Fins topologiques de Graphes Aléatoires Géométriques

David Coupier - Université Lille 1

1ère journée lilloise de Proba-Stat

Un principe général

Dans un modèle probabiliste défini à partir de règles microscopiques et ayant de bonnes propriétés (stationnarité ou isotropie), le nombre d'objets satisfaisant une certaine propriété macroscopique est p.s. égal à 0, 1 *ou* ∞.

Dans cet exposé :

- Les *modèles probabilistes...* sont des Graphes Aléatoires Géométriques (GAG) dans $\mathbb{R}^2$.
- Les *objets macroscopiques* sont des fins topologiques ($=$ branches semi-infinies) :

$$\kappa := \lim_{R\to\infty} \nearrow \#\Big\{ \text{c.c. } \infty \text{ de } G \cap B(0,R)^c \Big\} \text{ a.s.}$$

Un principe général

Dans un modèle probabiliste défini à partir de règles microscopiques et ayant de bonnes propriétés (stationnarité ou isotropie), le nombre d'objets satisfaisant une certaine propriété macroscopique est p.s. égal à 0, 1 *ou* ∞.

Dans cet exposé :

- Les *modèles probabilistes*... sont des Graphes Aléatoires Géométriques (GAG) dans $\mathbb{R}^2$.
- Les *objets macroscopiques* sont des fins topologiques ($=$ branches semi-infinies) :

$$\kappa := \lim_{R\to\infty} \nearrow \#\Big\{ \text{c.c. } \infty \text{ de } G \cap B(0,R)^c \Big\} \text{ a.s.}$$

Un principe général

Dans un modèle probabiliste défini à partir de règles microscopiques et ayant de bonnes propriétés (stationnarité ou isotropie), le nombre d'objets satisfaisant une certaine propriété macroscopique est p.s. égal à 0, 1 *ou* ∞*.*

Dans cet exposé :

- Les *modèles probabilistes*... sont des Graphes Aléatoires Géométriques (GAG) dans $\mathbb{R}^2$.
- Les *objets macroscopiques* sont des fins topologiques ($=$ branches semi-infinies) :

$$\kappa := \lim_{R \to \infty} \nearrow \# \left\{ \text{c.c. } \infty \text{ de } G \cap B(0,R)^c \right\} \text{ a.s.}$$

Plan

1. L'Arbre Couvrant Radial (RST)
2. La Forêt Couvrante Dirigée (DSF)
3. Le Graphe Couvrant Omnidirectionnel

Plan

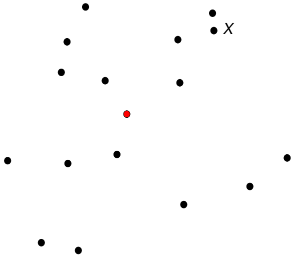
1. L'Arbre Couvrant Radial (RST)
2. La Forêt Couvrante Dirigée (DSF)
3. Le Graphe Couvrant Omnidirectionnel

L'Arbre Couvrant Radial $\mathcal{T}$ (RST)

$\mathcal{N} \cup \{O\}$: ensemble des sommets.

Règle locale : chaque $X \in \mathcal{N}$ est relié au plus proche sommet dans $B(O, |X|)$.

$\Rightarrow$ L'Arbre Couvrant Radial $\mathcal{T}$.



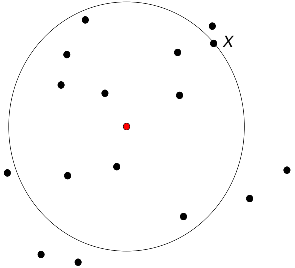
- Introduit par Baccelli & Bordenave en '07 pour modéliser des réseaux de télécommunication.
- p.s. chaque sommet $X \in \mathcal{N} \cup \{O\}$ a un degré fini.

$\Rightarrow \exists$ au moins une branche semi-infinie dans $\mathcal{T}$.

$\mathcal{N} \cup \{O\}$: ensemble des sommets.

Règle locale : chaque $X \in \mathcal{N}$ est relié au plus proche sommet dans $B(O, |X|)$.

$\Rightarrow$ L'Arbre Couvrant Radial $\mathcal{T}$.



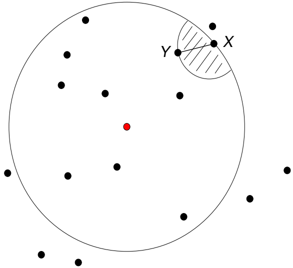
- Introduit par Baccelli & Bordenave en '07 pour modéliser des réseaux de télécommunication.
- p.s. chaque sommet $X \in \mathcal{N} \cup \{O\}$ a un degré fini.

$\Rightarrow \exists$ au moins une branche semi-infinie dans $\mathcal{T}$.

$\mathcal{N} \cup \{O\}$: ensemble des sommets.

Règle locale : chaque $X \in \mathcal{N}$ est relié au plus proche sommet dans $B(O, |X|)$.

$\Rightarrow$ L'Arbre Couvrant Radial $\mathcal{T}$.



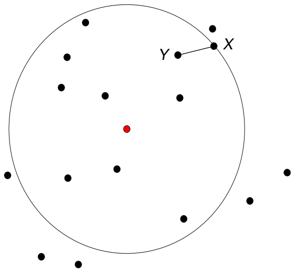
- Introduit par Baccelli & Bordenave en '07 pour modéliser des réseaux de télécommunication.
- p.s. chaque sommet $X \in \mathcal{N} \cup \{O\}$ a un degré fini.

$\Rightarrow \exists$ au moins une branche semi-infinie dans $\mathcal{T}$.

$\mathcal{N} \cup \{O\}$: ensemble des sommets.

Règle locale : chaque $X \in \mathcal{N}$ est relié au plus proche sommet dans $B(O, |X|)$.

$\Rightarrow$ L'Arbre Couvrant Radial $\mathcal{T}$.



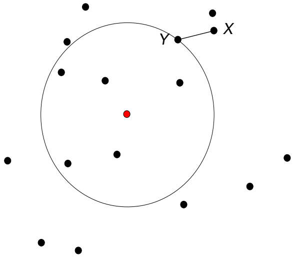
- Introduit par Baccelli & Bordenave en '07 pour modéliser des réseaux de télécommunication.
- p.s. chaque sommet $X \in \mathcal{N} \cup \{O\}$ a un degré fini.

$\Rightarrow \exists$ au moins une branche semi-infinie dans $\mathcal{T}$.

$\mathcal{N} \cup \{O\}$: ensemble des sommets.

Règle locale : chaque $X \in \mathcal{N}$ est relié au plus proche sommet dans $B(O, |X|)$.

$\Rightarrow$ L'Arbre Couvrant Radial $\mathcal{T}$.



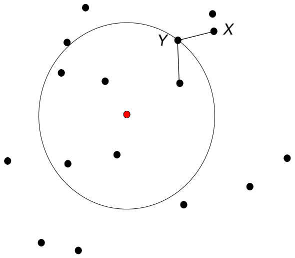
- Introduit par Baccelli & Bordenave en '07 pour modéliser des réseaux de télécommunication.
- p.s. chaque sommet $X \in \mathcal{N} \cup \{O\}$ a un degré fini.

$\Rightarrow \exists$ au moins une branche semi-infinie dans $\mathcal{T}$.

$\mathcal{N} \cup \{O\}$: ensemble des sommets.

Règle locale : chaque $X \in \mathcal{N}$ est relié au plus proche sommet dans $B(O, |X|)$.

$\Rightarrow$ L'Arbre Couvrant Radial $\mathcal{T}$.



- Introduit par Baccelli & Bordenave en '07 pour modéliser des réseaux de télécommunication.
- p.s. chaque sommet $X \in \mathcal{N} \cup \{O\}$ a un degré fini.

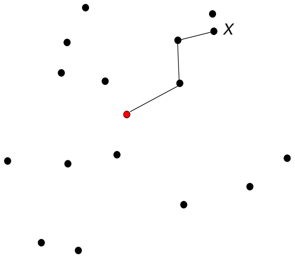
$\Rightarrow \exists$ au moins une branche semi-infinie dans $\mathcal{T}$.

L'Arbre Couvrant Radial $\mathcal{T}$ (RST)

$\mathcal{N} \cup \{O\}$: ensemble des sommets.

Règle locale : chaque $X \in \mathcal{N}$ est relié au plus proche sommet dans $B(O, |X|)$.

$\Rightarrow$ L'Arbre Couvrant Radial $\mathcal{T}$.



- Introduit par Baccelli & Bordenave en '07 pour modéliser des réseaux de télécommunication.
- p.s. chaque sommet $X \in \mathcal{N} \cup \{O\}$ a un degré fini.

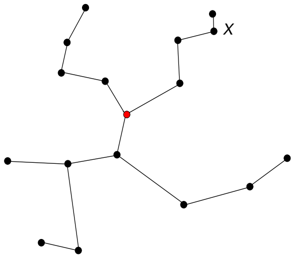
$\Rightarrow \exists$ au moins une branche semi-infinie dans $\mathcal{T}$.

L'Arbre Couvrant Radial $\mathcal{T}$ (RST)

$\mathcal{N} \cup \{O\}$: ensemble des sommets.

Règle locale : chaque $X \in \mathcal{N}$ est relié au plus proche sommet dans $B(O, |X|)$.

$\Rightarrow$ L'Arbre Couvrant Radial $\mathcal{T}$.



- Introduit par Baccelli & Bordenave en '07 pour modéliser des réseaux de télécommunication.
- p.s. chaque sommet $X \in \mathcal{N} \cup \{O\}$ a un degré fini.

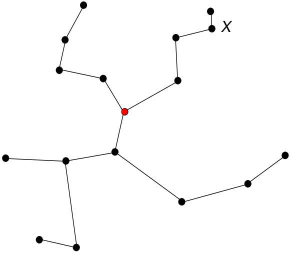
$\Rightarrow \exists$ au moins une branche semi-infinie dans $\mathcal{T}$.

L'Arbre Couvrant Radial $\mathcal{T}$ (RST)

$\mathcal{N} \cup \{O\}$: ensemble des sommets.

Règle locale : chaque $X \in \mathcal{N}$ est relié au plus proche sommet dans $B(O, |X|)$.

$\Rightarrow$ L'Arbre Couvrant Radial $\mathcal{T}$.



- Introduit par Baccelli & Bordenave en '07 pour modéliser des réseaux de télécommunication.
- p.s. chaque sommet $X \in \mathcal{N} \cup \{O\}$ a un degré fini.

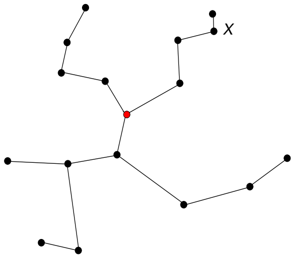
  $\Rightarrow \exists$ au moins une branche semi-infinie dans $\mathcal{T}$.

L'Arbre Couvrant Radial $\mathcal{T}$ (RST)

$\mathcal{N} \cup \{O\}$: ensemble des sommets.

Règle locale : chaque $X \in \mathcal{N}$ est relié au plus proche sommet dans $B(O, |X|)$.

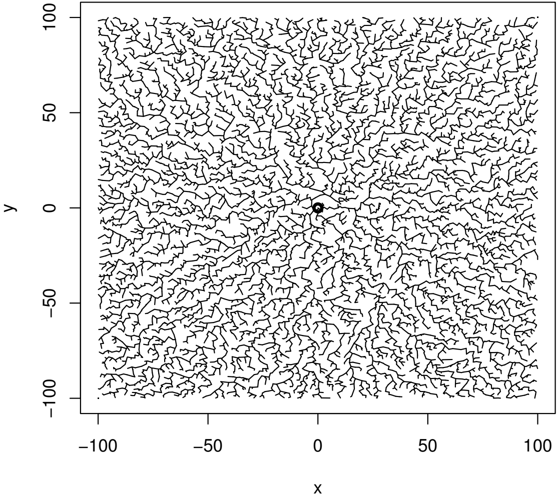
$\Rightarrow$ L'Arbre Couvrant Radial $\mathcal{T}$.



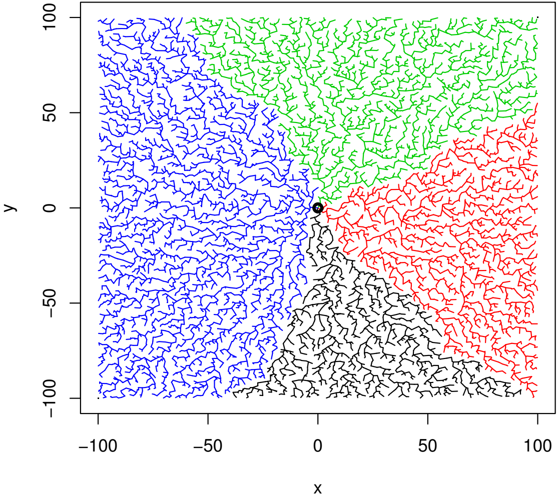
- Introduit par Baccelli & Bordenave en '07 pour modéliser des réseaux de télécommunication.
- p.s. chaque sommet $X \in \mathcal{N} \cup \{O\}$ a un degré fini.

$\Rightarrow \exists$ au moins une branche semi-infinie dans $\mathcal{T}$.

Une simulation du RST



Et avec de la couleur...



Branches semi-infinies du RST

$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une direction asymptotique $\theta \in [0; 2\pi)$ si $\lim_{n\to\infty} \frac{X_n}{|X_n|} = e^{\imath\theta}$.

Theorem (Baccelli & Bordenave '07)

L'Arbre Couvrant Radial $\mathcal{T}$ satisfait :

(1) *p.s. chaque branche semi-infinie de $\mathcal{T}$ admet une direction asymptotique.*

(2) *p.s. pour chaque $\theta \in [0; 2\pi)$, il existe une branche semi-infinie de $\mathcal{T}$ de direction asymptotique θ.*

(3) *pour chaque $\theta \in [0; 2\pi)$ (déterministe), il existe une unique branche semi-infinie de $\mathcal{T}$ de direction asymptotique θ.*

Le nombre de fins topologiques du RST est p.s. égal à ∞.

Branches semi-infinies du RST

$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une direction asymptotique $\theta \in [0;2\pi)$ si $\lim_{n\to\infty} \frac{X_n}{|X_n|} = e^{\imath\theta}$.

Theorem (Baccelli & Bordenave '07)

L'Arbre Couvrant Radial $\mathcal{T}$ satisfait :

(1) *p.s. chaque branche semi-infinie de $\mathcal{T}$ admet une direction asymptotique.*

(2) *p.s. pour chaque $\theta \in [0;2\pi)$, il existe une branche semi-infinie de $\mathcal{T}$ de direction asymptotique θ.*

(3) *pour chaque $\theta \in [0;2\pi)$ (déterministe), il existe une unique branche semi-infinie de $\mathcal{T}$ de direction asymptotique θ.*

Le nombre de fins topologiques du RST est p.s. égal à ∞.

Branches semi-infinies du RST

$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une direction asymptotique $\theta \in [0; 2\pi)$ si $\lim_{n\to\infty} \frac{X_n}{|X_n|} = e^{\imath\theta}$.

Theorem (Baccelli & Bordenave '07)

L'Arbre Couvrant Radial $\mathcal{T}$ satisfait :

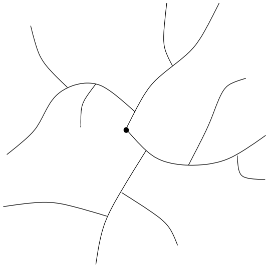
(1) *p.s. chaque branche semi-infinie de $\mathcal{T}$ admet une direction asymptotique.*

(2) *p.s. pour chaque $\theta \in [0; 2\pi)$, il existe une branche semi-infinie de $\mathcal{T}$ de direction asymptotique θ.*

(3) *pour chaque $\theta \in [0; 2\pi)$ (déterministe), il existe une unique branche semi-infinie de $\mathcal{T}$ de direction asymptotique θ.*

Le nombre de fins topologiques du RST est p.s. égal à ∞.

χ_r : nombre de branches semi-infinies de $\mathcal{T}$ coupant $C(O, r)$.



Rmq: • $\chi_r \xrightarrow{\text{p.s.}} \infty$ (et dans L^1).
• Le nombre moyen d'arêtes de $\mathcal{T}$ coupant $C(O, r)$ est de l'ordre de r.

Theorem (Baccelli, C. & Tran '14)

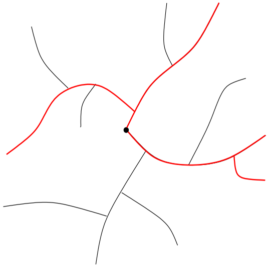
Sous-linéarité du nombre moyen de branches semi-infinies :

$$\mathbb{E}\chi_r = o(r) \ \ \textit{quand} \ \ r \to \infty.$$

Conjecture (C. '16) : $\forall \varepsilon > 0, \chi_r = o(r^{3/4+\varepsilon})$ p.s. et dans L^1.

Compléments et perspectives

χ_r : nombre de branches semi-infinies de $\mathcal{T}$
coupant $C(O, r)$.



Rmq: • $\chi_r \xrightarrow{\text{p.s.}} \infty$ (et dans L^1).
• Le nombre moyen d'arêtes de $\mathcal{T}$ coupant $C(O, r)$ est de l'ordre de r.

Theorem (Baccelli, C. & Tran '14)

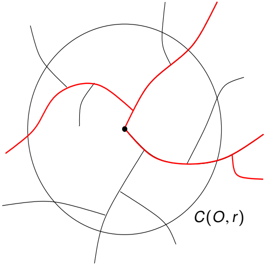
Sous-linéarité du nombre moyen de branches semi-infinies :

$$\mathbb{E}\chi_r = o(r) \quad \textit{quand} \quad r \to \infty.$$

Conjecture (C. '16) : $\forall \varepsilon > 0, \chi_r = o(r^{3/4+\varepsilon})$ p.s. et dans L^1.

Compléments et perspectives

χ_r : nombre de branches semi-infinies de $\mathcal{T}$ coupant $C(O,r)$.



Rmq: • $\chi_r \xrightarrow{\text{p.s.}} \infty$ (et dans L^1).

• Le nombre moyen d'arêtes de $\mathcal{T}$ coupant $C(O,r)$ est de l'ordre de r.

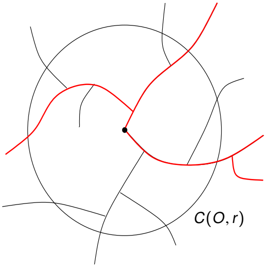
Theorem (Baccelli, C. & Tran '14)

Sous-linéarité du nombre moyen de branches semi-infinies :

$$\mathbb{E}\chi_r = o(r) \ \ quand \ \ r \to \infty.$$

Conjecture (C. '16) : $\forall \varepsilon > 0, \chi_r = o(r^{3/4+\varepsilon})$ p.s. et dans L^1.

χ_r : nombre de branches semi-infinies de $\mathcal{T}$ coupant $C(O,r)$.



Rmq: • $\chi_r \stackrel{\text{p.s.}}{\to} \infty$ (et dans L^1).

• Le nombre moyen d'arêtes de $\mathcal{T}$ coupant $C(O,r)$ est de l'ordre de r.

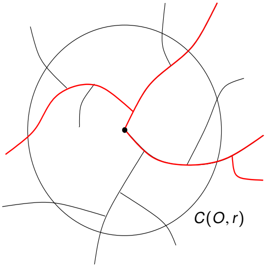
Theorem (Baccelli, C. & Tran '14)

Sous-linéarité du nombre moyen de branches semi-infinies :

$$\mathbb{E}\chi_r = o(r) \;\; \textit{quand} \;\; r \to \infty.$$

Conjecture (C. '16) : $\forall \varepsilon > 0, \chi_r = o(r^{3/4+\varepsilon})$ p.s. et dans L^1.

χ_r : nombre de branches semi-infinies de $\mathcal{T}$ coupant $C(O,r)$.



Rmq: • $\chi_r \stackrel{\text{p.s.}}{\to} \infty$ (et dans L^1).

• Le nombre moyen d'arêtes de $\mathcal{T}$ coupant $C(O,r)$ est de l'ordre de r.

Theorem (Baccelli, C. & Tran '14)

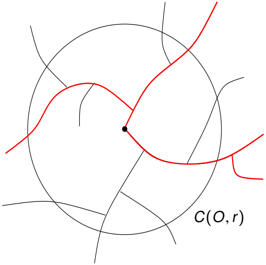
Sous-linéarité du nombre moyen de branches semi-infinies :

$$\mathbb{E}\chi_r = o(r) \;\; \textit{quand} \;\; r \to \infty.$$

Conjecture (C. '16) : $\forall \varepsilon > 0, \chi_r = o(r^{3/4+\varepsilon})$ p.s. et dans L^1.

Compléments et perspectives

χ_r : nombre de branches semi-infinies de $\mathcal{T}$ coupant $C(O,r)$.



Rmq: • $\chi_r \xrightarrow{\text{p.s.}} \infty$ (et dans L^1).
• Le nombre moyen d'arêtes de $\mathcal{T}$ coupant $C(O,r)$ est de l'ordre de r.

Theorem (Baccelli, C. & Tran '14)

Sous-linéarité du nombre moyen de branches semi-infinies :

$$\mathbb{E}\chi_r = o(r) \ \textit{quand} \ r \to \infty.$$

Conjecture (C. '16) : $\forall \varepsilon > 0, \chi_r = o(r^{3/4+\varepsilon})$ p.s. et dans L^1.

Plan

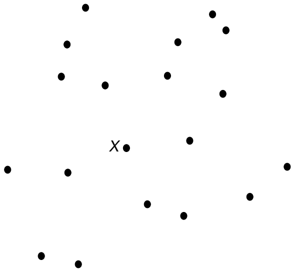
La Forêt Couvrante Dirigée $\mathcal{F}$ (DSF)

$\mathcal{N}$: ensemble de sommets.

$e_1 = (1, 0)$: une direction donnée.

Règle locale : chaque $X \in \mathcal{N}$ est relié au plus proche sommet dans $\{z \in \mathbb{R}^2 : \langle z, X + e_1 \rangle \geq 0\}$.

$\Rightarrow$ La Forêt Couvrante Dirigée $\mathcal{F}$.



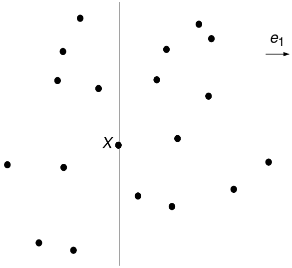
- Approximation locale et en loi du RST loin de O.
- Jolies conjectures : $\mathcal{F}$ est-elle un arbre ? Limite d'échelle ?
- Dépendance en le passé.

$\mathcal{N}$: ensemble de sommets.

$e_1 = (1,0)$: une direction donnée.

Règle locale : chaque $X \in \mathcal{N}$ est relié au plus proche sommet dans $\{z \in \mathbb{R}^2 : \langle z, X + e_1 \rangle \geq 0\}$.

$\Rightarrow$ La Forêt Couvrante Dirigée $\mathcal{F}$.



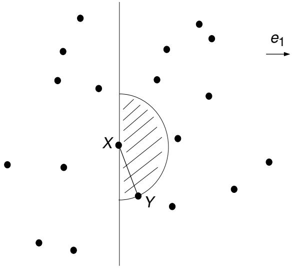
- Approximation locale et en loi du RST loin de O.
- Jolies conjectures : $\mathcal{F}$ est-elle un arbre ? Limite d'échelle ?
- Dépendance en le passé.

La Forêt Couvrante Dirigée $\mathcal{F}$ (DSF)

$\mathcal{N}$: ensemble de sommets.

$e_1 = (1, 0)$: une direction donnée.

Règle locale : chaque $X \in \mathcal{N}$ est relié au plus proche sommet dans $\{z \in \mathbb{R}^2 : \langle z, X + e_1 \rangle \geq 0\}$.



$\Rightarrow$ La Forêt Couvrante Dirigée $\mathcal{F}$.

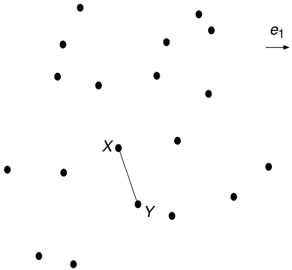
- Approximation locale et en loi du RST loin de O.
- Jolies conjectures : $\mathcal{F}$ est-elle un arbre ? Limite d'échelle ?
- Dépendance en le passé.

La Forêt Couvrante Dirigée $\mathcal{F}$ (DSF)

$\mathcal{N}$: ensemble de sommets.

$e_1 = (1, 0)$: une direction donnée.

Règle locale : chaque $X \in \mathcal{N}$ est relié au plus proche sommet dans $\{z \in \mathbb{R}^2 : \langle z, X + e_1 \rangle \geq 0\}$.



$\Rightarrow$ La Forêt Couvrante Dirigée $\mathcal{F}$.

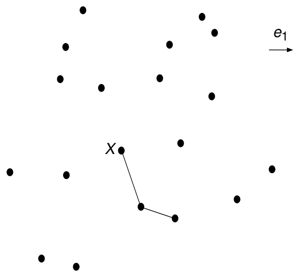
- Approximation locale et en loi du RST loin de O.
- Jolies conjectures : $\mathcal{F}$ est-elle un arbre ? Limite d'échelle ?
- Dépendance en le passé.

La Forêt Couvrante Dirigée $\mathcal{F}$ (DSF)

$\mathcal{N}$: ensemble de sommets.

$e_1 = (1, 0)$: une direction donnée.

Règle locale : chaque $X \in \mathcal{N}$ est relié au plus proche sommet dans $\{z \in \mathbb{R}^2 : \langle z, X + e_1 \rangle \geq 0\}$.



$\Rightarrow$ La Forêt Couvrante Dirigée $\mathcal{F}$.

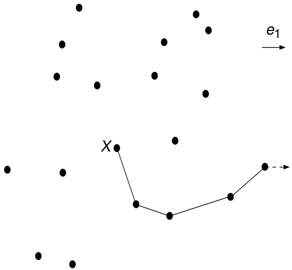
- Approximation locale et en loi du RST loin de O.
- Jolies conjectures : $\mathcal{F}$ est-elle un arbre ? Limite d'échelle ?
- Dépendance en le passé.

La Forêt Couvrante Dirigée $\mathcal{F}$ (DSF)

$\mathcal{N}$: ensemble de sommets.

$e_1 = (1, 0)$: une direction donnée.

Règle locale : chaque $X \in \mathcal{N}$ est relié au plus proche sommet dans $\{z \in \mathbb{R}^2 : \langle z, X + e_1 \rangle \geq 0\}$.



$\Rightarrow$ La Forêt Couvrante Dirigée $\mathcal{F}$.

- Approximation locale et en loi du RST loin de O.
- Jolies conjectures : $\mathcal{F}$ est-elle un arbre ? Limite d'échelle ?
- Dépendance en le passé.

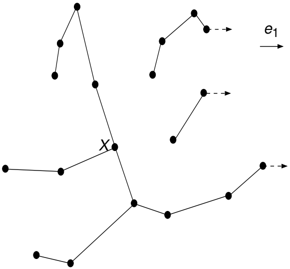
La Forêt Couvrante Dirigée $\mathcal{F}$ (DSF)

$\mathcal{N}$: ensemble de sommets.

$e_1 = (1, 0)$: une direction donnée.

Règle locale : chaque $X \in \mathcal{N}$ est relié au plus proche sommet dans $\{z \in \mathbb{R}^2 : \langle z, X + e_1 \rangle \geq 0\}$.

$\Rightarrow$ La Forêt Couvrante Dirigée $\mathcal{F}$.



- Approximation locale et en loi du RST loin de O.
- Jolies conjectures : $\mathcal{F}$ est-elle un arbre ? Limite d'échelle ?
- Dépendance en le passé.

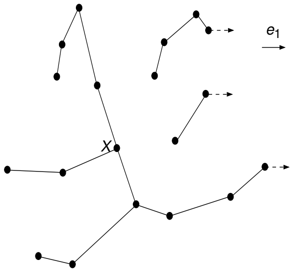
La Forêt Couvrante Dirigée $\mathcal{F}$ (DSF)

$\mathcal{N}$: ensemble de sommets.

$e_1 = (1, 0)$: une direction donnée.

Règle locale : chaque $X \in \mathcal{N}$ est relié au plus proche sommet dans $\{z \in \mathbb{R}^2 : \langle z, X + e_1 \rangle \geq 0\}$.

$\Rightarrow$ La Forêt Couvrante Dirigée $\mathcal{F}$.



- Approximation locale et en loi du RST loin de O.
- Jolies conjectures : $\mathcal{F}$ est-elle un arbre ? Limite d'échelle ?
- Dépendance en le passé.

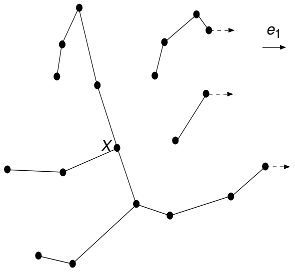
La Forêt Couvrante Dirigée $\mathcal{F}$ (DSF)

$\mathcal{N}$: ensemble de sommets.

$e_1 = (1, 0)$: une direction donnée.

Règle locale : chaque $X \in \mathcal{N}$ est relié au plus proche sommet dans $\{z \in \mathbb{R}^2 : \langle z, X + e_1 \rangle \geq 0\}$.

$\Rightarrow$ La Forêt Couvrante Dirigée $\mathcal{F}$.



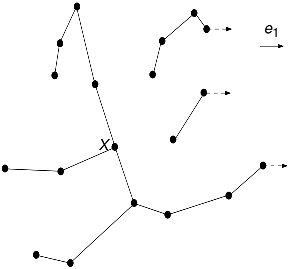
- Approximation locale et en loi du RST loin de O.
- Jolies conjectures : $\mathcal{F}$ est-elle un arbre ? Limite d'échelle ?
- Dépendance en le passé.

$\mathcal{N}$: ensemble de sommets.

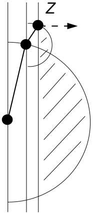
$e_1 = (1,0)$: une direction donnée.

Règle locale : chaque $X \in \mathcal{N}$ est relié au plus proche sommet dans $\{z \in \mathbb{R}^2 : \langle z, X + e_1 \rangle \geq 0\}$.

$\Rightarrow$ La Forêt Couvrante Dirigée $\mathcal{F}$.



- Approximation locale et en loi du RST loin de O.
- Jolies conjectures : $\mathcal{F}$ est-elle un arbre ? Limite d'échelle ?
- Dépendance en le passé.

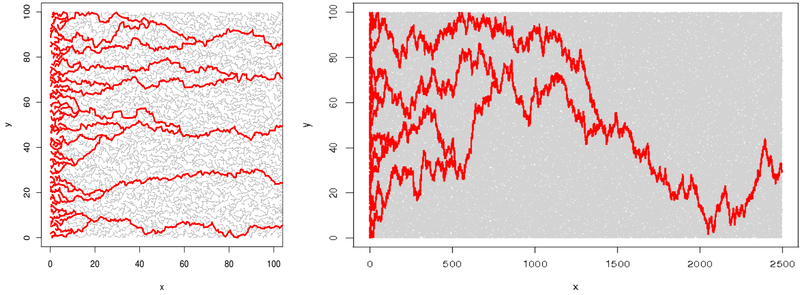


Coalescence dans la DSF

Theorem (C. & Tran ’13)

(1) *P.s. toutes les branches de $\mathcal{F}$ coalescent.*

(2) *P.s. il n’y a pas de branche bi-infinie dans $\mathcal{F}$.*



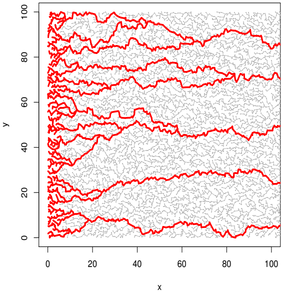
Le nombre de fins topologiques de la DSF est p.s. égal à 1.

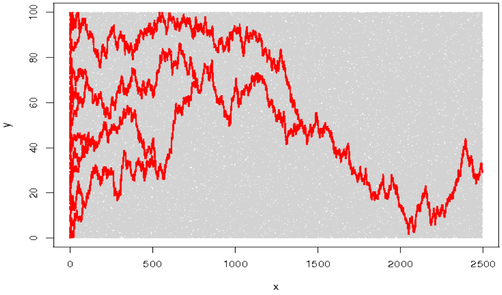
Coalescence dans la DSF

Theorem (C. & Tran '13)

(1) *P.s. toutes les branches de $\mathcal{F}$ coalescent.*

(2) *P.s. il n'y a pas de branche bi-infinie dans $\mathcal{F}$.*





Le nombre de fins topologiques de la DSF est p.s. égal à 1.

Travaux en cours

Renormalisation : pour $\sigma, \gamma > 0$ et tout entier $n > 0$,

$$S_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (t, y) & \longmapsto & \left(\frac{t}{\sigma n^2}, \frac{x}{\gamma n}\right) \end{array},$$

et $\mathcal{F}_n := \{S_n \pi ; \pi \in \mathcal{F}\}$.

Avec Saha, Sarkar & Tran, nous essayons de prouver :

Il existe $\sigma, \gamma > 0$ tels que, lorsque $n \to \infty$,

$\mathcal{F}_n$ converge en loi vers le (standard) Brownian Web.

Travaux en cours

Renormalisation : pour $\sigma, \gamma > 0$ et tout entier $n > 0$,

$$S_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (t, y) & \longmapsto & \left(\frac{t}{\sigma n^2}, \frac{x}{\gamma n}\right) \end{array} ,$$

et $\mathcal{F}_n := \{S_n \pi ; \pi \in \mathcal{F}\}$.

Avec Saha, Sarkar & Tran, nous essayons de prouver :

Il existe $\sigma, \gamma > 0$ tels que, lorsque $n \to \infty$,

$\mathcal{F}_n$ converge en loi vers le (standard) Brownian Web.

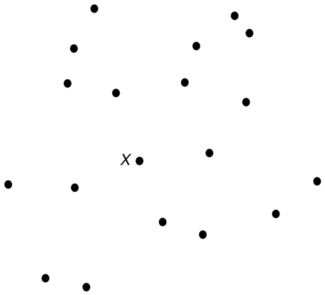
Plan

$\mathcal{N}$: ensemble de sommets.

$(u_X, X \in \mathcal{N})$: i.i.d. unif. distrib. sur $\mathcal{S}^1$.

Règle locale : chaque $X \in \mathcal{N}$ est relié au plus proche sommet dans $\{z \in \mathbb{R}^2 : \langle z, X + u_X \rangle \geq 0\}$.

$\Rightarrow$ Le Graphe Couvrant Omnidirectionnel $\mathcal{U}$.



- Un modèle germes-grains arrêtés (comme le Lilypond model).
- Modélisation de réseaux de fissures.

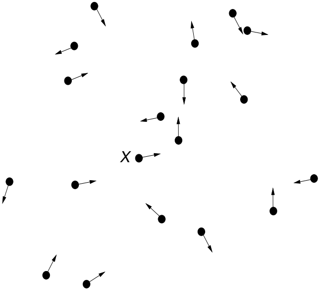
Le Graphe Couvrant Omnidirectionnel $\mathcal{U}$

$\mathcal{N}$: ensemble de sommets.

$(u_X, X \in \mathcal{N})$: i.i.d. unif. distrib. sur $\mathcal{S}^1$.

Règle locale : chaque $X \in \mathcal{N}$ est relié au plus proche sommet dans $\{z \in \mathbb{R}^2 : \langle z, X + u_X \rangle \geq 0\}$.

$\Rightarrow$ Le Graphe Couvrant Omnidirectionnel $\mathcal{U}$.



- Un modèle germes-grains arrêtés (comme le Lilypond model).
- Modélisation de réseaux de fissures.

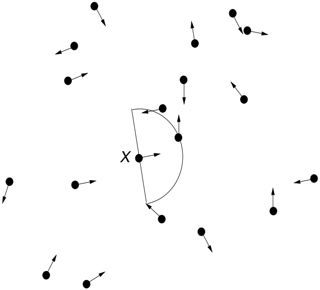
Le Graphe Couvrant Omnidirectionnel $\mathcal{U}$

$\mathcal{N}$: ensemble de sommets.

$(u_X, X \in \mathcal{N})$: i.i.d. unif. distrib. sur $\mathcal{S}^1$.

Règle locale : chaque $X \in \mathcal{N}$ est relié au plus proche sommet dans $\{z \in \mathbb{R}^2 : \langle z, X + u_X \rangle \geq 0\}$.

$\Rightarrow$ Le Graphe Couvrant Omnidirectionnel $\mathcal{U}$.



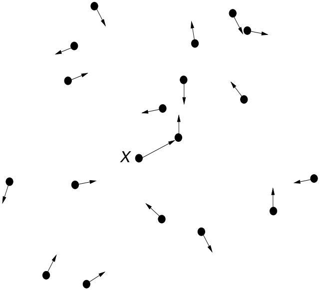
- Un modèle germes-grains arrêtés (comme le Lilypond model).
- Modélisation de réseaux de fissures.

$\mathcal{N}$: ensemble de sommets.

$(u_X, X \in \mathcal{N})$: i.i.d. unif. distrib. sur $\mathcal{S}^1$.

Règle locale : chaque $X \in \mathcal{N}$ est relié au plus proche sommet dans $\{z \in \mathbb{R}^2 : \langle z, X + u_X \rangle \geq 0\}$.

$\Rightarrow$ Le Graphe Couvrant Omnidirectionnel $\mathcal{U}$.



- Un modèle germes-grains arrêtés (comme le Lilypond model).
- Modélisation de réseaux de fissures.

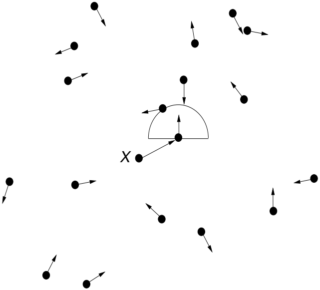
Le Graphe Couvrant Omnidirectionnel $\mathcal{U}$

$\mathcal{N}$: ensemble de sommets.

$(u_X, X \in \mathcal{N})$: i.i.d. unif. distrib. sur $\mathcal{S}^1$.

Règle locale : chaque $X \in \mathcal{N}$ est relié au plus proche sommet dans $\{z \in \mathbb{R}^2 : \langle z, X + u_X \rangle \geq 0\}$.

$\Rightarrow$ Le Graphe Couvrant Omnidirectionnel $\mathcal{U}$.

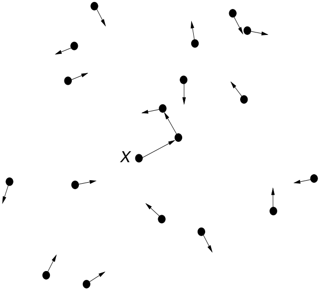


- Un modèle germes-grains arrêtés (comme le Lilypond model).
- Modélisation de réseaux de fissures.

$\mathcal{N}$: ensemble de sommets.

$(u_X, X \in \mathcal{N})$: i.i.d. unif. distrib. sur $\mathcal{S}^1$.

Règle locale : chaque $X \in \mathcal{N}$ est relié au plus proche sommet dans $\{z \in \mathbb{R}^2 : \langle z, X + u_X \rangle \geq 0\}$.



$\Rightarrow$ Le Graphe Couvrant Omnidirectionnel $\mathcal{U}$.

- Un modèle germes-grains arrêtés (comme le Lilypond model).
- Modélisation de réseaux de fissures.

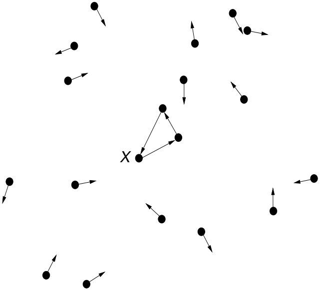
Le Graphe Couvrant Omnidirectionnel $\mathcal{U}$

$\mathcal{N}$: ensemble de sommets.

$(u_X, X \in \mathcal{N})$: i.i.d. unif. distrib. sur $\mathcal{S}^1$.

Règle locale : chaque $X \in \mathcal{N}$ est relié au plus proche sommet dans $\{z \in \mathbb{R}^2 : \langle z, X + u_X \rangle \geq 0\}$.

$\Rightarrow$ Le Graphe Couvrant Omnidirectionnel $\mathcal{U}$.

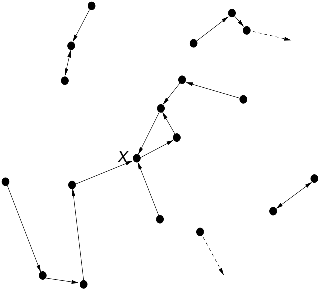


- Un modèle germes-grains arrêtés (comme le Lilypond model).
- Modélisation de réseaux de fissures.

$\mathcal{N}$: ensemble de sommets.

$(u_X, X \in \mathcal{N})$: i.i.d. unif. distrib. sur $\mathcal{S}^1$.

Règle locale : chaque $X \in \mathcal{N}$ est relié au plus proche sommet dans $\{z \in \mathbb{R}^2 : \langle z, X + u_X \rangle \geq 0\}$.



$\Rightarrow$ Le Graphe Couvrant Omnidirectionnel $\mathcal{U}$.

- Un modèle germes-grains arrêtés (comme le Lilypond model).
- Modélisation de réseaux de fissures.

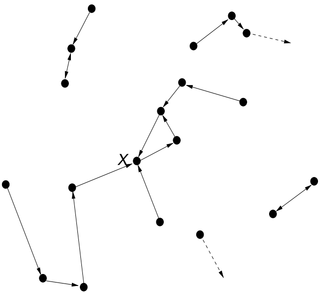
Le Graphe Couvrant Omnidirectionnel $\mathcal{U}$

$\mathcal{N}$: ensemble de sommets.

$(u_X, X \in \mathcal{N})$: i.i.d. unif. distrib. sur $\mathcal{S}^1$.

Règle locale : chaque $X \in \mathcal{N}$ est relié au plus proche sommet dans $\{z \in \mathbb{R}^2 : \langle z, X + u_X \rangle \geq 0\}$.

$\Rightarrow$ Le Graphe Couvrant Omnidirectionnel $\mathcal{U}$.



- Un modèle germes-grains arrêtés (comme le Lilypond model).
- Modélisation de réseaux de fissures.

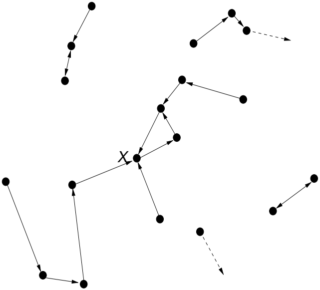
Le Graphe Couvrant Omnidirectionnel $\mathcal{U}$

$\mathcal{N}$: ensemble de sommets.

$(u_X, X \in \mathcal{N})$: i.i.d. unif. distrib. sur $\mathcal{S}^1$.

Règle locale : chaque $X \in \mathcal{N}$ est relié au plus proche sommet dans $\{z \in \mathbb{R}^2 : \langle z, X + u_X \rangle \geq 0\}$.

$\Rightarrow$ Le Graphe Couvrant Omnidirectionnel $\mathcal{U}$.



- Un modèle germes-grains arrêtés (comme le Lilypond model).
- Modélisation de réseaux de fissures.

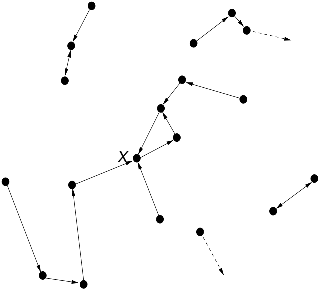
Le Graphe Couvrant Omnidirectionnel $\mathcal{U}$

$\mathcal{N}$: ensemble de sommets.

$(u_X, X \in \mathcal{N})$: i.i.d. unif. distrib. sur $\mathcal{S}^1$.

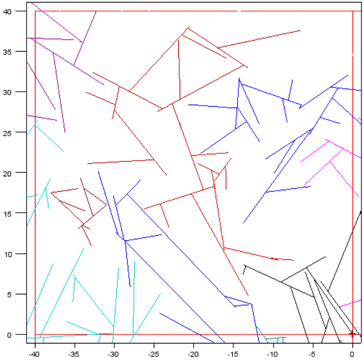
Règle locale : chaque $X \in \mathcal{N}$ est relié au plus proche sommet dans $\{z \in \mathbb{R}^2 : \langle z, X + u_X \rangle \geq 0\}$.

$\Rightarrow$ Le Graphe Couvrant Omnidirectionnel $\mathcal{U}$.



- Un modèle germes-grains arrêtés (comme le Lilypond model).
- Modélisation de réseaux de fissures.

Un autre modèle germes-grains arrêtés



De chaque $X \in \mathcal{N}$, un segment pousse dans la direction u_X (à vitesse 1) et s'arrête dès qu'il touche un autre segment.

Absence de percolation

Theorem (C., Dereudre & Le Stum '16)

Le Graphe Couvrant Omnidirectionnel $\mathcal{U}$ ne percole pas :

p.s. toutes les composantes connexes sont bornées.

Heuristique: les boucles agissent comme des “stops”. Bcp de boucles partout dans $\mathbb{R}^2$. Trop difficile pour une branche semi-infinie de toutes les éviter.

Le nombre de fins topologiques de $\mathcal{U}$ est p.s. égal à 0.

Absence de percolation

Theorem (C., Dereudre & Le Stum '16)

Le Graphe Couvrant Omnidirectionnel $\mathcal{U}$ ne percole pas :

p.s. toutes les composantes connexes sont bornées.

Heuristique: les boucles agissent comme des "stops". Bcp de boucles partout dans $\mathbb{R}^2$. Trop difficile pour une branche semi-infinie de toutes les éviter.

Le nombre de fins topologiques de $\mathcal{U}$ est p.s. égal à 0.

Absence de percolation

Theorem (C., Dereudre & Le Stum '16)

Le Graphe Couvrant Omnidirectionnel $\mathcal{U}$ ne percole pas :

p.s. toutes les composantes connexes sont bornées.

Heuristique: les boucles agissent comme des "stops". Bcp de boucles partout dans $\mathbb{R}^2$. Trop difficile pour une branche semi-infinie de toutes les éviter.

Le nombre de fins topologiques de $\mathcal{U}$ est p.s. égal à 0.

Travaux en cours & perspectives

- Que peut-on dire de la taille des composantes connexes ? Décroissance exponentielle ?

- Et si les segments poussaient à des vitesses $\neq$? À la place des segments, imaginons des trajectoires browniennes i.i.d. ?

- Que peut-on dire de la taille des composantes connexes ? Décroissance exponentielle ?
- Et si les segments poussaient à des vitesses $\neq$? À la place des segments, imaginons des trajectoires browniennes i.i.d. ?