. Introduction

Une équation différentielle ordinaire est une relation $G(x; f, \dots, f^{(n)}) = 0$ entre une fonction inconnue f et ses transformées par itération de « l'automorphisme infinitésimal » $f \mapsto \frac{d}{dx} f$. De façon analogue on peut s'intéresser au cas où l'automorphisme infinitésimal est remplacé par un véritable automorphisme φ d'un domaine en x. Le cas le plus simple et le seul que nous considérerons ici, est celui où x varie dans la sphère de Riemann (ou plus généralement un ouvert de celle-ci invariant par φ ou un germe de voisinage d'un point fixe de cet automorphisme) et où de plus l'automorphisme φ est une homographie. On obtient alors des équations fonctionnelles $G(x; f, \dots, \sigma^n f) = 0$ (où l'on a posé $\sigma f(x) = f(\varphi(x))$). Nous nous intéresserons uniquement au cas où $G(x; y_0, \dots, y_n)$ est analytique en toutes les variables sur un domaine réel ou complexe ou p-adique. Nous parlerons alors d'équations « aux différences » analytiques. Par conjugaison homographique sur x on se ramène immédiatement aux deux cas suivants :

– $\varphi(x) = qx$, où $q \in C^*$ (C est le corps de base) : on a une équation aux q-différences ;
– $\varphi(x) = x + 1$: on a une équation aux différences (on dit aussi aux différences finies).

Le premier cas correspond à une homographie φ à deux points fixes distincts, le second à une homographie φ à point fixe double. Le cas générique est donc le premier et il est raisonnable qu'il soit (bien que moins classique) plus simple que le second. Nous noterons

$$\sigma_q f(x) = f(qx) \quad \text{et} \quad \tau_\varepsilon f(x) = f(x + \varepsilon).$$

On retrouve le cas différentiel par « passage à la limite continue » ou « confluence » :

$$\delta_q = \frac{\sigma_q - 1}{q - 1} \longrightarrow x\frac{d}{dx}, \text{ lorsque } q \to 1,$$

et

$$\Delta_\varepsilon = \frac{\tau_\varepsilon - 1}{\varepsilon} \longrightarrow \frac{d}{dx}, \text{ lorsque } \varepsilon \to 0.$$

* * *

*Lucia Di Vizio, Jean-Pierre Ramis, Jacques Sauloy, Laboratoire Emile Picard, U.F.R. M.I.G., 118, route de Narbonne, 31062 Toulouse CEDEX 4
†Changgui Zhang, Laboratoire AGAT, U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées, 59655 Villeneuve d'Ascq CEDEX

L'étude des équations aux q-différences commence au XVIII$^{\text{e}}$ siècle avec Euler dans le cadre de problèmes de dénombrement en théorie des nombres (*partitio numerorum*). Une étape importante est due à Heine qui introduit les q-analogues des fonctions hypergéométriques d'Euler et Gauss : les fonctions hypergéométriques basiques qui sont solutions d'équations aux q-différences linéaires algébriques du second ordre, analogues des équations différentielles hypergéométriques classiques (*cf.* 2.2). Il faut citer ensuite les travaux de Jacobi : ses fonctions thêta et sa célèbre formule du triple produit jouent un rôle central dans la théorie (*cf.* §3 et §4).

Considérons, par exemple, la série binomiale, que nous écrivons ici en utilisant la notation classique des séries hypergéométriques :

$$ {}_1F_0(\alpha;-;x) \underset{def}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\alpha)_n}{n!} x^n, $$

où $(\alpha)_n = \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)$ est le symbole de Pochhammer. Elle est solution de l'équation différentielle

$$ (1-x)y' - \alpha y = 0, \tag{1.0.1} $$

ce qui permet de démontrer le théorème binomial :

$$ {}_1F_0(\alpha;-;x) = (1-x)^{-\alpha}. $$

Il existe un q-analogue de cette identité (Cauchy 1843, Heine, *cf.* [GR90, 1.3]). En effet la série ${}_1F_0(\alpha;-;x)$ peut être « déformée » de la façon suivante :

$$ {}_1\Phi_0(a;-;q,x) \underset{def}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(a;q)_n}{(q;q)_n} x^n, $$

où l'on a posé, pour $q \in \mathbb{C}$, $|q| < 1$ et $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$:

$$ (a;q)_n = \prod_{i=0}^{n-1} (1 - aq^i). $$

Cette série fait partie de la famille des séries hypergéométriques basiques introduites par Heine. C'est une déformation de la précédente en ce sens que, si l'on impose $a = q^\alpha$, alors les coefficients de ${}_1\Phi_0$ tendent terme à terme vers ceux de ${}_1F_0$ lorsque $q \to 1$. Par ailleurs, elle est solution de l'équation aux q-différences

$$ (1-ax)y(qx) - (1-x)y(x) = 0, \tag{1.0.2} $$

tout comme la fonction méromorphe définie par

$$ \frac{(ax;q)_\infty}{(x;q)_\infty} \underset{def}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{(ax;q)_n}{(x;q)_n}, $$

ce qui permet de démontrer le théorème q-binomial :

$$ {}_1\Phi_0(a;-;q,x) = \frac{(ax;q)_\infty}{(x;q)_\infty}. $$

L'idée de « déformation » peut être précisée comme suit : pour $|x| < 1$, la *fonction* ${}_1\Phi_0(a;-;q,x)$ tend vers la *fonction* ${}_1F_0(\alpha;-;x)$ lorsque $q \to 1$. On peut aussi remarquer que l'équation fonctionnelle (1.0.2), réécrite en utilisant l'opérateur δ_q, tend vers l'équation (1.0.1) lorsque $q \to 1$ (toujours avec $a = q^{\alpha}$). Le lien général entre ces deux « confluences » (des équations et de leurs solutions) sera explicité plus loin.

* * *

Reprenons notre bref historique. Après Jacobi, on retrouve les équations aux q-différences chez Poincaré et Picard, puis Ramanujan (cf. en particulier le *Lost Notebook*), G. Watson... puis un peu plus tard (et apparemment dans le cadre de motivations assez différentes) chez G. Birkhoff et certains de ses élèves. On aura une bonne idée de l'histoire du sujet, de son intérêt et de l'ampleur du travail qu'il a suscité au cours des siècles en feuilletant la considérable bibliographie de [GR90]. Ceci étant, il est clair que ce thème a été largement oublié et a presque totalement disparu du courant dominant des mathématiques pendant un bon demi-siècle après la fin des années quarante.

La situation a commencé à changer il y a environ dix ans et apparemment pour des raisons très variées, dans le cadre de divers courants de recherche émergents (ou réémergents...) :
– q-combinatoire, q-analogues des polynômes orthogonaux ;
– phénomènes aléatoires discrets ;
– groupes quantiques, représentations ;
– physique théorique (travaux de Baxter, discrétisations, déformations...) ;
– arithmétique (q-identités, transcendance, exponentielles en caractéristique positive) ;
....
Il y a ainsi aujourd'hui un foisonnement impressionnant de travaux en mathématique et physique faisant intervenir des équations aux q-différences (souvent à plusieurs variables et parfois non linéaires). Il est donc assez paradoxal de constater que le sujet manquait jusqu'à une date très récente de fondations solides, même dans le cas le plus simple des équations linéaires ordinaires. Ceci est en fait similaire à ce qui s'est passé pour les équations différentielles ordinaires au XX^e siècle : entre la fin des années quarante et le début des années soixante-dix le sujet fut considéré comme clos et sans grand intérêt autre qu'historique (cf. par exemple sa « densité bourbachique » presque nulle). La théorie des équations différentielles ordinaires analytiques a été d'abord renouvelée par la « redécouverte » des équations du type de Fuchs, puis par celle des équations à singularités irrégulières et de tous les problèmes difficiles et non résolus qu'elles posaient. Un retour à des idées essentielles de Birkhoff (en particulier à son article de 1913 sur le célèbre problème de Riemann-Hilbert [Bir13]) a joué un rôle central dans les progrès très importants faits à la fin du XX^e siècle sur le sujet. Pour les équations aux q-différences l'histoire se répète avec quelque retard. Là aussi le retour à Birkhoff a joué un rôle essentiel. Nous nous proposons d'expliquer dans cet article comment la récente résolution complète d'une série de questions posées par G. Birkhoff en 1941 (peu avant sa mort) fournit une base raisonnable pour la théorie des équations aux q-différences linéaires analytiques et ouvre une série d'interrogations que nous trouvons assez passionnantes vers

la théorie de Galois, l'arithmétique, la géométrie non-commutative... Nous voudrions en particulier convaincre le lecteur qu'au delà de formules que l'on peut trouver un peu décourageantes (faute d'avoir le talent de Ramanujan ou des outils performants de calcul formel [Chy98]) se dessine une assez jolie géométrie nouvelle greffée sur la géométrie algébrique classique.

> Up to the present time, the theory of linear q-difference equations has lagged noticeably behind the sister theories of linear difference and differential equations. In the opinion of the autors, the use of the canonical system, as formulated above in a special case, is destined to carry the theory of q-difference equations to a comparable degree of completeness. This program includes in particular *the complete theory of convergence and divergence of formal series, the explicit determination of the essential transcendental invariants (constants in the canonical form), the inverse Riemann theory both for the neighborhood of $x = \infty$ and in the complete plane (case of rational coefficients), explicit integral representation of the solutions, and finally the definition of q-sigma periodic matrices, so far defined essentially only in the case* $n = 1$. Because of its extensiveness this material cannot be presented here.
>
> G.D. Birkhoff et P.E. Guenther, 1941

Au delà de l'achèvement de ce programme, pour $|q| \neq 1$, se posent de nombreuses questions naturelles. En voici deux :

– Quelle est la relation entre les invariants algébriques et transcendants « de Birkhoff » (invariants locaux, matrice de connection de Birkhoff, q-Stokes) et la théorie de Galois aux q-différences ([vdPS97]) ? (Rappelons que dans le cas différentiel la question est totalement élucidée : caractère galoisien de la monodromie et des multiplicateurs de Stokes, théorèmes de Zariski-densité de Schlesinger et Ramis [Ram93].)

– Y a-t-il confluence des q-invariants vers les invariants différentiels quand on « passe à la limite continue » pour $q \to 1$ dans des conditions raisonnables.

Ces deux problèmes sont complètement résolus dans le cas fuchsien. (Notons par exemple que dans ce cas la q-monodromie locale en 0 ou ∞ s'interprète à l'aide d'un fibré plat sur la courbe elliptique $\mathbf{C}^*/q^{\mathbf{Z}}$ [Sau02c].) La théorie reste incomplète dans le cas irrégulier.

* * *

Dans la dernière partie de cet article, nous changeons de point de vue et dirigeons notre attention vers des problèmes de nature arithmétique. L'étude arithmétique des séries solutions d'équations aux q-différences n'est pas complètement nouvelle ; cependant, nous ne disposons pas d'une théorie systématique. La question a été soulevée recemment par Y. André dans [And00a], [And00b], où plusieurs questions dans cette direction restent sans reponse. Les résultats dont nous parlerons au §5 signifient qu'un analogue naïf de la théorie differentielle ne donne que des objets triviaux. En autres termes, une théorie arithmétique des équations aux q-différence ne peut être un simple analogue de la théorie différentielle. Un objectif serait d'avoir un cadre dans lequel étudier la série de Kontsevitch

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^n)$$

ou des séries provenant du ***Lost Notebook*** de Ramanujan, comme

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{q^{n(n-1)/2}}{(1+q)\dots(1+q^n)}.$$

2. Bréviaire

Nous considérerons des équations aux q-différences linéaires d'ordre n :

$$P.f(x) \underset{def}{=} a_0(x)f(q^nx)+a_1(x)f(q^{n-1}x)+\cdots+a_n(x)f(x)=0, \tag{2.0.3}$$

où P désigne l'opérateur aux q-différences

$$\sum_{i=0}^{n} a_i\ \sigma_q^{n-i},$$

que l'on suppose, sans perte de généralité, non dégénéré : $a_0a_n \neq 0$. Les a_i sont éléments d'un anneau de fonctions K : fractions rationnelles sur un corps de coefficients C, fonctions analytiques ou méromorphes sur un domaine convenable, voire séries de Laurent formelles... et cet anneau est muni de l'automorphisme σ_q qui, à $f(x)$, associe $f(qx)$.

Les éléments σ_q-invariants de K, *i.e.* les solutions de l'équation $\sigma_q f = f$ forment un sous-anneau K^{σ_q}, appelé l'*anneau des constantes* de K. Lorsque K est un corps, K^{σ_q} en est un sous-corps. Ce sera le cas aux §3 et §4, et l'on aura alors $K^{\sigma_q}=\mathbb{C}$, le corps des coefficients. Il en est de même dans les deux exemples suivants, où l'on considère le corps $K=\mathbb{C}(x)$.

Exemple 2.1. L'équation $\sigma_q f = f$, équivalente à l'équation $\delta_q f = 0$, est un q-analogue (et une déformation) de l'équation différentielle $x\frac{dy}{dx}=0$: il s'agit d'un cas particulier des équations (1.0.1) et (1.0.2) obtenu en posant respectivement $\alpha = 0$ et $a = 1$.

Si l'on s'impose (comme nous le ferons aux §3 et §4) de chercher les solutions dans le corps $\mathcal{M}(\mathbb{C}^*)$ des fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}^*$, on obtient pour corps des constantes le corps $\mathcal{M}(\mathbb{C}^*)^{\sigma_q}$ des fonctions méromorphes σ_q-invariantes ; celui-ci s'identifie naturellement au corps $\mathcal{M}(\mathbf{E}_q)$ des fonctions méromorphes sur la surface de Riemann $\mathbf{E}_q=\mathbb{C}^*/q^{\mathbb{Z}}$. Par le choix d'un « logarithme » τ dans le demi-plan de Poincaré $\mathcal{H}$, tel que $e^{-2\imath\pi\tau}=q$, la surface $\mathbf{E}_q$ s'identifie à la courbe elliptique $\mathbb{C}/(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau)$. Le corps des constantes de la théorie est un corps de fonctions elliptiques : ce n'est donc pas le corps des coefficients $K^{\sigma_q}=\mathbb{C}$, contrairement à ce qui se passe pour les équations différentielles. □

Exemple 2.2. Soient $a, b, c \in \mathbb{C}^*$. La série hypergéométrique *basique* :

$$ {}_2\Phi_1(a,b,c;q,x) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(a;q^{-1})_n (b;q^{-1})_n}{(c;q^{-1})_n (q^{-1};q^{-1})_n} x^n \tag{2.2.1} $$

est une série convergente, et elle est solution de l'équation aux q-différences linéaire rationnelle d'ordre 2 :

$$ \sigma_q^2 f - \lambda\sigma_q f + \mu f = 0 \quad \text{avec} \begin{cases} \lambda = \dfrac{(a+b)x - (1+c/q)}{abx - c/q} \\ \mu = \dfrac{x-1}{abx - c/q} \end{cases} \tag{2.2.2} $$

La série ${}_2\Phi_1$ a été définie par Heine, puis étudiée par Ramanujan. C'est un q-analogue (et une déformation) de la série hypergéométrique *classique* d'Euler-Gauss :

$$ {}_2F_1(\alpha,\beta,\gamma;x) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n(1)_n} x^n. \tag{2.2.3} $$

On retrouve cette dernière par limite continue (ou « confluence ») des coefficients lorsque $q \to 1$, avec les contraintes $a = q^\alpha,\ b = q^\beta,\ c = q^\gamma$. On verra plus loin en quel sens précis on peut faire confluer l'équation fonctionnelle (2.2.2) elle-même vers une équation différentielle. Cependant, en remplaçant σ_q par $1 + (q-1)\delta_q$ et en faisant (comme le suggère l'introduction) confluer δ_q vers $\delta = x\frac{d}{dx}$, le lecteur retrouvera sans peine l'équation hypergéométrique classique :

$$ \delta^2 y - \widetilde{\lambda}\delta y + \widetilde{\mu} y = 0, \text{ avec } \begin{cases} \widetilde{\lambda} = \dfrac{(\alpha+\beta)x + (1-\gamma)}{1-x} \\ \widetilde{\mu} = \dfrac{\alpha\beta x}{1-x}. \end{cases} \tag{2.2.4} $$

□

2.3. **Équations et systèmes.** Comme dans le cas des équations différentielles, l'équation (2.0.3) permet de définir un système de rang n :

$$ \sigma_q X = AX, \tag{2.3.1} $$

où $A \in GL_n(K)$ est une matrice inversible de fonctions. Par exemple en posant $X = \begin{pmatrix} f \\ \sigma_q f \end{pmatrix}$ dans (2.2.2), on trouverait le système de matrice :

$$ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\mu & \lambda \end{pmatrix} \in GL_n(\mathbb{C}(x)). $$

2.4. **Transformation de jauge.** Pour un système différentiel $\delta X = AX$, on sait que toute transformation de jauge linéaire inversible $X = FY$ définit un nouveau système $\delta Y = BY$, où $B = -F^{-1}\delta F + F^{-1}AF$. Un rapide calcul montre que la même transformation de jauge ramène le système (2.3.1) au système $\sigma_q Y = BY$, où

$$ B = (\sigma_q F)^{-1} AF. \tag{2.4.1} $$

Ceci justifie de définir une relation d'équivalence entre de tels systèmes : on parlera d'équivalence globale (ou rationnelle) si F est à coefficients rationnels, d'équivalence locale (en 0) si les coefficients de F sont analytiques dans un voisinage de 0, d'équivalence formelle si les coefficients sont des séries de Laurent formelles. Comme dans la théorie des équations différentielles, un « lemme du vecteur cyclique », valable sur un corps de base quelconque, implique que tout système (2.3.1) de rang n est équivalent à une équation d'ordre n ([Sau00a] dans le cas complexe, [DV02a] en général). On peut donc indifféremment parler d'équivalence (locale ou globale) entre systèmes ou équations.

2.5. **Modules aux q-différences.** Les solutions du système (2.3.1) sont les invariants de l'application $X \mapsto A^{-1}\sigma_q X$. C'est l'analogue multiplicatif de la caractérisation des solutions du système différentiel $\delta X = AX$ comme éléments du noyau d'une connexion $X \mapsto \delta X - AX$. Dans ce dernier cas, l'objet algébrique intrinsèque qui modélise la situation est le module à connexion ou le module différentiel associé. Nous sommes ainsi conduits à définir un *module aux q-différences* comme un couple (M, Φ) formé d'un K-espace vectoriel de dimension finie et d'un automorphisme σ_q-linéaire de M ; autrement dit, Φ vérifie le q-analogue de la relation de Leibniz :

$$\forall a \in K,\ x \in M,\ \Phi(ax) = \sigma_q(a)\Phi(x).$$

Alternativement, c'est un module à gauche de longueur finie sur l'anneau (non-commutatif) $\mathcal{D}_q = K\left\langle \sigma_q, \sigma_q^{-1} \right\rangle$ des opérateurs aux q-différences. Le système (2.3.1) est ainsi modélisé par le module (K^n, Φ_A), où $\Phi_A(X) = A^{-1}\sigma_q X$ et tout module est de cette forme modulo le choix d'une base ; de plus, l'équivalence entre systèmes correspond à l'isomorphisme entre les modules aux q-différences associés. Par exemple, en partant de la matrice constante identité $A = I_n$, on obtient un *module banal*, c'est-à-dire un module (isomorphe à) (K^n, Φ) où Φ est définie par l'action de σ_q composante par composante.

2.6. **Prolongement méromorphe.** Un des buts de la théorie est la classification locale et globale des équations à coefficients rationnels. Dans le cas complexe, sous l'hypothèse $|q| \neq 1$, on peut remarquer que toute matrice F d'équivalence locale entre deux tels systèmes admet automatiquement un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$ en vertu de l'équation fonctionnelle (2.4.1) :

$$F(qx) = A(x)F(x)\left(B(x)\right)^{-1},$$

qui permet, itérativement, d'agrandir le disque de définition de F. Ce phénomène de propagation de la méromorphie est caractéristique des équations aux q-différences complexes, mais aussi p-adiques, et est en contraste marqué avec la théorie des équations différentielles.

3. Classification et confluence des systèmes fuchsiens rationnels

Dans le §3, le nombre complexe q est de module > 1 et les a_i sont des fonctions rationnelles de la variable complexe x. Si $\lambda \in \mathbb{C}^*$, on note $\lambda q^{\mathbb{Z}} = [\lambda; q]$ la q-spirale discrète $\{\lambda q^n : n \in \mathbb{Z}\}$.

Résolution et classification locales

Les seuls points invariants de l'automorphisme $x \mapsto qx$ sur la sphère de Riemann $\mathbf{S}$ sont 0 et ∞ et ils jouent un rôle symétrique. Nous aborderons donc l'étude locale en 0, celle en ∞ s'en déduisant par le changement de variable $w = 1/x$. La plupart des résultats locaux gardent un sens (et restent valides) pour des opérateurs et des équations à coefficients analytiques.

A l'opérateur aux q-différences P ou mieux, à l'équation correspondante

$$P.f(x) = a_0(x)f(q^n x) + a_1(x)f(q^{n-1}x) + \cdots + a_n(x)f(x) = 0,$$

on peut associer un *polygone de Newton en* 0, qui est l'enveloppe convexe dans $\mathbb{R}^2$ de

$$\{(i,j) \mid i = 0,1,\ldots,n,\ j \geqslant v_0(a_i)\}$$

où $v_0(a)$ désigne la valuation x-adique de a, c'est-à-dire son ordre d'annulation en 0. Ce polygone est invariant par équivalence locale. On peut ainsi définir le polygone de Newton d'un système, ou d'un module aux q-différences, ainsi que ses pentes : ce sont les pentes des segments finis qui bordent le convexe ci-dessus.

On parle de système ou de module *pur* lorsqu'il y a une seule pente et de système ou de module *fuchsien (en* 0*)* lorsqu'elle est de plus nulle. Les systèmes fuchsiens sont précisément ceux pour lesquels on peut supposer, à équivalence rationnelle près, que $A(0) \in GL_n(\mathbb{C})$[1]. C'est ici l'analogue des équations fuchsiennes de la théorie différentielle, dont les points singuliers sont *réguliers* [In56], [Was65] : à équivalence rationnelle près, un système différentiel $\delta X = AX$ supposé fuchsien en 0 serait tel que $A(0) \in M_n(\mathbb{C})$.

La théorie des équations aux q-différences suit alors assez fidèlement la théorie différentielle. En alternant des transformation de jauge constantes, qui permettent de se ramener au cas où $A(0)$ est triangulaire superieure, et des « transformations de cisaillement » (*shearing transformations*), c'est-à-dire de transformation de jauge de la forme

$$\begin{pmatrix} I_{r_1} & & \\ & xI_{r_2} & \\ & & I_{r_3} \end{pmatrix},\ \text{où } r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{N} \text{ et } r_1 + r_2 + r_3 = n,$$

on obtient un système non résonnant : cela signifie que le quotient de deux valeurs propres *distinctes* de $A(0)$ n'est pas une puissance entière de q (la condition analogue pour un système différentiel serait que la différence de deux valeurs propres distinctes ne soit pas un entier).

Dans les deux théories, les valeurs propres de $A(0)$ jouent un rôle spécial et sont appelées *exposants* du sytème. Les exposants (en fait, leurs classes modulo $\mathbb{Z}$ dans le cas différentiel, modulo $q^{\mathbb{Z}}$ dans notre cas) sont des invariants importants. Plus généralement, on peut attacher à chaque pente du polygone de Newton une *équation caractéristique* : il s'agit d'une équation polynomiale dont les racines sont les *exposants attachés à cette pente*. Elles servent en général

[1]On peut également caractériser de tels systèmes par la croissance modérée de solutions locales, ou par l'existence, dans le module (M, Φ) associé, d'un réseau stable par Φ et Φ^{-1}.

à produire des solutions formelles (comme au §4). Sans surprise, dans le cas fuchsien, ces solutions formelles convergent.

Exemple 3.1.

(1) L'équation différentielle (1.0.1) est fuchsienne en 0, d'exposant 0 et l'équation aux q-différences (1.0.2) est fuchsienne en 0 d'exposant 1 : elles sont en fait *régulières* en 0. Il en est de même dans l'exemple 2.1.

(2) Dans l'exemple 2.2, l'équation différentielle est fuchsienne en 0, d'exposants 0 et $1-\gamma$ et l'équation aux q-différences est fuchsienne en 0 d'exposants 1 et q/c. On peut de même (par le changement de variables $z = 1/x$) constater qu'elles sont fuchsiennes à l'infini (exposants respectifs : α, β et a, b).

Lemme 3.2. [Sau00a] *Pour un système fuchsien $\sigma_q X = AX$ non résonnant, il existe une unique transformation de jauge formelle tangente à l'identité :*

$$F(x) = I_n + xF_1 + \cdots ,$$

telle que $(\sigma_q F)^{-1} AF = A(0)$. De plus elle est convergente (donc prolongeable en une matrice méromorphe sur $\mathbb{C}$).

Les coefficients de la matrice $F(x)$ sont construits inductivement à partir de la relation $AF = (\sigma_q F)A(0)$. Il s'ensuit qu'une matrice Y de rang maximal vérifie l'équation $\sigma_q Y = A(0)Y$ si et seulement si la matrice $X = FY$ est solution du système $\sigma_q X = AX$. Ce lemme permet donc de ramener la résolution des systèmes fuchsiens à celle des systèmes à coefficients constants. En fait, associé aux considérations précédentes, il permet facilement de démontrer que, comme pour les équations différentielles, *tout système fuchsien est localement équivalent à un système à coefficients constants.*

Nous nous sommes donc finalement ramenés à resoudre un système aux q-differences $\sigma_q X = AX$ *à coefficients constants*, *i.e.* tel que $A \in GL_n(\mathbb{C})$. Pour ce faire, écrivons $A = DU$ la décomposition de Dunford multiplicative de A, autrement dit, D est semi-simple, U est unipotente et elles commutent. Il suffit, pour conclure, de construire deux matrices $e_{q,D}$ et $e_{q,U}$ qui commutent entre elles et avec D et U et telles que $\sigma_q e_{q,D} = De_{q,D}$, $\sigma_q e_{q,U} = Ue_{q,U}$: en fait $e_{q,A} = e_{q,D}e_{q,U}$ est alors une solution de $\sigma_q X = AX$. Le lecteur est invité à essayer les cas les plus simples dans chaque classe :

(1) Si $A = D$ et $n = 1$, A est une constante $c \in \mathbb{C}^*$ et l'on veut savoir résoudre l'équation $\sigma_q f = cf$.

(2) Si $A = U$ est unipotente de rang 2, on peut prendre par exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

et l'on voit qu'il faut savoir résoudre l'équation $\sigma_q f = f + 1$.

Cela peut se faire à l'aide de la fonction thêta de Jacobi :

$$\theta_q(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{-n(n-1)/2} x^n.$$

La fonction θ_q est donc holomorphe sur $\mathbb{C}^*$. Elle vérifie de plus l'équation fonctionnelle :

$$\theta_q(qx) = qx\theta_q(x).$$

Cette équation, qui s'écrit $\sigma_q f = qxf$, n'est pas fuchsienne : elle a une seule pente, qui vaut 1. On peut donc considérer θ_q comme l'un des q-analogues de l'exponentielle, car celle-ci vérifie l'équation différentielle $\delta y = xy$ qui n'est pas fuchsienne en 0, où elle a pour seule pente 1. L'algorithme est maintenant le suivant :

(1) Soit $D = P\ \mathrm{diag}(c_1, \cdots, c_n)P^{-1}$. Pour chaque exposant c_i, c'est-à-dire chaque valeur propre de A, l'équation $\sigma_q f = c_i f$ est fuchsienne, d'exposant c_i. Elle admet pour solution non triviale le « q-caractère »

$$e_{q,c_i}(x) = \frac{\theta_q(-x)}{\theta_q(-c_i^{-1}x)}.$$

Son analogue différentiel est la solution x^γ de l'équation différentielle $\delta f = \gamma f$ (fuchsienne d'exposant γ) : la différence essentielle étant que cette dernière est en général ramifiée. On obtient une solution de $\sigma_q X = DX$ en posant $e_{q,D} = P\ \mathrm{diag}(e_{q,c_1}, \cdots, e_{q,c_n})P^{-1}$. On vérifie aisément que cette matrice ne dépend pas du choix de la diagonalisation de D.

(2) Soit $U = I_n + N$ (donc N est une matrice nilpotente). On pose $e_{q,U} = U^{l_q} = \exp(l_q \log(I_n + N))$ (qui est donc un polynôme en N et en U), où l_q est solution de $\sigma_q f = f + 1$. Nous prendrons pour l_q le « q-logarithme » :

$$l_q(x) = -x\frac{\theta_q'(-x)}{\theta_q(-x)}.$$

Son analogue classique est la solution $\log\, x$ de l'équation différentielle $\delta f = 1$. Chacune des équations $\sigma_q f - f = 1$ et $\delta f = 1$ est une variante non homogène d'une équation linéaire d'ordre 2, fuchsienne, d'exposant double 1 (cas d'une équation aux q-différences) ou 0 (cas d'une équation différentielle).

Les premiers auteurs (Adams, Birkhoff, Carmichael...) utilisaient d'ailleurs pour q-caractères et q-logarithme des fonctions ramifiées et pouvaient résoudre le système à coefficients constants $\sigma_q X = AX$ en posant $X = x^{\log_q A}$, où $\log_q A$ est une matrice constante telle que $q^{\log_q A} = A$. Notre matrice $e_{q,A}$ n'est pas ramifiée, mais elle est méromorphe sur $\mathbb{C}^*$: c'est cette propriété, et plus précisément le contrôle de son lieu singulier, qui nous permettra d'obtenir une bonne caractérisation du phénomène de confluence. Pour conclure, revenons au cas général :

Théorème 3.3. *Tout système $\sigma_q X = AX$ fuchsien en 0 admet une solution $X = Me_{q,A^{(0)}}$ méromorphe sur $\mathbb{C}^*$. En particulier, la matrice M est méromorphe sur $\mathbb{C}$ et $A^{(0)}$ est une matrice constante non résonnante.*

Si de plus le système $\sigma_q X = AX$ est non résonnant, il y a un choix canonique de X caractérisé par $A^{(0)} = A(0)$ et $M(0) = I_n$.

Appelons singularités de la solution fondamentale X les pôles de X et de ceux de son inverse X^{-1}. En vertu de la formule du triple produit de Jacobi :

$$\theta_q(x) = (q^{-1}; q^{-1})_\infty(-x; q^{-1})_\infty(-\frac{q^{-1}}{x}; q^{-1})_\infty,$$

où on a posé $(a; q^{-1})_\infty = \prod_{n\geqslant 0}(1 - q^{-n}a)$, tous les zéros de θ_q sont des zéros simples et sont situés sur la spirale discrète $[-1; q]$. On en déduit aisément les zéros et les pôles de $e_{q,c}$ ainsi que les pôles de l_q. Les singularités de $e_{q,A^{(0)}}$ s'organisent en q-spirales discrètes $[c; q]$ (pour chaque exposant c) plus, si $A^{(0)}$ n'est pas semi-simple, la q-spirale discrète $[1; q]$. Les singularités de M s'organisent en demi-q-spirales discrètes $aq^{\mathbb{N}}$ causées par les singularités de A, en vertu de l'équation fonctionnelle

$$\sigma_q M = \sigma_q(M e_{q,A^{(0)}} e^{-1}_{q,A^{(0)}}) = AM \left(A^{(0)}\right)^{-1}.$$

Une solution (matricielle) fondamentale X ayant ainsi été obtenue, les solutions (vectorielles) méromorphes sur $\mathbb{C}^*$ sont alors toutes de la forme XV, où V est un vecteur méromorphe q-constant, c'est-à-dire à coefficients dans $\mathcal{M}(\mathbf{E}_q)$, d'après l'exemple 2.1. Il ne serait pas difficile d'exploiter ces solutions locales pour classifier les systèmes fuchsiens, mais une description plus intrinsèque est possible.

Rappelons que, dans le cas des équations différentielles, la classification locale des systèmes fuchsiens en 0 (par exemple) est totalement spécifiée par la matrice de monodromie d'une solution fondamentale lors d'un prolongement analytique le long d'un petit lacet entourant la singularité 0. La matrice de monodromie se calcule d'ailleurs à partir de $A(0)$. Génériquement (si $A(0)$ est semi-simple) les exposants forment un système complet d'invariants locaux. Dans tous les cas, l'objet géométrique sous-jacent est le germe $(\mathbb{C}^*, 0)$: ce sont les représentations de son groupe fondamental qui interviennent.

Pour les q-différences, une telle description géométrique est encore possible. Remarquons d'abord que tout système est localement équivalent à un système à coefficients constants (c'est le contenu du lemme 3.2). Pour une matrice constante $A \in GL_n(\mathbb{C})$, le système (2.3.1) peut s'interpréter comme définissant une section équivariante du fibré vectoriel trivial de rang n sur $\mathbb{C}^*$. Précisément, en quotientant $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^n$ par la relation d'équivalence engendrée par les relations $(x, X) \sim (qx, AX)$, on construit un fibré vectoriel holomorphe F_A sur la courbe elliptique $\mathbf{E}_q$.

Théorème 3.4. *On obtient ainsi une bijection entre les classes d'équivalence locale de systèmes rationnels fuchsiens en* 0 *et les classes d'isomorphie de fibrés vectoriels holomorphes plats sur* $\mathbf{E}_q$.

Remarque 3.5. La correspondance de Weil [W38] dit que ces dernières sont en bijection avec les classes de représentations du groupe fondamental $\pi_1(\mathbf{E}_q)$, mais il faut prendre garde que l'équivalence entre représentations considérée ici n'est pas la similitude à coefficients constants. On peut démontrer que la bijection ci-dessus provient en fait d'une équivalence entre catégories tannakiennes.

Celle-ci fournit une interprétation géométrique limpide de la théorie de Galois locale des équations fuchsiennes, avec une notion de groupoïde de monodromie et un théorème de densité de type Schlesinger [Sau02c]. Cette interprétation peut d'ailleurs être poursuivie dans le cas global (cf. *infra* la remarque 3.9).

Confluence des solutions locales

Nous voudrions donner un sens à l'idée que, « lorsque $q \to 1$, la q-dérivation $\delta_q = \frac{\sigma_q - 1}{q-1}$ tend vers la dérivation $\delta = x\,\frac{d}{dx}$ ». Cette idée a été la source, depuis Heine, de nombreuses q-analogies. Nous considèrerons donc une famille de systèmes

$$\sigma_q X = A_q X,$$

où les coefficients de A_q dépendent de q. Pour respecter l'analogie, on peut réécrire ces systèmes à l'aide de l'opérateur δ_q :

$$\delta_q X = B_q X, \text{ avec } B_q = \frac{A_q - I_n}{q-1},$$

ce qui nous conduit à supposer que B_q tend vers la matrice $\widetilde{B}$ définissant le système différentiel

$$x\frac{d}{dx}X = \widetilde{B}X.$$

Si l'on suppose ce dernier fuchsien non résonnant en 0 (au sens expliqué précédemment), il en est de même de A_q pour q assez proche de 1. Il y a alors une solution canonique $X_q = M_q e_{q,A_q(0)}$ du système (2.3.1) et une solution canonique $\widetilde{X} = \widetilde{M}(-x)^{\widetilde{B}(0)}$ du système différentiel, cette dernière étant fournie par la théorie de Fuchs-Frobenius[2].

Lorsque q varie, le comportement numérique des solutions est « chaotique » au voisinage de leurs lieux singuliers. Pour assurer la convergence de X_q vers $\widetilde{X}$ sur un domaine raisonnable lorsque q tend vers 1, nous nous laisserons donc guider par la géométrie des singularités. La convergence de B_q entraine que les exposants de A_q tendent vers 1. Nous supposerons que q tend vers 1 le long d'une q_0-spirale continue

$$q_0^{\mathbb{R}} = e^{-2\imath\pi\tau_0\mathbb{R}}, \text{ où } q_0 = e^{-2\imath\pi\tau_0},\ Im(\tau_0) > 0\ ;$$

autrement dit, $q = e^{-2\imath\pi\tau}$ et $\tau = \tau_0\varepsilon$, $\varepsilon \to 0^+$. Ainsi les lieux singuliers des $e_{q,A_q(0)}$ se condensent en $q_0^{\mathbb{R}}$. Nous supposerons de plus que les singularités de A_q (et donc de B_q) tendent vers les pôles $x_1, x_2, \ldots$ de $\widetilde{B}$, de sorte que les lieux singuliers des M_q se condensent en des demi-spirales continues $x_i q_0^{\mathbb{R}^+}$. Soit

$$U_0 = \mathbb{C}^* \smallsetminus \left(\bigcup x_i q_0^{\mathbb{R}^+}\right) \smallsetminus q_0^{\mathbb{R}}$$

l'ouvert complémentaire dans $\mathbb{C}^*$ de la réunion de toutes ces demi-spirales et spirales continues.

---

[2]La détermination de $\log(-x)$ utilisée ici est celle qui s'annule en -1 et dont la coupure est la spirale continue $q_0^{\mathbb{R}}$ introduite plus bas.

Théorème 3.6. [Sau00a] *On suppose que $B_q \to \widetilde{B}$ uniformément sur tout compact de U_0. On suppose, de plus, que « la structure de Jordan en 0 varie continument », autrement dit, qu'une matrice de passage de $B_q(0)$ à sa forme de Jordan converge vers une matrice de passage de $\widetilde{B}(0)$ à sa forme de Jordan. Alors la solution canonique X_q converge vers $\widetilde{X}$ uniformément sur tout compact de U_0.*

Pour le prouver, on étudie séparément les composantes M_q et $e_{q,A_q(0)}$ de la solution canonique X_q. La première est solution de l'équation aux q-différences

$$\sigma_q M_q = A_q M_q \left(A_q(0)\right)^{-1},$$

avec condition initiale $M_q(0) = I_n$. C'est essentiellement la méthode d'Euler d'intégration numérique d'une équation différentielle (ici, avec pas géométrique) qui garantit sa convergence vers la solution $\widetilde{M}$. Pour la deuxième composante, on utilise des formules asymptotiques :

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} e_{q,q^\gamma}(x) = (-x)^\gamma, \quad \lim_{\varepsilon \to 0^+} (q-1) l_q(x) = \log(-x).$$

Ces formules se prouvent en étudiant le comportement de θ_q lorsque $q \to 1$, à l'aide de l'équation fonctionnelle satisfaite par

$$\Theta(\tau, z) = \theta_{e^{-2\imath\pi\tau}}(e^{2\imath\pi z}),$$

qui relie $\Theta(-1/\tau, z/\tau)$ à $\Theta(\tau, z)$ [Lan87], [Mum82] :

$$\Theta(\tau, z) = \frac{\sqrt{i/\tau}}{e^{(i\pi/\tau)(z-(\tau+1)/2)^2}} \Theta(-1/\tau, z/\tau).$$

Sous les hypothèses du théorème, on en tire la convergence de $e_{q,A_q(0)}$ vers $(-x)^{\widetilde{B}(0)}$. L'importance de la géométrie des singularités (les q-spirales discrètes de singularités se condensent en des coupures en forme de q_0-spirales continues) justifie le terme de « confluence » appliqué à cette situation.

Exemple 3.7.
Tous les exemples précédents rentrent dans le cadre de ce théorème, qui permet ainsi d'expliquer et de préciser de nombreuses formules « bien connues ». L'exemple de la série binomiale (*cf.* (1.0.1) et (1.0.2)) est traité dans [Sau00b], l'exemple 2.2 est détaillé dans [Sau00a]. □

Classification globale

Avant d'énoncer le résultat général, revenons à l'exemple 2.2 des séries hypergéométriques et étudions le d'un point de vue global, c'est-à-dire sur la sphère de Riemann $\mathbf{S}$. On constate que l'équation hypergéometrique de Gauss

$$\delta^2 y - \widetilde{\lambda} \delta y + \widetilde{\mu} y = 0, \text{ avec } \begin{cases} \widetilde{\lambda} = \dfrac{(\alpha+\beta)x + (1-\gamma)}{1-x} \\ \widetilde{\mu} = \dfrac{\alpha\beta x}{1-x}. \end{cases}$$

y admet pour seules singularités 0, 1 et ∞ et que ces singularités sont régulières. La méthode de Frobenius en fournit des systèmes fondamentaux de solutions en 0 et en ∞ :

$$\begin{cases} {}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma; x) \\ x^{1-\gamma}\ {}_2F_1(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma; x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1/x)^{\alpha}\ {}_2F_1(\alpha, \alpha - \gamma + 1, \alpha - \beta + 1; 1/x) \\ (1/x)^{\beta}\ {}_2F_1(\beta, \beta - \gamma + 1, \beta - \alpha + 1; 1/x) \end{cases}$$

On peut de même en donner une base de solutions explicites en 1, mais nous n'en aurons pas l'usage. Le prolongement analytique d'un système fondamental de solutions au voisinage d'une singularité fournit encore un système fondamental de solutions et s'exprime donc à partir d'un autre système fondamental par une matrice de constantes : ce sont les fameuses *formules de connexion* de la théorie classique [In56], [Was65], [WW27]. Par exemple, on peut relier 0 à l'infini par l'une des matrices suivantes, selon que l'on reste dans le demi-plan de Poincaré ou dans son opposé :

$$(3.7.1) \qquad \widetilde{P}^{+} = \begin{pmatrix} e^{i\pi\alpha}\dfrac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\alpha)} & e^{i\pi(\alpha-\gamma+1)}\dfrac{\Gamma(2-\gamma)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\gamma+\beta)} \\ e^{i\pi\beta}\dfrac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)} & e^{i\pi(\beta-\gamma+1)}\dfrac{\Gamma(2-\gamma)\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1-\gamma+\alpha)} \end{pmatrix}$$

$$(3.7.2) \qquad \widetilde{P}^{-} = \begin{pmatrix} e^{-i\pi\alpha}\dfrac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\alpha)} & e^{-i\pi(\alpha-\gamma+1)}\dfrac{\Gamma(2-\gamma)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\gamma+\beta)} \\ e^{-i\pi\beta}\dfrac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)} & e^{-i\pi(\beta-\gamma+1)}\dfrac{\Gamma(2-\gamma)\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1-\gamma+\alpha)} \end{pmatrix}$$

La matrice de monodromie en le pôle 1 est $(\widetilde{P}^{+})^{-1}\widetilde{P}^{-}$: elle représente l'effet sur le système fondamental choisi du prolongement analytique le long d'un petit lacet simple autour de 1 [IKSY91], [Sau00a].

La correspondance de Riemann-Hilbert est née de la caractérisation par Riemann de l'équation hypergéométrique à partir de ses invariants locaux (les exposants) et des matrices de connexion [IKSY91]. En termes modernes, on reconnait que l'objet classifiant est la *représentation de monodromie* : ceci est dû au fait que les matrices qui interviennent ci-dessus ne dépendent en fait que des classes d'homotopie des chemins le long desquels se fait le prolongement analytique. Ces chemins doivent éviter les singularités et l'on obtient ici une représentation du *groupe fondamental de la droite projective moins trois points* (donc d'un groupe libre à deux générateurs), objet célèbre dans de nombreux domaines ! Dans l'exemple ci-dessus, la classe du petit lacet simple autour de 1 a pour image (dans cette représentation) $(\widetilde{P}^{+})^{-1}\widetilde{P}^{-}$. Nous allons tenter, suivant Birkhoff [Bir13], d'adapter cette démarche au cas des équations aux q-différences.

Supposons donc maintenant le système (2.3.1) fuchsien en 0 et en ∞ (ceci, relativement à la variable $w = 1/x$). On démontre qu'à équivalence rationnelle près, on peut supposer $A(0), A(\infty) \in GL_n(\mathbb{C})$. On peut alors définir des solutions locales en 0 et en ∞ comme ci-dessus, respectivement méromorphes sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbf{S} \setminus \{0\}$ (sphère de Riemann privée de l'origine), soient $X^{(0)} = M^{(0)} e_{q,A^{(0)}}$ et $X^{(\infty)} = M^{(\infty)} e_{q,A^{(\infty)}}$. Ces solutions sont reliées par la *matrice de connexion de Birkhoff* :

$$P = \left(X^{(\infty)}\right)^{-1} X^{(0)},$$

qui est méromorphe sur $\mathbb{C}^*$ et σ_q-invariante. On peut donc la considérer comme une matrice (inversible) de fonctions elliptiques (« q-sigma periodic » dans la terminologie de Birkhoff). Elle joue ici le rôle des matrices de monodromie dans la théorie de Riemann-Hilbert, mais il faut prendre garde qu'elle n'est pas à coefficients complexes ! C'est l'une des difficultés et l'un des charmes de la théorie.

Reprenons l'exemple 2.2. Pour l'équation hypergéométrique basique

$$\sigma_q^2 f - \lambda \sigma_q f + \mu f = 0 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \lambda = \dfrac{(a+b)x - (1+c/q)}{abx - c/q}, \\ \mu = \dfrac{x-1}{abx - c/q}, \end{cases}$$

en se basant sur les formules de connexion de Barnes-Mellin-Watson (*voir* [GR90] p. 106), on calcule explicitement la matrice de Birkhoff [Sau00a] :

$$P = (D^{(\infty)})^{-1} M D^{(0)}, \tag{3.7.3}$$

où

$$D^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e_{q,q/c}(x) \end{pmatrix}, \; D^{(\infty)} = \begin{pmatrix} e_{q,a}(1/x) & 0 \\ 0 & e_{q,b}(1/x) \end{pmatrix}$$

et

$$M = \begin{pmatrix} {}_2\Phi_1(\dfrac{c}{b}, a; c; q, q) \dfrac{\Theta_q\left(\frac{bx}{cq}\right)}{\Theta_q\left(\frac{abx}{cq}\right)} & {}_2\Phi_1(\dfrac{q}{b}, \dfrac{aq}{c}; \dfrac{q^2}{c}; q, q) \dfrac{\Theta_q\left(\frac{bx}{q^2}\right)}{\Theta_q\left(\frac{abx}{cq}\right)} \\ {}_2\Phi_1(\dfrac{c}{a}, b; c; q, q) \dfrac{\Theta_q\left(\frac{ax}{cq}\right)}{\Theta_q\left(\frac{abx}{cq}\right)} & {}_2\Phi_1(\dfrac{q}{a}, \dfrac{bq}{c}; \dfrac{q^2}{c}; q, q) \dfrac{\Theta_q\left(\frac{ax}{q^2}\right)}{\Theta_q\left(\frac{abx}{cq}\right)} \end{pmatrix}$$

De même que dans la théorie de Riemann une équation est caractérisée (à équivalence près) par la nature de ses singularités et sa représentation de monodromie, Birkhoff démontre que la donnée de la matrice de connexion P et des structures de Jordan du système en 0 et en ∞ (*i.e.* des structure de Jordan de $A^{(0)}$ et de $A^{(\infty)}$), fournit un système complet d'invariants, et il résoud le problème inverse. Une version précisée de ce théorème est donnée dans [Sau00a]. Nous en donnerons plutôt ici une version intrinsèque, dans l'esprit du théorème 3.4. Remarquons que les composantes $e_{q,A^{(0)}}$ et $e_{q,A^{(\infty)}}$ des solutions locales fournissent des repères (méromorphes) pour les fibrés holomorphes plats $F^{(0)}$ et $F^{(\infty)}$ introduits précédemment (théorème 3.4). Par ailleurs, la q-invariance de

$$P = \left(e_{q,A^{(\infty)}}\right)^{-1} M e_{q,A^{(0)}} \quad \text{où l'on a posé : } M = \left(M^{(\infty)}\right)^{-1} M^{(0)},$$

dit que la composante centrale M de la matrice de connexion P peut s'interpréter comme un isomorphisme méromorphe $F^{(0)} \to F^{(\infty)}$ entre fibrés holomorphes.

Théorème 3.8. *On obtient ainsi une bijection entre les classes d'équivalence globale de systèmes rationnels fuchsiens sur* $\mathbf{S}$ *et les classes d'isomorphie de triplets* $(F^{(0)}, \varphi, F^{(\infty)})$, *où* $F^{(0)}$ *et* $F^{(\infty)}$ *sont des fibrés vectoriels holomorphes plats sur* $\mathbf{E}_q$ *et* $\varphi : F^{(0)} \to F^{(\infty)}$ *est un isomorphisme méromorphe entre ces fibrés. Un isomorphisme entre deux tels triplets* $(F^{(0)}, \varphi, F^{(\infty)})$ *et* $(G^{(0)}, \psi, G^{(\infty)})$ *est un couple* $(u^{(0)}, u^{(\infty)})$ *d'isomorphismes (holomorphes)* $u^{(0)} : F^{(0)} \to G^{(0)}$ *et* $u^{(\infty)} : F^{(\infty)} \to G^{(\infty)}$ *qui forment un carré commutatif avec* φ *et* ψ, *i.e.* $\psi \circ u^{(0)} = u^{(\infty)} \circ \varphi$.

L'avantage de cette description est qu'elle est compatible au produit tensoriel et admet une interprétation galoisienne agréable [Sau02c], alors que la matrice de connexion ne commute pas au produit tensoriel. Ceci vient du fait qu'il est impossible de définir une famille de q-caractères $e_{q,c}$ méromorphes tels que $e_{q,cd} = e_{q,c}e_{q,d}$. Ce problème avait été surmonté par van der Put et Singer dans [vdPS97] à l'aide de solutions symboliques, mais celles-ci ne permettent ni une interprétation géométrique claire, ni de décrire la confluence.

Remarque 3.9. De la description ci-dessus, on peut tirer une description du groupe de Galois et même, sous certaines hypothèses, de l'analogue d'un groupe de monodromie Zariski-dense dans le groupe de Galois [Sau02c]. Ceci est dans la droite ligne de la théorie de Galois différentielle classique, que l'on trouvera, par exemple, dans [vdPS03].

Confluence de la matrice de connexion

Nous reprenons ici les hypothèses du théorème 3.6, que nous supposons symétriquement vérifiées en ∞ (après changement de variable $w = 1/x$). Autrement dit, nous supposons que les singularités de B_q tendent vers les pôles $x_1, x_2, \dots, x_r$ de $\widetilde{B}$, que $B_q \to \widetilde{B}$ uniformément sur tout compact de l'ouvert

$$U = U_0 \cap U_\infty = \mathbb{C}^* \setminus \bigcup_{0 \leqslant i \leqslant r} x_i q_0^{\mathbb{R}}, \text{ où l'on a posé } x_0 = 1,$$

et que les structures de Jordan de $B_q(0)$ et $B_q(\infty)$ « varient continument » (cf. le théorème 3.6). On supposera de plus que les spirales continues $x_i q_0^{\mathbb{R}}$ sont deux à deux disjointes, ce qui est vrai pour un choix générique de q_0. Les solutions canoniques $X_q^{(0)}$ et $X_q^{(\infty)}$ du système $\sigma_q X = A_q X$ convergent respectivement vers les solutions $\widetilde{X}^{(0)}$ et $\widetilde{X}^{(\infty)}$ du système différentiel de matrice $\widetilde{B}$ sur les ouverts U_0 et U_∞. La matrice de connexion

$$P_q = \left(X_q^{(\infty)}\right)^{-1} X_q^{(0)}$$

converge donc, sur l'ouvert U, vers la matrice

$$\widetilde{P} = \left(\widetilde{X}^{(\infty)}\right)^{-1} \widetilde{X}^{(0)}.$$

Cette dernière relie deux solutions fondamentales d'un même système différentiel, elle est donc constante sur chaque composante connexe de l'ouvert U. De la définition de U on déduit qu'il admet $r+1$ composantes connexes U_i. Nous les indexons de manière à ce que la frontière de U_i soit formée de $x_i q_0^{\mathbb{R}}$ et de $x_{i+1} q_0^{\mathbb{R}}$. Comme indiqué ci-dessus, $\widetilde{P}$ est constante sur U_i, de valeur $P_i \in GL_n(\mathbb{C})$: P_i est une matrice de connexion au sens de la théorie de Riemann.

Théorème 3.10. [Sau00a] *La transformation de monodromie locale du système différentiel fuchsien de matrice $\widetilde{B}$ en le point singulier régulier x_i $(i = 1, \ldots, r)$, exprimée dans la base $X^{(0)}$, admet pour matrice $(P_i)^{-1} P_{i-1}$.*

On trouvera dans [Sau00a] des exemples traités complètement, dont celui de la confluence des fonctions hypergéométriques basiques de Heine vers les fonctions hypergéométriques classiques. On y prouve par exemple que la matrice de connexion que nous avons calculée en (3.7.3) converge vers la matrice de monodromie $(\widetilde{P}^{+})^{-1}\widetilde{P}^{-}$ décrite à l'aide de (3.7.1) et (3.7.2).

Le théorème 3.10 admet une interprétation galoisienne [Sau02c]. Il fournit une variante explicite d'un théorème beaucoup plus général de déformation du groupe de Galois obtenu par Yves André [And01a],[And02a].

Classification locale des équations irrégulières

Nous considérons ici une équation

$$P.f(x) = a_0(x)f(q^n x) + a_1(x)f(q^{n-1}x) + \cdots + a_n(x)f(x) = 0$$

à coefficients analytiques, que nous ne supposons plus fuchsienne. Nous supposerons cependant, pour simplifier, que toutes les pentes de son polygone de Newton sont entières. On trouvera alors dans [Zha99] et dans [MZ00] la preuve de l'existence d'une *factorisation analytique de l'opérateur P en facteurs de degré* 1. Ce résultat est étonnant, comparé à ce que l'on sait des opérateurs différentiels : pour ceux-ci, on ne peut espérer en général qu'une factorisation formelle. Ce théorème de factorisation n'est autre qu'une version moderne et précisée du « canonical system » mentionné par Birkhoff.

Une variante abélienne de ce théorème dit que le module aux q-différences correspondant admet une filtration canonique à quotients purs de pentes décroissantes ([Sau02a] et [Sau02b]). On montre même que le gradué associé est l'unique invariant formel. Ces résultats sont d'ailleurs valables sans supposer les pentes entières. La classification des sommes directes de modules purs est aisée à partir de ce que nous avons vu sur les modules fuchsiens : on retrouve ainsi la classification formelle obtenue par Praagman ([Pr83], [vdPS97]). La détermination des classes analytiques isoformelles revient alors à la détermination des classes de modules filtrés à gradué fixé.

Concrètement, un module M de gradué associé :

$$gr(M) = M_1 \oplus \cdots \oplus M_k,$$

(M_i est pur de rang r_i, de pente μ_i) peut être décrit par un système dont la matrice A est *triangulaire supérieure par blocs*. Notons $A_1, \ldots, A_k$ ses blocs diagonaux. La matrice A_i est de rang r_i et le système de matrice A_i est associé au module pur M_i. Comme nous avons supposé les pentes entières, on peut même exiger que A_i soit de la forme $x^{\mu_i} \times$ une matrice de $GL_{r_i}(\mathbb{C})$. Avec ces notations, un isomorphisme respectant la graduation de M vers un module M' (associé à la matrice A') est donné par une matrice F telle que $(\sigma_q F)\, A = A' F$, et, de plus, triangulaire supérieure par blocs et dont les blocs diagonaux sont $I_{r_1}, \ldots, I_{r_k}$.

Exemple 3.11.
Le module à deux pentes correspondant à la matrice d'équation $A_u(x) = \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & x \end{pmatrix}$ est formellement isomorphe à son gradué, autrement dit, il existe une transformation de jauge formelle $F_u(x)$ telle que $F_u(qx)A_u(x) = A_0(x)F_u(x)$. Si l'on exige de plus que l'isomorphisme soit compatible à la graduation, c'est-à-dire que F_u soit de la forme $\begin{pmatrix} 1 & \widehat{y}_u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, il y a même unicité de la série formelle $\widehat{y}_u$, qui doit alors satisfaire l'équation fonctionnelle $\widehat{y}_u(x) = u(x) + x\widehat{y}_u(qx)$. On vérifie que deux telles matrices A_u et A_v sont analytiquement isomorphes si et seulement si $\widehat{y}_u - \widehat{y}_v$ est convergente. Par exemple, $\widehat{y}_1$ n'est autre que la série de Tschakaloff citée dans l'introduction, qui diverge, de sorte que A_1 n'est pas isomorphe à A_0. Nous reverrons cette série au paragraphe 4. $\square$

En vue de définir les « essential transcendental invariants » demandés par Birkhoff, on est donc conduit, comme dans la théorie des équations différentielles, à étudier les moyens de sommer de telles séries divergentes : c'est l'objet du paragraphe 4.

4. Sommabilité des solutions formelles d'équations aux q-différences et classification locale des systèmes irréguliers

Dans ce paragraphe, on notera $\widetilde{\mathbb{C}}^*$ la surface de Riemann du logarithme, log *la détermination principale de celui-ci, et $\log_q x = \frac{\log x}{\log q}$ pour tout $x \in \widetilde{\mathbb{C}}^*$, où* $\log q$ *est fixé une fois pour toutes (comme précédemment, on suppose $|q| > 1$). On notera $q^\alpha = e^{\alpha \log q}$ pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$. La notation $[\lambda; q]$ du paragraphe 3 est étendue au cas où $\lambda \in \widetilde{\mathbb{C}}^*$.*

Si $\mathbf{C}$ désigne l'un des ensembles $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}^*$ et $\widetilde{\mathbb{C}}^*$, on notera $\mathcal{O}_{\mathbf{C},0}$ (resp. $\mathcal{M}_{\mathbf{C},0}$) l'ensemble des fonctions holomorphes (resp. méromorphes) dans un « disque ouvert de $\mathbf{C}$ centré en 0 » $\{x \in \mathbf{C} : |x| < R\}$.

Conformément à nos notations antérieures, pour $a \in \mathbb{C}$ et $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, nous avons

$$(a; q^{-1})_m = \prod_{0 \le n \le m-1} (1 - aq^{-n}).$$

Quelques généralités

Dans la théorie des équations différentielles linéaires dans le champ complexe, il y a des séries formelles divergentes qui sont solutions formelles. L'exemple « modèle » est la (variante de) série d'Euler :

$$\widehat{y}(x) = \sum_{n \ge 0} n!\, x^{n+1}. \tag{4.0.1}$$

Elle est solution formelle de l'équation :

$$x^2y' - y = -x \tag{4.0.2}$$

Le type de divergence d'une solution formelle $\widehat{y}(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ d'une équation différentielle analytique (linéaire ou non) n'est pas du tout arbitraire ; il est Gevrey : $| a_n | \leq A^n n!^s$; $A > 0,\ s \geq 0$. (C'est un résultat de Maillet 1904, précisé plus tard par Ramis et Malgrange, [Ram93].)

Les équations linéaires aux q-différences admettent aussi des solutions séries formelles divergentes. Par exemple, la série de Tschakaloff (qui est, rappelons le, un q-analogue de la série d'Euler (4.0.1)) :

$$\widehat{y}(x) = \sum_{n\geq 0} q^{n(n-1)/2} x^n \tag{4.0.3}$$

est de rayon de convergence nul (car $|q| > 1$), et elle vérifie formellement l'équation fonctionnelle

$$xy(qx) - y(x) = -1. \tag{4.0.4}$$

La suite $\{q^{n(n-1)/2}\}_{n\geq 0}$ augmente beaucoup plus vite qu'une suite Gevrey de la forme $\{A^n n!^s\}_{n\geq 0}$, quelles que soient les constantes positives A et s choisies. Autrement dit, la série $\widehat{y}$ définie par (4.0.3) n'appartient à aucun espace de séries entières Gevrey habituel. On est alors conduit à une nouvelle famille de séries entières divergentes, que, depuis [Béz92] et [Ram93], on a baptisée famille des *séries q-Gevrey.*

Définition 4.1. Etant donné $s \geq 0$, on dit qu'une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ est *q-Gevrey d'ordre s* si

$$\sum_{n\geq 0} a_n q^{-sn(n-1)/2} x^n$$

admet un rayon de convergence non nul. On notera $\mathbb{C}[[x]]_{q;s}$ l'ensemble des séries q-Gevrey d'ordre s.

Toute solution série formelle d'une équation aux q-différences linéaire analytique est q-Gevrey d'ordre s pour un s optimal rationnel convenable [Béz92]. La situation est ainsi analogue à celle du cas différentiel et il est alors raisonnable de se poser le problème de la (multi)sommabilité de ces solutions séries formelles puisqu'il est résolu dans le cas différentiel [Ram93]. Nous allons donner une idée de la (ou plutôt des) solution(s) de ce problème.

Dans le cas différentiel les théories de la k-sommabilité et plus généralement de la multisommabilité sont orchestrées par les transformations de Borel et Laplace.

Définition 4.2. Si $\widehat{f} = \sum_{n\geq 1} a_n x^n$, on appelera *transformée de Borel formelle (d'ordre un) de $\widehat{f}$* la série entière

$$\widehat{\mathcal{B}}\widehat{f} = \sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{(n-1)!}\xi^{n-1}.$$

Exemple 4.3. Si $\widehat{y}$ est la série d'Euler, on a $\widehat{\mathcal{B}}\widehat{y} = \dfrac{1}{1-\xi}$.

Si l'on veut une version q-analogue de la méthode de sommation de Borel-Laplace, il est raisonnable de commencer par la transformée de q-Borel formelle modèle suivante ([Ram93], p. 22).

Définition 4.4. Si $\widehat{f} = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$, on appelera *transformée de q-Borel formelle (d'ordre un) de $\widehat{f}$* la série entière

$$\widehat{\mathcal{B}}_{q;1}\widehat{f} = \sum_{n\geq 0} a_n q^{-n(n-1)/2}\xi^n.$$

Exemple 4.5.

(1) Si $\widehat{y}$ est la série de Tschakaloff, on a $\widehat{\mathcal{B}}_{q;1}\widehat{y} = \frac{1}{1-\xi}$.

(2) Si $\widehat{f} = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{(q^{-1};q^{-1})_n}$, on a $\widehat{\mathcal{B}}_{q;1}\widehat{f} = (\xi;q^{-1})_\infty$ et c'est le développement d'une fonction entière.

Dans le reste de ce paragraphe, nous allons d'abord examiner la sommabilité de la série (4.0.3), considérant cette dernière comme un q-analogue de la série d'Euler (4.0.1). En résolvant l'équation (4.0.4) par variation des constantes, nous arriverons à (au moins) deux intégrales de q-Laplace différentes. Cette « souplesse » est liée au caractère suivant de l'opérateur aux q-différences σ_q : le corps de ses constantes (i.e. des fonctions invariantes par l'opérateur de dilatation σ_q) , n'est pas $\mathbb{C}$, contrairement à ce qui se passe pour la dérivation usuelle $\frac{d}{dx}$. L'ambiguïté des processus de q-sommation est reliée à la taille des corps de q-constantes. Le choix judicieux esquissé à la fin de ce paragraphe nous a permis de réduire cette ambiguité au corps des fonctions elliptiques de $\mathbf{E}_q$. (On comparera avec la démarche décrite au paragraphe précédent pour obtenir une matrice de Birkhoff à coefficients elliptiques.)

Nous passerons ensuite à l'étude de la sommabilité du carré $\widehat{y}^2$ de la série (4.0.3). Là un phénomène nouveau apparait : $\widehat{y}^2$ n'a pas le même ordre de sommabilité que la série initiale $\widehat{y}$. On verra que ce défaut de sommabilité pour la multiplication est essentiellement dû au fait que $\frac{\sigma_q(fg)}{fg} = \frac{\sigma_q f}{f} \times \frac{\sigma_q g}{g}$, par opposition à l'égalité $\frac{(fg)'}{fg} = \frac{f'}{f} + \frac{g'}{g}$ dans le cas de la dérivation usuelle $' = \frac{d}{dx}$. Nous terminerons ce paragraphe par une description très sommaire de la multisommabilité des solutions formelles d'une équation linéaire analytique aux q-différences.

Étude de l'équation $xy(qx) - y(x) = -1$

Comme nous venons de le remarquer, la formule de Leibniz est remplacée par la relation $(fg)(qx) = f(qx)g(qx)$. On va appliquer la méthode de la variation des constantes. Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et soit y_λ une solution de l'équation $xy(qx) - \lambda y(x) = 0$; si $y(x) = y_\lambda(x)C(x)$, l'équation (4.0.2) devient

$$\lambda C(qx) - C(x) = -\frac{1}{y_\lambda(x)}. \tag{4.5.1}$$

Nous allons regarder les cas suivants : $\lambda = 1$ et $y_1 = q^{-(\log_q x)(\log_q x - 1)/2}$ (*cf.* 4.6) ; $\lambda \notin q^{\mathbb{Z}}$ et $y_\lambda = \frac{1}{\theta_q(\lambda/x)}$ (*cf.* 4.8).

4.6. **Cas où** $\lambda = 1$ **et** $y_1 = q^{-(\log_q x)(\log_q x - 1)/2}$.
Si $t = \log_q x$ et $z(t) = C(q^t)$, l'équation (4.5.1) donne celle-ci :

$$z(t+1) - z(t) = -q^{-t(t-1)/2}, \tag{4.6.1}$$

qui se résout par transformation de Fourier. En effet, avec la relation $\mathcal{F}(z(t+1)) = e^{\chi}\mathcal{F}z$, on a

$$(e^{\chi} - 1)\mathcal{F}z(\chi) = -\mathcal{F}q^{-t(t-1)/2}(\chi),$$

ce qui correspond, par transformation de Fourier inverse, aux solutions z^{α} de (4.6.1) :

$$z^{\alpha}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\ \log q}} \int_{-\infty+i\alpha}^{+\infty+i\alpha} \frac{q^{-\frac{1}{2}(\chi/\log q + 1/2)^2}}{1 - e^{\chi}}\, e^{\chi t}\, d\chi,$$

où $\alpha \neq 0 \pmod{2\pi}$. De là, les solutions suivantes de l'équation (4.0.2) :

$$y^{\alpha}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\ \log q}} \int_0^{\infty e^{i\alpha}} q^{-\frac{1}{2}(\log_q(\xi/x) + 1/2)^2}\ \varphi(\xi)\, \frac{d\xi}{\xi}, \tag{4.6.2}$$

où $\varphi = \frac{1}{1-\xi}$.

Théorème 4.7. *On suppose que* q *est un nombre réel* > 1 *et soit* $\alpha \neq 0 \pmod{2\pi}$. *La fonction* y^{α} *définie dans* $\widetilde{\mathbb{C}}^*$ *par (4.6.2) est l'*unique *solution analytique sur* $\widetilde{\mathbb{C}}^*$ *de (4.0.2) possédant la propriété suivante : il existe des constantes* C, A, R, $\delta > 0$ *telles que, quels que soient* $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon \in]\alpha - \delta, \alpha + \delta[$ *et* $x \in \widetilde{\mathbb{C}}^*$ *avec* $|x| < R$, *on ait :*

$$|y^{\alpha}(x) - \widehat{y}_n(x)| < CA^n q^{\frac{1}{2}[n^2 + (\arg_q(xe^{-i\varepsilon}))^2]}|x|^{n+1}, \tag{4.7.1}$$

$\widehat{y}_n$ *désignant la somme partielle d'ordre* n *de* $\widehat{y}$.

4.8. **Cas où** $\lambda \notin q^{\mathbb{Z}}$ **et** $y_\lambda = \frac{1}{\theta_q(\lambda/x)}$.
Remplaçons y_λ par $\frac{1}{\theta_q(\lambda/x)}$ et substituons à $C(x)$ une série de Laurent $\sum_{n\in\mathbb{Z}} C_n x^n$ dans l'équation (4.5.1) ; on a $C_n = \frac{\lambda^{-n} q^{-n(n+1)/2}}{1 - \lambda q^n}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, ce qui donne la solution suivante de l'équation (4.0.2) :

$$y^{[\lambda;q]}(x) = \sum_{\xi \in [\lambda;q]} \frac{\varphi(\xi)}{\theta_q(\xi/x)}, \tag{4.8.1}$$

où $\varphi = \frac{1}{1-\xi}$.

Théorème 4.9. *Soit* $\lambda \in \mathbb{C}^* \setminus [1;q]$. *La fonction* $y^{[\lambda;q]}$ *définie dans* $\mathbb{C}^* \setminus [-\lambda;q]$ *par (4.8.1) est l'*unique *solution méromorphe sur* $\mathbb{C}^*$ *de (4.0.2) possédant les propriétés suivantes : il existe des constantes* C, A, $R > 0$ *telles que pour tout* $\rho > 0$, *on ait :*

$$|y^{[\lambda;q]}(x) - \widehat{y}_n(x)| < \frac{C}{\rho} A^n |q|^{n(n-1)/2} |x|^n \tag{4.9.1}$$

si $0 < |x| < R$, $\sup_{\xi \in [\lambda;q]} |1 + \frac{\xi}{x}| \geq \rho$ *et* $n \in \mathbb{N}$.

En effet, si y' est une autre solution qui vérifie également la condition (4.9.1), alors la différence $y'(x) - y^{[\lambda;q]}$ sera de la forme $\frac{h(x)}{\theta_q(q^m\lambda/x)}$, avec h holomorphe au voisinage de $0 \in \mathbb{C}$ ([RC02]). Avec l'équation $xy(qx) = y(x)$ et l'hypothèse que $\lambda \notin \mathbb{Z}$, on déduit que $h \equiv 0$.

Sommations de Borel-Laplace q-analogues

Rappelons que la transformée de Laplace de la fonction φ dans la direction $d = \mathbb{R}^+ e^{i\alpha}$, d'argument α, issue de l'origine dans le plan complexe de la variable ξ, est (sous réserve d'existence) $\mathcal{L}^d\varphi(x) = \int_d e^{-\xi/x}\,\varphi(\xi)\,d\xi$.

La méthode classique de sommation de Borel-Laplace est décrite par le diagramme suivant.

$$\begin{array}{lccc} & \widehat{f} = \sum\limits_{n\geq 1} a_n x^n & \overset{\widehat{\mathcal{B}}}{\longrightarrow} & \varphi = \sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{a_n}{(n-1)!}\xi^{n-1} \\ (4.9.2) & & \overset{\mathcal{L}^\alpha}{\longrightarrow} & f^\alpha = \displaystyle\int_0^{\infty e^{i\alpha}} e^{-\xi/x}\varphi\,(\xi)\,d\xi. \end{array}$$

Elle fonctionne pour la série formelle $\widehat{f}$ si celle-ci est Gevrey 1, ce qui équivaut à la convergence de φ, et si cette dernière se prolonge analytiquement le long de d avec une croissance convenable.

Si l'on appelle *transformée de q-Laplace de φ dans la direction d'argument* α l'intégrale de (4.6.2), le théorème 4.7 fait apparaitre la version q-analogue suivante de la méthode de sommation exponentielle de Borel-Laplace (version continue) :

$$\begin{array}{lccc} & \widehat{f} = \sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n & \overset{\widehat{\mathcal{B}}_{q;1}}{\longrightarrow} & \varphi = \sum\limits_{n\geq 0} a_n q^{-n(n-1)/2}\xi^n \\ (4.9.3) & & \overset{\mathcal{L}^\alpha_{q;1}}{\longrightarrow} & f^\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\,\log q}}\displaystyle\int_0^{\infty e^{i\alpha}} q^{-\frac{1}{2}(\log_q(\xi/x)+1/2)^2}\,\varphi(\xi)\,\frac{d\xi}{\xi}. \end{array}$$

De manière analogue, le théorème 4.9 nous conduit au diagramme suivant :

$$\begin{array}{lccc} & \widehat{f} = \sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n & \overset{\widehat{\mathcal{B}}_{q;1}}{\longrightarrow} & \varphi = \sum\limits_{n\geq 0} a_n q^{-n(n-1)/2}\xi^n \\ (4.9.4) & & \overset{\mathcal{L}^{[\lambda;q]}_{q;1}}{\longrightarrow} & f^{[\lambda;q]} = \sum\limits_{\xi\in[\lambda;q]} \dfrac{\varphi(\xi)}{\theta_q(\xi/x)}, \end{array}$$

qui permet de définir une version q-analogue discrète de la sommation de Borel Laplace. Dans les diagrammes ci-dessus, la série φ doit être convergente (i.e. $\widehat{f}$ doit être q-Gevrey d'ordre 1) et le prolongement analytique de φ doit exister dans la direction d'argument α et admettre à l'infini au plus une croissance du type $\theta_{|q|}(A|\xi|)$ ou, de façon équivalente, du type $|\xi|^\mu e^{\frac{(\ln|\xi|)^2}{2\ln|q|}}$: c'est ce que l'on appelle une *croissance q-exponentielle d'ordre un*. S'il en est ainsi, on note

$f^{[\lambda;q]} = S_{[\lambda;q]}\widehat{f}$. C'est cette q-somme de $\widehat{f}$ dans la q-direction $[\lambda; q]$ (que l'on peut identifier à un point de la courbe elliptique $\mathbf{E}_q$) que nous privilégierons.

Définition 4.10. Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert non borné et φ une fonction définie dans U. Soit $k > 0$. On dit que f admet à l'infini dans U *une croissance q-exponentielle d'ordre k* si, pour tout $\rho > 0$, il existe des constantes C, $A > 0$ telles que, pour tout $\xi \in U \smallsetminus \{0\}$ vérifiant $\inf_{\chi \in \mathbb{C} \smallsetminus U} |1 - \frac{\chi}{\xi}| \geq \rho$, on ait $|\varphi(\xi)| < C\theta_{|q|^{\frac{1}{k}}}(A|\xi|)$.

Exemple 4.11.

(1) Avec la formule de Cauchy, on vérifie qu'une fonction entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ est à croissance q-exponentielle d'ordre un si et seulement si $|a_n| < CA^n|q|^{-n(n-1)/2}$, où C, $A > 0$ sont des constantes [Ram92].

(2) En particulier, la fonction $\xi \mapsto \prod_{n\geq 0}(1 - q^{-n}\xi)$ est à croissance q-exponentielle d'ordre un, car son développement de Taylor à l'origine est $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(q^{-1};q^{-1})_n} q^{-n(n-1)/2}\xi^n$.

Soit maintenant $\Delta \in \mathbb{C}\{x\}[\sigma_q]$ un opérateur linéaire aux q-différences à coefficients convergents. Nous supposerons que le polygone de Newton de Δ n'a qu'une pente non nulle et que celle-ci vaut 1. Ceci équivaut (c'est un exercice facile à partir des définitions du paragraphe 3) à dire qu'il s'écrit :

$$\Delta = P(x\sigma_q) + x\widetilde{\Delta} \tag{4.11.1}$$

où $\widetilde{\Delta} \in \mathbb{C}\{x\}[x\sigma_q]$. L'équation $P(X) = 0$ peut alors être considérée comme *l'équation caractéristique de* Δ pour la pente 1.

On démontre [Zha02] que toute solution formelle de $\Delta\widehat{y} = c$ (avec c convergent) est sommable par la sommation de q-Borel-Laplace discrète $S_{[\lambda,q]}$ si λ n'est pas dans la q-orbite d'une racine de l'équation caractéristique. La somme y vérifie l'équation $\Delta y = c$. Dans la situation analogue pour un système, une solution fondamentale formelle (bien écrite...) $\widehat{F}$ est sommable dans les même conditions. Deux sommes $S_{[\lambda,q]}\widehat{F}$ et $S_{[\mu,q]}\widehat{F}$ se correspondent par multiplication à droite par une matrice elliptique $S_{\lambda,\mu}$ (qui, par analogie avec le cas différentiel [Ram93] mérite de s'appeler q-multiplicateur de Stokes). On notera que les images de λ et μ dans $\mathbf{E}_q$ doivent éviter un nombre fini de valeurs.

On peut appliquer ces résultats aux séries hypergéométriques confluentes basiques du type ${}_2\Phi_0$ [Zha02] :

$${}_2\Phi_0(a, b; -; q, x) \underset{def}{=} \sum_{n\geq 0} \frac{(a;q)_n(b;q)_n}{(q;q)_n} q^{n(n-1)/2}(-x)^n \tag{4.11.2}$$

Posons $a = q^\alpha$, $b = q^\beta$ et $x = z/(1-q)$. La série divergente ${}_2\Phi_0(a, b; -; q, x)$ converge formellement, lorsque $q \to 1$, vers la série hypergéométrique confluente classique ${}_2F_0(\alpha, \beta; -; -z)$, qui est également divergente.

Nous avons introduit, dans l'exemple 2.2, la série hypergéométrique basique ${}_2\Phi_1(a, b; c; q, x)$ et son équation fonctionnelle. Posons $z = cx$ et supposons que

$c \to \infty$ dans (2.2.1). On obtient la série divergente ${}_2\Phi_0(a,b;-;q,x)$ et l'équation (2.2.2) devient

$$\left\{(c - abqx)\sigma_q{}^2 - (1-(a+b)qx)\sigma_q - qx\right\}{}_2\Phi_0(a,b;-;q,x) = 0. \tag{4.11.3}$$

Soit φ la transformée de q-Borel de ${}_2\Phi_0(a,b;-;q,x)$. On a

$$\varphi(\xi) = {}_2\Phi_1(a,b;0;q,-\xi) \in \mathbb{C}\{\xi\}. \tag{4.11.4}$$

La série ${}_2\Phi_0(a,b;-;q,x)$ est sommable par l'opérateur $S_{[\lambda,q]}$ si $\lambda \in \mathbb{C}^* \smallsetminus [-1;q]$.

En jouant sur des formules de connection et leurs q-analogues, on peut montrer que la $S_{[\lambda,q]}$ somme de la série divergente ${}_2\Phi_0(a,b;-;q,x)$ tend, quand q tend vers 1 ($x = z/(1-q)$), vers la somme de Borel de la série divergente ${}_2F_0(\alpha,\beta;-;-z)$ dans la direction passant par λ. On en déduit que « le » multiplicateur de Stokes [Ram93] associé à ${}_2F_0(\alpha,\beta;-;-z)$ peut être interprété comme limite du q-multiplicateur de Stokes $S_{\lambda,\mu}$ associé à ${}_2\Phi_0(a,b;-;q,x)$ pourvu que les nombres complexes λ et μ, ni réels négatifs, ni nuls, ne soient pas sur une même direction issue de 0.

La série $(\sum_{n\geq 0} q^{n(n-1)/2}x^n)^2$ n'est pas sommable d'un seul niveau !

Posons $\widehat{Y} = (\sum_{n\geq 0} q^{n(n-1)/2}x^n)^2$ et considérons sa transformée de q-Borel $\widehat{\mathcal{B}}_{q;1}\widehat{Y}$. Par un calcul simple, on peut vérifier la formule suivante : si $\widehat{f} = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ et $\widehat{g} \in \mathbb{C}[[x]]$, alors

$$\widehat{\mathcal{B}}_{q;1}(\widehat{f}\widehat{g}) = \sum_{n\geq 0} a_n q^{-n(n-1)/2}\xi^n \widehat{\mathcal{B}}_{q;1}\widehat{g}(q^{-n}\xi).$$

Il s'ensuit que, si $P(\xi) = \widehat{\mathcal{B}}_{q;1}\widehat{Y}(\xi)\prod_{n\geq 0}(1-q^{-n}\xi)$, alors P est une fonction entière telle que

$$P(q^m) = (-1)^m q^{m(3m+1)/2}(q^{-1};q^{-1})_m(q^{-1};q^{-1})_\infty. \tag{4.11.5}$$

On en déduit que P admet à l'infini une croissance q-exponentielle d'ordre ≥ 3.

Remarque 4.12. La transformée de q-Borel de $(\sum_{n\geq 0} q^{n(n-1)/2}x^n)^2$ représente une fonction méromorphe dans $\mathbb{C}$, à pôles (simples) dans $q^{\mathbb{N}}$ et ayant à l'infini dans $\mathbb{C} \smallsetminus q^{\mathbb{N}}$ une croissance q-exponentielle d'ordre exactement deux.

Par conséquent, la série $(\widehat{y})^2$ n'est pas q-Borel-Laplace sommable comme $\widehat{y}$ elle-même. Ce phénomène est lié au fait suivant : l'équation de $(\widehat{y})^2$ contient deux pentes non triviales alors que (4.0.2) n'en a qu'une seule. En effet, avec l'équation (4.0.2), on peut écrire $\sigma_q\widehat{Y}$ – *qui n'est autre que* $(\sigma_q\widehat{y})^2$ – en termes de $\widehat{Y}$ et $\widehat{y}$; cela nous conduit à l'équation suivante :

$$\Delta\widehat{Y} = 1 + x, \quad \Delta = q^2x^3\sigma_q^2 - x(1+x)\sigma_q + 1. \tag{4.12.1}$$

Théorème 4.13. *Dans (4.12.1), on a* $\Delta = (x\sigma_q - 1)(x^2\sigma_q - 1)$ *et la série* $\widehat{Y}$ *est* $(1, 1/2)$*-sommable par le procédé suivant :*

$$\widehat{f} = \sum_{n\geq 0} a_n x^n \quad \xrightarrow{\widehat{\mathcal{B}}_{q;1}} \quad \varphi = \sum_{n\geq 0} a_n q^{-n(n-1)/2}\xi^n$$

$$\xrightarrow{\mathcal{A}^*_{q;1,1/2}} \quad f_1^* \quad \xrightarrow{\mathcal{L}^*_{q;1/2}} \quad f^*_{(1,1/2)}. \tag{4.13.1}$$

Ici, $\mathcal{A}_{q;1,1/2} = \mathcal{L}_{q^{\frac{1}{2}};1} = \mathcal{L}_{q;1/2}$ *et, si l'on suit la méthode (4.9.3) (resp. (4.9.4)), on pose* $* = \alpha$ *(resp.* $* = [\lambda; q^{\frac{1}{2}}]$*).*

Dans [MZ00] et [RSZ03], on démontre que toutes les séries entières solutions formelles d'une équation aux q-différences linéaire analytique sont multisommables par des procédés généralisant celui évoqué ci-dessus. Ce résultat utilise de façon essentielle la factorisation analytique des opérateurs analytiques aux q-différences (cf. §3). L'utilisation du procédé de multisommation basé sur des transformations de Laplace q-analogues discrètes donne naissance à un phénomène de Stokes q-analogue (par comparaison entre des sommations dans des q-directions $[\lambda; q]$ différentes). Comme dans le cas de la sommation simple décrit ci-dessus, les multiplicateurs de Stokes ne sont plus constants mais à coefficients elliptiques, comme ceux de la matrice de Birkhoff (cf. §3). Ces multiplicateurs de Stokes sont, dans le cas irrégulier, parmi les « transcendental invariants » souhaités par Birkhoff (cf. §1). Inversement on peut reconstituer un germe d'équation aux q-différences linéaire analytique locale (à transformation de jauge près) à partir des invariants formels et des q-multiplicateurs de Stokes. C'est la solution du problème de Riemann-Hilbert q-analogue local dans le cas irrégulier qui répond à une autre question de Birkhoff (« inverse Riemann theory for the neighborhood of $x = \infty$ »). Pour passer au cas global irrégulier, il suffit d'ajouter aux invariants locaux en 0 et ∞ une généralisation convenable de la matrice de Birkhoff.

5. Équations aux q-différences arithmétiques

L'étude des équations aux q-différences complexes a déjà porté ses fruits, même si beaucoup reste à faire. Lorsque l'on pense aux développements récents de la théorie p-adique et arithmétique des équations différentielles, il est clair que, relativement aux équations aux q-différences, ces points de vue sont moins avancés.

La littérature sur les équations aux q-différences p-adiques est assez pauvre. Lorsque $|q| \neq 1$ les résultats existants (*cf.* les théorèmes d'indice dans [BB92] et la construction des solutions canoniques dans [Sau00b]) indiquent que la théorie est plutôt semblable à la théorie complexe. La grande différence avec le cas complexe est que, en vue de l'étude de la confluence, on est obligé de traiter le cas $|q| = 1$: en effet dans un corps ultramétrique la norme de q est 1 lorsque q est proche de 1. Le travail ne fait que commencer mais il est clair que la théorie p-adique des équations aux q-différences avec $|q| = 1$ est une parfaite déformation de la théorie des équations différentielles p-adiques, ce qui laisse entrevoir d'intéressantes implications géométriques [And02c].

Ici, nous parlerons plutôt du point de vue arithmétique et en particulier du problème « schwarzien » de la recherche des solutions algébriques d'équations fonctionnelles linéaires. Dans ce contexte on obtient plutôt des résultats de rationalité. En particulier, pour les équations hypergéométriques, on démontre :

Théorème 5.1. ([Gou36], Ch. III, et [DV02a], Appendix) *Soit $q \in \mathbb{C}^*$ un nombre complexe non racine de l'unité. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) *L'équation hypergéométrique basique (2.2.2) de paramètres a, b, c admet une base de solutions dans $\mathbb{C}(x)$.*

(2) *Il existe $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}$ tels que $a = q^\alpha$, $b = q^\beta$ et $c = q^\gamma$ et l'équation hypergéométrique classique (2.2.4) de paramètres α, β, γ admet une base de solutions dans $\mathbb{C}(x)$.*

(3) *Il existe $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}$ tels que $a = q^\alpha$, $b = q^\beta$ et $c = q^\gamma$ et $|1-\gamma|$, $|\gamma-\alpha-\beta|$ et $|\alpha-\beta|$ sont les longueurs des côtés d'un triangle.*

Dans la suite q est un nombre algébrique non nul et il n'est pas une racine de l'unité : à notre connaissance, ce choix de q est déterminant pour tous les résultats qui se situent autour des problèmes d'algébricité et rationalité liés aux équations aux q-différences. En effet, cela implique qu'il existe une norme (archimédienne ou ultramétrique) telle que $|q| \neq 1$ et permet d'utiliser les fortes propriétés des équations aux q-différences, que nous avons vues plus haut. C'est, par exemple, le cas du théorème de Bézivin et Boutabaa :

Théorème 5.2. ([BB92]) *Soit $y(x)$ une série formelle à coefficients dans la clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}}$ de $\mathbb{Q}$, solution d'un système d'equations $\mathcal{L}_1 y(x) = \mathcal{L}_2 y(x) = 0$, tel que $\mathcal{L}_i y(x) = 0$, pour $i = 1, 2$, est une équation aux q_i-différences linéaire à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}(x)$, avec $q_1, q_2 \in \overline{\mathbb{Q}}$ multiplicativement indépendants*[3]. *Alors $y(x)$ est la série de Taylor d'une fonction rationnelle.*

Dans [Béz91] Bézivin conjecture un énoncé pour les équations aux q-différences dans le sillage de la célèbre conjecture de Grothendieck sur l'algébricité des solutions des équations différentielles :

Conjecture 5.3. (Grothendieck) *L'équation différentielle*

$$a_\mu(x) \frac{d^\mu y}{dx^\mu}(x) + a_{\mu-1}(x) \frac{d^{\mu-1} y}{dx^{\mu-1}}(x) + \cdots + a_0(x) y(x) = 0,$$

avec $a_i(x) \in \mathbb{Q}(x)$, admet un système complet des solutions algébriques, i.e. *dans la clôture algébrique de $\mathbb{Q}(x)$, si et seulement si sa réduction modulo p admet un système complet de solutions dans $\mathbb{F}_p(x)$, pour presque tout p.*

La conjecture peut être reformulée de plusieures façons, en apparence plus générales que l'énoncé 5.3, mais toutes équivalentes entre elles. En particulier elle est équivalente à une caractérisation arithmétique de l'algèbre de Lie du groupe de Galois générique, conjecturée par N. Katz [Kat82]. De nombreux travaux sont consacrés à la conjecture de Grothendieck (*cf.* par exemple les travaux de T. Honda, D.V. et G.V. Chudnovsky, N. Katz, Y. André, J.-B.

---

[3] Cela signifie que pour tous $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ tels que $q_1^{m_1} = q_2^{m_2}$ on a $m_1 = m_2 = 0$, ce qui équivaut à : $q_1^{\mathbb{Z}} \cap q_2^{\mathbb{Z}} = 1$ et q_1, q_2 non racines de l'unité.

Bost), mais elle n'a été prouvée que dans des cas particuliers. Pour les équations aux q-différences le problème est plus simple et nous disposons d'un théorème qui peut être considéré comme un q-analogue de (5.3).

Considérons un nombre rationnel $q \neq 0, 1, -1$ et une équation aux q-différences

$$\mathcal{L}y = a_\mu(x)y(q^\mu x) + a_{\mu-1}(x)y(q^{\mu-1}x) + \cdots + a_0(x)y(x) = 0, \ a_0(x)a_\mu(x) \neq 0,$$

à coefficients $a_i(x)$ dans $\mathbb{Q}(x)$[4]. Pour presque tout nombre premier p, la réduction $\overline{q}$ de q modulo p est différente de zéro et engendre un sous-groupe cyclique de $\mathbb{F}_p$ d'ordre κ_p. Pour presque tout p, il existe donc un entier positif maximal ℓ_p et deux entiers g, h tels que $1 - q^{\kappa_p} = p^{\ell_p}\frac{g}{h}$ et que $p \not| gh$, et on peut considérer la réduction $\mathcal{L}_p y = 0$ de $\mathcal{L}y = 0$ modulo p^{ℓ_p}. Soit $\mathcal{A} = \mathbb{Z}\left[x, \frac{1}{P(q^i x)}, i \geqslant 1\right]$, avec $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$, une sous-$\mathbb{Z}$-algèbre de $\mathbb{Q}(x)$, telle que $a_i(x) \in \mathcal{A}$ pour tout $i = 0, \ldots, \mu$. Le résultat est le suivant :

Théorème 5.4. [DV02a] *L'équation aux q-différences $\mathcal{L}y = 0$ admet un système complet de solutions dans $\mathbb{Q}(x)$ si et seulement si, pour presque tout nombre premier p, l'équation $\mathcal{L}_p y = 0$ admet un système complet de solutions dans $\mathcal{A} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/p^{\ell_p}\mathbb{Z}$.*

Le théorème 5.4 répond partiellement à la conjecture de Bézivin, qui prédit le même type de résultat en considérant la réduction modulo p à la place de la réduction modulo p^{ℓ_p}.

Les techniques employées dans la preuve du théorème 5.4 sont empruntées à la théorie des G-fonctions (*cf.* [And89] et [DGS94]). Le fait que l'on puisse prouver un tel énoncé dans le cas des q-différences, alors que le cas différentiel est ouvert, tient encore une fois aux étonnantes propriétés des équations aux q-différences lorsque $|q| \neq 1$ et au fait que q est un nombre rationnel non racine de l'unité : en effet, il existe toujours une norme sur $\mathbb{Q}$ telle que $|q| \neq 1$ et l'on peut alors construire une solution ayant un rayon de méromorphie infini pour cette norme.

Comme indiqué au §2, nous pouvons considérer un module aux q-différences $\mathcal{M} = (M, \Phi)$ sur $\mathbb{Q}(x)$. Pour un choix convenable du polynôme $P(x)$, il existe un réseau $\widetilde{M}$ de M défini sur l'algèbre $\mathcal{A}$, stable par Φ. Le théorème 5.4 est équivalent à l'énoncé suivant :

Théorème 5.5. *Le module aux q-différences $\mathcal{M} = (M, \Phi)$ est banal si et seulement si pour presque tout nombre premier p l'opérateur Φ^{κ_p} induit l'identité sur $\widetilde{M} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/p^{\ell_p}\mathbb{Z}$.*

Comme dans la théorie différentielle, nous pouvons attacher au module aux q-différences $\mathcal{M}$ un sous-groupe algébrique $Gal(\mathcal{M})$ de $GL(M)$, qu'on appelle groupe de Galois (générique). Il s'agit du stabilisateur dans $GL(M)$ des modules aux q-différences qui sont sous-quotients de sommes finies de la forme

[4]Pour simplifier les notations (mais cela ne simplifie pas les démonstrations !) nous ne considérerons que des équations aux q-différences à coefficients dans $\mathbb{Q}(x)$. En fait, les énoncés qui suivent sont prouvés dans [DV02a] pour des équations aux q-différences définies sur $\overline{\mathbb{Q}}(x)$.

$\oplus_{i,j}(M^{\otimes^i} \otimes_{\mathbb{Q}(x)} (M^*)^{\otimes^j})$, où M^* est le dual de M, munis de l'opérateur induit par Φ. Le choix du réseau $\widetilde{M}$ permet définir la réduction modulo p^{ℓ_p} de $Gal(\mathcal{M})$ et de donner encore un autre énoncé équivalent à 5.4 :

Théorème 5.6. *Le groupe algébrique $Gal(\mathcal{M})$ est le plus petit sous-groupe algébrique de $GL(M)$, dont la réduction modulo p^{ℓ_p} contient la réduction de Φ^{κ_p} modulo p^{ℓ_p} pour presque tout p.*

La nature multiplicative de l'opérateur Φ permet parfois de calculer tous les opérateurs Φ^n et, donc, de déterminer par voie arithmétique le groupe de Galois générique.

6. Références

[Ada29] C. R. Adams. On the linear ordinary q-difference equations. *Ann. Math. Ser. II*, 30(2), 195–205, 1929.

[And89] Y. André. *G-functions and geometry.* Aspects of Mathematics, E13. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1989.

[And00a] Y. André. Séries Gevrey de type arithmétique. I. Théorèmes de pureté et de dualité. *Annals of Mathematics. Second Series*, 151(2), 705–740, 2000.

[And00b] Y. André. Séries Gevrey de type arithmétique. II. Transcendance sans transcendance. *Annals of Mathematics. Second Series*, 151(2), 741–756, 2000.

[And01a] Y. André. Différentielles non commutatives et théorie de Galois différentielle ou aux différences. *Ann. Sci. Éc. Norm. Sup.*, 34, 685–739, 2001.

[And02a] Y. André. On Galois theory of q-deformations of differential equations. Prépublications de l'Institut de Mathématiques de Jussieu n° 333, 2002.

[And02b] Y. André. Sur la conjecture des p-courbures de Grothendieck-Katz et un problème de Dwork. Prépublications n° 02-28 du Département de mathématiques et applications de l'École Normale Supérieure, Paris, 2002.

[And02c] Y. André. Monodromie des connexions p-adiques, et q-déformations. Ramification en Géométrie et Arithmétique, Conférence du 23 au 27 Septembre 2002, Institut Galilée, Université Paris 13, France. `http://zeus.math.univ-paris13.fr/~ramifica/notes.html`.

[BB92] J.-P. Bézivin et A. Boutabaa. Sur les équations fonctionnelles p-adiques aux q-différences. *Universitat de Barcelona. Collectanea Mathematica*, 43(2), 125–140, 1992.

[Béz91] J.-P. Bézivin. Les suites q-récurrentes linéaires. *Compositio Mathematica*, 80(3), 285–307, 1991.

[Béz92] J.-P. Bézivin. Sur les équations fonctionnelles aux q-différences. *Aequationes Math.*, 43(2-3), 159–176, 1992.

[BG41] G. D. Birkhoff et P. E. Guenther. Note on a canonical form for the linear q-difference system. *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.*, 27, 218–222, 1941.

[Bir13] G. D. Birkhoff. The generalized Riemann problem for linear differential equations and the allied problems for linear difference and q-difference equations. *Proc. Amer. Acad.*, 49, 521–568, 1913.

[Bos01] J.-B. Bost. Algebraic leaves of algebraic foliations over number fields. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, (93), 161–221, 2001.

[Chy98] F. Chyzak. Fonctions holonomes en calcul formel, *Thèse de l'École Polytechnique*, INRIA.

[CC85a] D. V. Chudnovsky et G. V. Chudnovsky. Applications of Padé approximations to Diophantine inequalities in values of G-functions. In *Number theory (New York, 1983–84)*, volume 1135 of *Lecture Notes in Math.*, pages 9–51. Springer, Berlin, 1985.

[CC85b] D. V. Chudnovsky et G. V. Chudnovsky. Applications of Padé approximations to the Grothendieck conjecture on linear differential equations. In *Number theory (New York, 1983–84)*, volume 1135 of *Lecture Notes in Math.*, pages 52–100. Springer, Berlin, 1985.

[DGS94] B. Dwork, G. Gerotto, et F. J. Sullivan. *An introduction to G-functions*, volume 133 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1994.

[DV02a] L. Di Vizio. On the arithmetic theory of q-difference equations. The q-analogue of the Grothendieck-Katz's conjecture on p-curvatures. *Invent. Math.*, 150(3), 517–578, 2002.

[DV02b] L. Di Vizio. Introduction to p-adic q-difference equations (weak Frobenius structure and transfer theorems). Prépublication du Laboratoire Emile Picard n° 250, `arXiv:math.NT/0211217`, 2002.

[GR90] G. Gasper et M. Rahman. *Basic hypergeometric series*, volume 35 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 1990. With a foreword by Richard Askey.

[Gou36] E. Goursat *Leçons sur les séries hypergéométriques et sur quelques fonctions qui s'y rattachent*. Hermann, Paris, 1936.

[Hon81] T. Honda. Algebraic differential equations. In *Symposia Mathematica, Vol. XXIV (Sympos., INDAM, Rome, 1979)*, pages 169–204. Academic Press, London, 1981.

[In56] E. L. Ince. *Ordinary Differential Equations*. Dover Publications, 1956.

[IKSY91] K. Iwasaki, H. Kimura, S. Shimomura et M. Yoshida. *From Gauss to Painlevé*, Braunschweig, Vieweg, 1991.

[Kat82] N. M. Katz. A conjecture in the arithmetic theory of differential equations. *Bull. Soc. Math. France*, 110(2), 203–239, 1982. et Bull. Soc. Math. France, 110(2), 347-348.

[Kat87] N. M. Katz. On the calculation of some differential Galois groups. *Invent. Math.*, 87(1), 13–61, 1987.

[Lan87] S. Lang. *Elliptic Functions*, Springer Verlag, 1987.

[MZ00] F. Marotte et C. Zhang. Multisommabilité des séries entières solutions formelles d'une équation aux q-différences linéaire analytique. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 50(6), 1859–1890, 2000.

[Mum82] D. Mumford. *Tata Lectures on Theta, I.* Birkhäuser, 1982.

[Pr83] C. Praagman. The formal classification of linear difference equations. *Proc. Kon. Ned. Ac. Wet. ser. a,86.*

[vdPS97] M. van der Put et M. F. Singer. *Galois Theory of Difference Equations*. Springer-Verlag, Berlin, 1997.

[vdPS03] M. van der Put et M. F. Singer. *Galois Theory of Linear Differential Equations*. Springer-Verlag, Berlin, 2003.

[Ram92] J.-P. Ramis. About the growth of entire functions solutions of linear algebraic q-difference equations. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6)*, 1(1), 53–94, 1992.

[Ram93] J.-P. Ramis. Séries divergentes et théories asymptotiques. *Bull. Soc. Math. France*, 121(Panoramas et Syntheses, suppl.), 74, 1993.

[RC02] J.-P. Ramis et C. Zhang. Développement asymptotique q-gevrey et fonction thêta de jacobi. *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I*, 335, 899–902, 2002.

[RSZ03] J.-P. Ramis, J. Sauloy, et C. Zhang. Classification analytique locale des équations aux q-différences linéaires et irrégulières, *en préparation*, 2003.

[Sau00a] J. Sauloy. Systèmes aux q-différences singuliers réguliers : classification, matrice de connexion et monodromie. *Annales de l'Institut Fourier*, 50(4), 1021–1071, 2000.

[Sau00b] J. Sauloy. Théorie de Galois des équations aux q-différences fuchsiennes. Thèse doctorale, Université Paul Sabatier, Toulouse, 2000.

[Sau02a] J. Sauloy. La filtration canonique par les pentes d'un module aux q-différences. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 334(1), 11–14, 2002.

[Sau02b] J. Sauloy. La filtration canonique par les pentes d'un module aux q-différences. Prépublication du Laboratoire Emile Picard n° 249. `arXiv:math.QA/0210430`, 2002.

[Sau02c] J. Sauloy. Galois theory of fuchsian q-difference equations. Prépublication du Laboratoire Emile Picard n° 246. `arXiv:math.QA/0210221`, 2002, *A paraitre aux Annales de l'École Normale Supérieure.*

[Was65] W. Wasow. *Asymptotic Expansions for Ordinary Differential Equations.* Dover Publications, 1965.

[W38] A. Weil. Généralisation des fonctions abéliennes. *J. Math. pures et appl.*, t. 17, 47-87, 1938.

[WW27] E.T. Whittaker and G.N. Watson, *A course of Modern Analysis*, Cambridge University Press, 1927.

[Zha99] C. Zhang. Développements asymptotiques q-Gevrey et séries Gq-sommables. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 49(1), vi–vii, x, 227–261, 1999.

[Zha02] C. Zhang. Une sommation discrète pour des équations aux q-différences linéaires et à coefficients analytiques : théorie générale et exemples *in « Differential Equations and the Stokes Phenomenon »* , edited by B. L. J. Braaksma, G. K. Immink, M. van der Put and J. Top, World Scientific, 2002.