Chapitre 1

Éléments aléatoires d'un Banach

Dans la théorie classique des probabilités, une variable aléatoire ou un vecteur aléatoire sont des applications mesurables d'un espace $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^d$ munis de leur tribu borélienne. Dans le cas où l'espace d'arrivée est un espace de Banach B, on parlera plutôt d'élément aléatoire, é.a., mais ceci suppose une clarification préalable sur les tribus concernées par la mesurabilité requise.

1.1 Éléments aléatoires de Radon à valeurs dans un Banach

Sur un espace de Banach, on considère naturellement les deux tribus suivantes :

- $\mathcal{B}$ est la tribu borélienne de B engendrée par les ouverts de la topologie forte. On dit qu'un é.a. X défini sur un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{F})$ et à valeurs dans B est borélien s'il est $\mathcal{F}$-$\mathcal{B}$ mesurable. On dit aussi que X est *fortement* mesurable.
- $\mathcal{C}$ est la tribu cylindrique[1] : c'est la plus petite tribu rendant mesurables toutes les $\varphi \in B'$, dual topologique de B. C'est aussi la tribu engendrée par les $\sigma(B, B')$ ouverts de B. Lorsque $B = C[0, 1]$, cette tribu correspond à celle construite à partir des observations des valeurs d'une trajectoire en un nombre fini de points et est bien connue en théorie des processus stochastiques. Si $X : \Omega \to B$ est mesurable $\mathcal{F}$-$\mathcal{C}$, on dit qu'il est *faiblement* mesurable.

Proposition 1.1. *Si B est séparable, les tribus borélienne et cylindrique sur B sont les mêmes.*

Preuve. On a toujours $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$ car tout ouvert faible $\sigma(B, B')$ est ouvert fort.

Pour établir l'inclusion dans l'autre sens, on prouve que tout ouvert fort est dans $\mathcal{C}$ en montrant que

a) Si B est séparable, tout ouvert de B est réunion *dénombrable* de boules ouvertes.

b) Si B est séparable, toute *boule* ouverte appartient à $\mathcal{C}$.

1. Abus de langage pour *tribu engendrée par* les ensembles cylindriques

Preuve de a). Soit W un ouvert fort de B. Comme il hérite de la séparabilité de B, il existe une suite $\{x_i,\ i \in \mathbb{N}\}$ dense dans W. On vérifie alors que W est égal à la réunion dénombrable

$$V := \bigcup_{\substack{i\in\mathbb{N},\ r\in\mathbb{Q} \\ \Delta(x_i,r)\subset W}} \Delta(x_i, r),$$

où $\Delta(x_i, r) := \{x \in B;\ \|x - x_i\| < r\}$. Par construction V est inclus dans W. Pour montrer l'inclusion inverse, considérons un élément x quelconque de W. Puisque W est ouvert, il existe un rationnel $r > 0$ suffisamment petit pour que $\Delta(x, 2r) \subset W$. Par densité de la suite $\{x_i,\ i \in \mathbb{N}\}$ dans W, on peut alors trouver un x_{i_k} tel que $\|x_{i_k} - x\| < r$. Alors tout $y \in \Delta(x_{i_k}, r)$ vérifie $\|y - x\| \leq \|y - x_{i_k}\| + \|x_{i_k} - x\| < 2r$, donc $y \in \Delta(x, 2r) \subset W$. On en déduit que $\Delta(x_{i_k}, r) \subset W$ et comme $x \in \Delta(x_{i_k}, r)$, ceci montre que x appartient à V. Ceci étant vrai pour tout x de W, on a bien $W \subset V$ et finalement $W = V$. □

Preuve de b). Il est clair qu'il suffit de montrer que la boule unité $\Delta := \Delta(0, 1)$ est dans $\mathcal{C}$. On sait, cf. cours d'Analyse Fonctionnelle Appliquée, que si B est de dimension infinie, Δ *n'est pas un ouvert* de la topologie $\sigma(B, B')$. Comme $\Delta = \varphi^{-1}(]-\infty, 1[)$ avec $\varphi : B \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x\|$, il nous suffit en fait de montrer que φ est mesurable $\mathcal{C}$-$\mathrm{Bor}(\mathbb{R})$, où $\mathrm{Bor}(\mathbb{R})$ désigne la tribu borélienne de $\mathbb{R}$. Par séparabilité de B, on dispose d'une suite $\{x_i,\ i \in \mathbb{N}\}$ dense dans B. On peut alors lui associer une suite $\{f_i,\ i \in \mathbb{N}\}$ dans B' telle que pour tout i, $\|f_i\|_{B'} = 1$ et $f_i(x_i) = \|x_i\|$, l'existence de cette suite résultant du théorème de Hahn-Banach. Nous allons vérifier que $\varphi = \sup_{i\in\mathbb{N}} |f_i|$, ce qui entraînera sa mesurabilité comme sup d'une famille *dénombrable* d'applications $\mathcal{C}$-$\mathrm{Bor}(\mathbb{R})$ mesurables.

D'une part puisque les f_i sont de norme 1 dans B', on a pour tout $x \in B$, et tout $i \in \mathbb{N}$, $\|x\| \geq |f_i(x)|$ d'où $\|x\| \geq \sup_{i\in\mathbb{N}} |f_i(x)|$, autrement dit, $\varphi \geq \sup_{i\in\mathbb{N}} |f_i|$. D'autre part, pour chaque x de B, il existe une sous-suite $(x_{i_k})_{k\geq 1}$ convergeant fortement vers x. Cette convergence entraîne celle des normes et on peut écrire :

$$\|x\|_B = \lim_{k\to+\infty} \|x_{i_k}\|_B = \lim_{k\to+\infty} f_{i_k}(x_{i_k}) = \lim_{k\to+\infty} f_{i_k}(x) \leq \sup_{i\in\mathbb{N}} |f_i(x)|,$$

en utilisant pour la dernière égalité le fait que

$$\|f_{i_k}(x_{i_k}) - f_{i_k}(x)\|_B \leq \|f_{i_k}\|_{B'} \|x_{i_k} - x\|_B = \|x_{i_k} - x\|_B \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0.$$

Comme x était quelconque, on en déduit que $\varphi \leq \sup_{i\in\mathbb{N}} |f_i|$ et finalement que $\varphi = \sup_{i\in\mathbb{N}} |f_i|$. □

La preuve de la proposition 1.1 est terminée. □

Si B n'est pas séparable, on n'a plus en général $\mathcal{B} = \mathcal{C}$, ce qui cause quelques ennuis. Voici un autre inconvénient de la non-séparabilité du point de vue de la mesurabilité : si les topologies $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ sur B_1 et B_2 ne sont pas à base dénombrable, en général $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2 \neq \sigma(\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2)$, autrement dit : $\sigma(\mathcal{T}_1) \otimes \sigma(\mathcal{T}_2) \neq \sigma(\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2)$. On se heurte donc à un problème pour montrer que la mesurabilité de X et Y implique celle de $X + Y$ par exemple.

Une façon de surmonter ce problème de non-séparabilité de l'espace est de supposer que l'image d'un é.a. X est séparable (à un ensemble de mesure nulle près). Ceci nous amène à définir les é.a. de Radon.

Définition 1.2. *Un é.a. borélien $X : \Omega \to B$ est dit régulier relativement aux compacts, ou de Radon ou tendu si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists K \text{ compact}, \quad P(X \in K) \geq 1 - \varepsilon.$$

Remarque 1.3. Si B est de dimension finie, tout é.a. borélien (par assimilation de B à $\mathbb{R}^d$, il s'agit donc d'un vecteur aléatoire au sens classique) est tendu. Exercice laissé au lecteur (démontrez le directement sans utiliser la proposition 1.4 ci-dessous).

Proposition 1.4. *X est tendu si et seulement s'il prend presque sûrement ses valeurs dans un s.e.v. fermé séparable E de B, i. e. $P(X \in E) = 1$.*

Dans la suite, on note P_X la loi de X qui est une probabilité sur la tribu borélienne de B : $P_X(A) = P(X \in A)$.

Preuve. Si X est tendu, il existe une suite *croissante* $(K_n)_{n\geq 1}$ de compacts de B ($K_n \subset K_{n+1}$) telle que :

$$\forall n \geq 1, \quad P(X \in K_n) \geq 1 - \frac{1}{n}.$$

Par continuité séquentielle croissante de la mesure P, on en déduit que

$$P(X \in \bigcup_{n\geq 1} K_n) = \lim_{n\to+\infty} P(X \in K_n) = 1.$$

L'union des K_n étant séparable (pourquoi ?), on prend pour E le s.e.v. *fermé*[2] de B engendré par cette réunion. En effet E est alors lui aussi séparable (justifiez) et $P(X \in E) = 1$.

Réciproquement, si E est un s.e.v. fermé séparable de B vérifiant $P(X \in E) = 1$ et si $\{x_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ est une suite dense dans E, on a :

$$\forall n \geq 1, \quad E \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \overline{\Delta}(x_k, \frac{1}{n}),$$

en notant $\overline{\Delta}(x, r)$ la boule fermée de centre x et de rayon r. On en déduit que pour tout $n \geq 1$, $P_X\big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \overline{\Delta}(x_k, 1/n)\big) = 1$ d'où en utilisant la continuité séquentielle croissante de P_X,

$$\forall n \geq 1,\ \exists N(n), \quad P_X\left(\bigcup_{k\leq N(n)} \overline{\Delta}(x_k, 1/n)\right) \geq 1 - \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

On prend alors :

$$K = K(\varepsilon) = \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{k\leq N(n)} \overline{\Delta}(x_k, 1/n).$$

2. En dimension infinie, un sous-espace vectoriel n'est pas toujours borélien. Le fait de prendre E fermé est donc une utile précaution.

On a bien :

$$P_X(K^c) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon,$$

d'où $P(X \in K) \geq 1-\varepsilon$. De plus K est compact car fermé dans B complet donc complet lui-même et pour tout $\delta > 0$, il est clair que l'on peut recouvrir K par un nombre fini de boules de rayon δ (précompacité[3]). □

Proposition 1.5. *Si X et Y sont des é.a. de Radon telles que $\forall f \in B'$, $f(X)$ et $f(Y)$ ont même loi, alors X et Y ont même loi.*

Preuve. Puisque X et Y sont de Radon, il existe un s.e.v. fermé séparable E de B tel que $P(X \in E \text{ et } Y \in E) = 1$. La tribu borélienne de E et sa tribu cylindrique (engendrée par E') coïncident. Toute $g \in E'$ admet par le théorème de Hahn-Banach un prolongement $\tilde{g}$ en une forme linéaire continue sur B. On a clairement $g(X) = \tilde{g}(X)$ p.s. et $g(Y) = \tilde{g}(Y)$ p.s., on en déduit en utilisant l'hypothèse, que pour tout $g \in E'$, $g(X)$ et $g(Y)$ ont même loi. Comme la tribu borélienne $\mathcal{B}_E$ de E coïncide avec sa tribu cylindrique $\mathcal{C}_E$, on peut montrer que P_X et P_Y sont égales sur la tribu borélienne de E puis en déduire que X et Y ont même loi. Voici comment faire.

La tribu $\mathcal{C}$ sur E est engendrée par les cylindres, *i. e.* les ensembles de la forme $C = \cap_{i=1}^n g_i^{-1}(D_i)$ où les D_i sont des boréliens de $\mathbb{R}$. En passant par la caractérisation des lois en dimension finie par leurs fonctions caractéristiques, on vérifie que les vecteurs aléatoires $U := (g_1(X), \dots, g_n(X))$ et $V := (g_1(Y), \dots, g_n(Y))$ ont même loi. En effet pour tout $t = (t_1, \dots, t_n)$ dans $\mathbb{R}^n$, on a

$$\varphi_U(t) = \mathbf{E} \exp(i\langle t, U\rangle) = \mathbf{E} \exp(ih(X))$$

où h est la forme linéaire continue $t_1 g_1 + \dots + t_n g_n$. Par hypothèse $h(X)$ et $h(Y)$ ont même loi, ce qui entraîne que les variables aléatoires complexes *bornées* $\exp(ih(X))$ et $\exp(ih(Y))$ ont même loi donc même espérance. Ceci peut se réécrire $\varphi_U(t) = \varphi_V(t)$ et comme t était quelconque, on en déduit $\varphi_U = \varphi_V$, ce qui montre que les vecteurs aléatoires U et V de $\mathbb{R}^n$ ont même loi. Ce raisonnement est valable pour tout $n \geq 1$ et tout choix de $g_1, \dots, g_n$ dans B'.

On en déduit que $P_X(C) = P_Y(C)$ pour tout cylindre C. Pour justifier cette affirmation, on écrit :

$$\begin{aligned}
P_X(C) &= P\Big(X \in \bigcap_{i=1}^n g_i^{-1}(D_i)\Big) \\
&= P\big(\forall i = 1, \dots, n,\ X \in g_i^{-1}(D_i)\big) \\
&= P\big(\forall i = 1, \dots, n,\ g_i(X) \in D_i\big) \\
&= P\Big(\big(g_1(X), \dots, g_n(X)\big) \in D_1 \times \dots \times D_n\Big) \\
&= P\big(U \in D_1 \times \dots \times D_n\big) = P_U(D_1 \times \dots \times D_n).
\end{aligned}$$

3. Rappel : un espace métrique est dit précompact si son complété est compact. Un espace métrique est précompact si et seulement si pour tout $\delta > 0$, on peut le recouvrir par un nombre fini de boules de rayon δ.

De même $P_Y(C) = P_V(D_1 \times \cdots \times D_n)$. Comme les vecteurs aléatoires U et V de $\mathbb{R}^n$ ont même loi, $P_U(D_1 \times \cdots \times D_n) = P_V(D_1 \times \cdots \times D_n)$, d'où $P_X(C) = P_Y(C)$.

La classe des cylindres est stable par intersection finie et engendre la tribu $\mathcal{C}$, donc P_X et P_Y coïncident sur $\mathcal{C}_E$, donc sur $\mathcal{B}_E$. Enfin pour tout borélien A de B,

$$P_X(A) = P_X(A \cap E) = P_Y(A \cap E) = P_Y(A).$$

□

Corollaire 1.6. *Si X est un é.a. de Radon à valeurs dans B, sa* fonctionnelle caractéristique *définie sur B' par*

$$\varphi_X(f) = \mathbf{E} \exp(if(X)), \quad f \in B',$$

détermine la loi de X.

Pour définir l'espérance d'un élément aléatoire, il y a deux approches concurrentes :

La première consiste à adapter la construction de l'intégrale de Lebesgue des fonctions $\Omega \to \mathbb{R}$ au cas des fonctions à valeurs dans B. Rassurez vous, cela ira beaucoup plus vite, justement parce que l'on dispose déjà de l'intégrale de Lebesgue des fonctions à valeurs réelles. Cette approche conduit à la notion d'intégrale « forte » ou « de Bochner ».

La deuxième approche consiste à utiliser les formes linéaires continues sur B pour se ramener en dimension 1 et à définir l'espérance de X implicitement par l'égalité $f(\mathbf{E}X) = \mathbf{E}f(X)$ pour toute $f \in B'$. On parle alors d'intégrale « faible » ou intégrale « de Pettis ». Nous allons examiner ces deux constructions et les comparer.

1.2 Intégrale de Bochner

Dans toute cette section, on travaille avec un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ fixé, $\mathcal{F}$ est une tribu sur Ω et μ une mesure positive sur $(\Omega, \mathcal{F})$, pas nécessairement une probabilité.

Définition 1.7 (fonction simple)**.** *Une fonction $X : \Omega \to B$ est dite* simple *si elle peut s'écrire*

$$X = \sum_{i=0}^{n} x_i \mathbf{1}_{A_i}, \tag{1.1}$$

où $A_0, A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$, $x_0, x_1, \dots, x_n \in B$, avec $\mu(A_i) < +\infty$ pour tout $i = 0, \dots, n$ et les A_i deux à deux disjoints.

Notons que X est constante sur chaque A_i ($\forall \omega \in A_i$, $X(\omega) = x_i$) et nulle en dehors de $\bigcup_{0 \le i \le n} A_i$. La décomposition ci-dessus n'est en général pas unique (on n'impose pas aux x_i d'être tous distincts).

Définition 1.8 (intégrale de Bochner d'une fonction simple)**.** *Si X est simple, on définit son intégrale de Bochner (sur Ω, relativement à μ) par*

$$\int_\Omega X \, \mathrm{d}\mu := \sum_{i=0}^{n} x_i \mu(A_i), \tag{1.2}$$

où les x_i et les A_i sont ceux fournis par (1.1).

Bien sûr on voit immédiatement que cette définition pose un problème de cohérence lié à la non unicité de la décomposition (1.1). Réglons ce problème en montrant que si $X = \sum_{i=0}^{n} x_i \mathbf{1}_{A_i} = \sum_{j=0}^{m} y_j \mathbf{1}_{B_j}$, les B_j étant eux aussi deux à deux disjoints et de mesure fine, alors $\sum_{i=0}^{n} x_i \mu(A_i) = \sum_{j=0}^{m} y_j \mu(B_j)$. Posons

$$A_{n+1} := \Omega \setminus \bigcup_{i=0}^{n} A_i, \quad B_{m+1} := \Omega \setminus \bigcup_{j=0}^{m} B_j.$$

Soit i un indice pour lequel $x_i \neq 0$. Alors on a

$$A_i = A_i \cap \left(\bigcup_{j=0}^{m+1} B_j \right) = \bigcup_{j=0}^{m+1} (A_i \cap B_j) = \bigcup_{j=0}^{m} (A_i \cap B_j),$$

en remarquant que $A_i \cap B_{m+1} = \emptyset$ puisque si $\omega \in A_i \cap B_{m+1}$, on doit avoir à la fois $X(\omega) = x_i \neq 0$ car $\omega \in A_i$ et $X(\omega) = 0$ car $\omega \in B_{m+1}$, ce qui est contradictoire. De même si $y_j \neq 0$, $B_j = \bigcup_{i=0}^{n} (A_i \cap B_j)$. Remarquons aussi que si $A_i \cap B_j \neq \emptyset$, nécessairement $x_i = y_j$ puisque X est constante valant x_i sur A_i et constante valant y_j sur B_j. Nous pouvons maintenant écrire

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n} x_i \mu(A_i) = \sum_{i=0, x_i \neq 0}^{n} x_i \mu(A_i) = \sum_{i=0, x_i \neq 0}^{n} x_i \sum_{j=0}^{m} \mu(A_i \cap B_j) &= \sum_{i=0}^{n} x_i \sum_{j=0}^{m} \mu(A_i \cap B_j) \\
&= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} x_i \mu(A_i \cap B_j) \\
&= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} y_j \mu(A_i \cap B_j) \\
&= \sum_{j=0}^{m} y_j \sum_{i=0}^{n} \mu(A_i \cap B_j) \\
&= \sum_{j=0, y_j \neq 0}^{m} y_j \sum_{i=0}^{n} \mu(A_i \cap B_j) \\
&= \sum_{j=0, y_j \neq 0}^{m} y_j \mu(B_j) \\
&= \sum_{j=0}^{m} y_j \mu(B_j).
\end{aligned}$$

Remarques 1.9. On voit immédiatement que l'intégrale de Bochner des fonctions simples est linéaire :

$$\int_\Omega (aX + bY) \, \mathrm{d}\mu = a \int_\Omega X \, \mathrm{d}\mu + b \int_\Omega Y \, \mathrm{d}\mu, \tag{1.3}$$

pour tous réels a et b et toutes fonctions simples X et Y. Notons au passage que même si B n'est pas séparable, il n'y a pas de problème pour la mesurabilité de la somme $X + Y$

de deux focntions simples car on peut l'écrire comme une somme finie d'indicatrices d'éléments de la tribu $\mathcal{F}$.

De plus pour toute fonction simple X, on a

$$\left\| \int_\Omega X \, \mathrm{d}\mu \right\| = \left\| \sum_{i=0}^n x_i \mu(A_i) \right\| \leq \sum_{i=0}^n \|x_i\| \mu(A_i) = \int_\Omega \|X\| \, \mathrm{d}\mu. \tag{1.4}$$

Cette dernière intégrale est une intégrale au sens classique de Lebesgue de la fonction mesurable positive $\|X\| : \Omega \to \mathbb{R}_+$.

Définition 1.10 (Intégrale de Bochner)**.** *Soit X fortement mesurable $\Omega :\to B$. On dit que X est μ-Bochner intégrable s'il existe une suite de fonctions simples X_n telle que*

$$X_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\mu-\text{p.p.}} X \tag{1.5}$$

et

$$\int_\Omega \|X_n - X\| \, \mathrm{d}\mu \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0. \tag{1.6}$$

On pose alors

$$\int_\Omega^{\text{Bochner}} X \, \mathrm{d}\mu = \int_\Omega X \, \mathrm{d}\mu := \lim_{n \to +\infty} \int_\Omega X_n \, \mathrm{d}\mu. \tag{1.7}$$

Dans cette définition, l'intégrale utilisée dans (1.6) est une intégrale au sens de Lebesgue. En particulier si μ est une probabilité, on peut aussi l'écrire $\mathbf{E}\|X_n - X\|$. L'intégrale $\int_\Omega X_n \, \mathrm{d}\mu$ utilisée dans (1.7) est l'intégrale de Bochner d'une fonction simple au sens de (1.2). Nous n'utiliserons la notation plus lourde $\int_\Omega^{\text{Bochner}}$ que lorsqu'il s'agira de comparer intégrale de Bochner et intégrale de Pettis. Dans toute la suite de cette section, nous emploierons la notation simplifiée $\int_\Omega X \, \mathrm{d}\mu$ pour l'intégrale de Bochner de X.

La définition 1.10 nécessite quelques justifications que nous détaillons maintenant. L'espace de Banach B étant complet, on établit l'existence de $\lim_{n \to +\infty} \int_\Omega X_n \, \mathrm{d}\mu$ en vérifiant que la suite $\left(\int_\Omega X_n \, \mathrm{d}\mu \right)_{n \geq 1}$ est de Cauchy comme suit :

$$\begin{aligned}
\left\| \int_\Omega X_n \, \mathrm{d}\mu - \int_\Omega X_m \, \mathrm{d}\mu \right\| &= \left\| \int_\Omega (X_n - X_m) \, \mathrm{d}\mu \right\| \quad \text{par (1.3)}, \\
&\leq \int_\Omega \|X_n - X_m\| \, \mathrm{d}\mu \quad \text{par (1.4)}, \\
&\leq \int_\Omega \|X_n - X\| \, \mathrm{d}\mu + \int_\Omega \|X - X_m\| \, \mathrm{d}\mu \\
&< 2\varepsilon, \quad \forall n, m \geq N(\varepsilon) \text{ par (1.6)}.
\end{aligned}$$

Montrons maintenant que la limite $\int_\Omega X \, \mathrm{d}\mu$ ne dépend pas du choix de la suite approximante x_n. Soit donc $(Y_n)_{n \geq 1}$ une autre suite de fonctions simples telles que $Y_n \xrightarrow{\mu-\text{p.p.}} X$ et $\|Y_n - X\| \to 0$. L'argument donné ci-desssus montre que $(\int_\Omega Y_n \, \mathrm{d}\mu)_{n \geq 1}$ est une suite de Cauchy dans B. Posons alors

$$x := \lim_{n \to +\infty} \int_\Omega X_n \, \mathrm{d}\mu, \quad y := \lim_{n \to +\infty} \int_\Omega Y_n \, \mathrm{d}\mu$$

et définissons la suite $(Z_n)_{n\geq 1}$ de fonctions simples par $Z_{2k} := X_k$, $Z_{2k+1} := X_{k+1}$. Comme la suite (Z_n) vérifie elle aussi la condition (1.6), la suite des intégrales $\big(\int_\Omega Z_n \, \mathrm{d}\mu\big)_{n\geq 1}$ est de Cauchy dans B donc a une limite z dans B. Cette suite d'intégrales a une sous-suite convergeant vers x et une autre convergeant vers y donc $z = x = y$.

Lemme 1.11. *Si B est séparable et μ finie, toute application fortement mesurable $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mu) \to (B, \mathcal{B})$ est limite μ-p.p. d'une suite (X_n) de fonctions simples.*

Preuve. Puisque B est séparable, nous disposons d'une suite $(x_i)_{i\geq 1}$ dense dans B. On a alors pour tout $\delta > 0$, un recouvrement dénombrable de B par des boules fermées de rayon δ :

$$B = \bigcup_{i\in\mathbb{N}^*} \overline{\Delta}(x_i, \delta).$$

On en déduit un recouvrement dénombrable de Ω par les ensembles $X^{-1}\big(\overline{\Delta}(x_i, \delta)\big) \in \mathcal{F}$. Par continuité séquentielle croissante de la mesure μ, on a

$$\bigcup_{i=1}^N X^{-1}\big(\overline{\Delta}(x_i, \delta)\big) \uparrow \Omega \implies \mu\Big(\bigcup_{i=1}^N X^{-1}\big(\overline{\Delta}(x_i, \delta)\big)\Big) \uparrow \mu(\Omega), \quad (N \uparrow +\infty).$$

Ceci étant vrai pour tout $\delta > 0$ et $\mu(\Omega)$ étant *fini*, on en déduit :

$$\forall \delta > 0,\ \forall \eta > 0,\ \exists N = N(\delta, \eta), \quad \mu\Big(\bigcup_{i=1}^N X^{-1}\big(\overline{\Delta}(x_i, \delta)\big)\Big) > \mu(\Omega) - \eta.$$

Prenant maintenant $\delta = 1/n$ et $\eta = 2^{-n}$, on obtient

$$\forall n \geq 1,\ \exists N_n, \quad \mu\Big(\bigcup_{i=1}^{N_n} X^{-1}\big(\overline{\Delta}(x_i, 1/n)\big)\Big) > \mu(\Omega) - 2^{-n}.$$

Posons

$$A_{1,n} := X^{-1}\big(\overline{\Delta}(x_1, 1/n)\big), \dots, A_{k,n} := \bigcap_{i=1}^{k-1} A_{i,n}^c \cap X^{-1}\big(\overline{\Delta}(x_k, 1/n)\big), \quad 2 \leq k \leq N_n.$$

Après effacement des $A_{k,n}$ vides, on construit ainsi une partition finie $\{A_{j,n};\ j \in J_n\}$ de $\bigcup_{i=1}^{N_n} X^{-1}\big(\overline{\Delta}(x_i, 1/n)\big)$. On choisit un ω_j dans chacun des $A_{j,n}$ non vides et on pose $y_j := X(\omega_j)$. Notons que par construction, $y_j \in \overline{\Delta}(x_j, 1/n)$. On définit alors la fonction simple X_n en posant :

$$X_n := \sum_{j\in J_n} y_j \mathbf{1}_{A_{j,n}}.$$

Par construction $\mu\big(\{\omega \in \Omega;\ \|X(\omega) - X_n(\omega)\| > 1/n\}\big) < 2^{-n}$, d'où

$$\mu\Big(\bigcup_{n\geq m} \{\omega \in \Omega;\ \|X(\omega) - X_n(\omega)\| > 1/n\}\Big) \leq \sum_{n\geq m} 2^{-n} = 2^{-m+1}. \tag{1.8}$$

Posons

$$D := \bigcap_{m\geq 1} \bigcup_{n\geq m} \{\omega \in \Omega;\ \|X(\omega) - X_n(\omega)\| > 1/n\}.$$

En utilisant la continuité séquentielle décroissante de la mesure *finie* μ, on en déduit de (1.8) que

$$\mu(D) = \lim_{m\to+\infty} \mu\Big(\bigcup_{n\geq m} \{\omega \in \Omega;\ \|X(\omega) - X_n(\omega)\| > 1/n\}\Big) = 0.$$

Remarquons maintenant que $\omega \in D^c = \bigcup_{m\geq 1} \bigcap_{n\geq m} \{\omega \in \Omega;\ \|X(\omega) - X_n(\omega)\| \leq 1/n\}$ si et seulement si :

$$\exists m \geq 1;\ \forall n \geq m, \quad \|X(\omega) - X_n(\omega)\| \leq \frac{1}{n}.$$

Ainsi l'appartenance de ω à D^c implique la convergence de $X_n(\omega)$ vers $X(\omega)$. On en déduit que

$$E := \{\omega \in \Omega;\ X_n(\omega) \text{ ne converge pas vers } X(\omega)\} \subset D,$$

d'où $\mu(E) = 0$, ce qui traduit exactement la convergence μ presque partout de X_n vers X. □

Théorème 1.12 (c.n.s. de Bochner intégrabilité)**.** *Soit $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mu) \to (B, \mathcal{B})$ une application fortement mesurable. Si X est μ-Bochner intégrable, alors $\int_\Omega \|X\| \,\mathrm{d}\mu < +\infty$. Lorsque B est séparable, cette condition équivaut à la μ-Bochner intégrabilité de X.*

Preuve de : (X μ-Bochner intégrable) $\Rightarrow \int_\Omega \|X\| \,\mathrm{d}\mu < +\infty$. La μ-Bochner intégrabilité de X nous fournit par la définition 1.10 une suite (X_n) de fonctions simples telle que $X_n \xrightarrow{\mu-\text{p.p.}} X$ et $\int_\Omega \|X_n - X\| \,\mathrm{d}\mu \to 0$. Ceci implique en particulier que pour n_0 assez grand [4] $\int_\Omega \|X_{n_0} - X\| \,\mathrm{d}\mu < +\infty$. Par inégalité triangulaire pour la norme de B, croissance et additivité de l'intégrale de Lebesgue des fonctions mesurables positives, on en déduit

$$\int_\Omega \|X\| \,\mathrm{d}\mu \leq \int_\Omega \|X_{n_0} - X\| \,\mathrm{d}\mu + \int_\Omega \|X_{n_0}\| \,\mathrm{d}\mu.$$

Or X_{n_0} étant simple, on a $\int_\Omega \|X_{n_0}\| \,\mathrm{d}\mu = \sum_{i\in I_0} \|x_{n_0,i}\| \mu(A_{n_0,i})$, pour un certain ensemble fini I_0 avec des $A_{n_0,i} \in \mathcal{F}$ de μ-mesure finie. Donc $\int_\Omega \|X_{n_0}\| \,\mathrm{d}\mu < +\infty$ et finalement $\int_\Omega \|X\| \,\mathrm{d}\mu < +\infty$. □

Notons que nous n'avons pas supposé B séparable dans cette première partie de la preuve. Pour la réciproque lorsque B est séparable, nous distinguerons 2 cas selon que μ est finie (le seul cas dont nous ayons besoin dans ce cours) ou non.

Preuve de : ($\int_\Omega \|X\| \,\mathrm{d}\mu < +\infty$) $\Rightarrow$ μ-Bochner intégrable, cas $\mu(\Omega) < +\infty$. Par séparabilité de B, le lemme 1.11 nous fournit une suite (X_n) de fonctions simples convergeant μ presque partout sur Ω vers X. Définissons alors

$$Y_n(\omega) := \begin{cases} X_n(\omega) & \text{si } \|X_n(\omega)\| < 2\|X(\omega)\|, \\ 0 & \text{si } \|X_n(\omega)\| \geq 2\|X(\omega)\|. \end{cases} \tag{1.9}$$

4. On ne peut pas exclure *a priori* que $\int_\Omega \|X_n - X\| \,\mathrm{d}\mu$ vaille $+\infty$ pour les premières valeurs de n, mais comme cette intégrale tend vers 0 quand n tend vers l'infini, elle est forcément finie pour n assez grand !

Soit $\Omega' := \{\omega \in \Omega;\ X_n(\omega) \to X(\omega)\}$ et notons que $\mu(\Omega'^c) = 0$.

Alors Y_n converge vers X au moins sur Ω', donc Y_n converge vers X μ-p.p. sur Ω. En effet si $\omega \in \Omega' \cap \{\|X\| > 0\}$, on a $2\|X(\omega)\| > \|X(\omega)\|$ et comme $X_n(\omega)$ converge vers $X(\omega)$, $\|X_n(\omega)\| < 2\|X(\omega)\|$ pour tout n supérieur à un certain $N(\omega)$. Donc pour $n > N(\omega)$, $Y_n(\omega) = X_n(\omega)$ et $Y_n(\omega)$ converge vers $X(\omega)$ comme $X_n(\omega)$. Si $\omega \in \Omega' \cap \{X = 0\}$, on a pour tout entier n $\|X_n(\omega)\| \geq 2\|X(\omega)\| = 0$, donc $Y_n(\omega) = 0 = X(\omega)$ pour tout n et la convergence de $Y_n(\omega)$ vers $X(\omega)$ est triviale.

D'autre part, l'inégalité $\|Y_n - X\| \leq 3\|X\|$ est vraie sur tout Ω car si $\|X_n(\omega)\| < 2\|X(\omega)\|$, $\|Y_n(\omega)\| = \|X_n(\omega)\| < 2\|X(\omega)\|$ et si $\|X_n(\omega)\| \geq 2\|X(\omega)\|$, $\|Y_n(\omega)\| = 0$.

On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue à la suite de fonctions mesurables positives $\|Y_n - X\|$ avec fonction dominante $3\|X\|$ qui est μ-intégrable sur Ω par hypothèse. On en déduit que $\int_\Omega \|Y_n - X\| \,\mathrm{d}\mu$ tend vers 0 et comme Y_n tend aussi μ-p.p. vers X, on conclut à la Bochner intégrabilité de X. □

Preuve de : ($\int_\Omega \|X\| \,\mathrm{d}\mu < +\infty$) $\Rightarrow$ μ-Bochner intégrable, cas $\mu(\Omega) = +\infty$. On se ramène au cas précédent en découpant Ω en une famille dénombrable de traches de mesures finie et la tranche $\{X = 0\}$ qui peut être de mesure infinie. Plus précisément, définissons

$$D_0 := \{\|X\| > 1\}, \quad D_k := \{2^{-k} < \|X\| \leq 2^{-k+1}\}, \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

On a alors une partition dénombrable de Ω constituée par $\{X = 0\}$ et les D_k. Chaque D_k est de μ-mesure finie en raison de la μ-intégrabilité de $\|X\|$ et grâce à l'inégalité de Markov :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mu(D_k) \leq \mu(\{\|X\| > 2^{-k}\}) \leq 2^k \int_\Omega \|X\| \,\mathrm{d}\mu < +\infty.$$

Notons μ_k la mesure de densité $\mathbf{1}_{D_k}$ par rapport à μ et $\mathcal{F}_k$ la tribu trace de $\mathcal{F}$ sur D_k. En appliquant le cas $\mu(\Omega)$ fini avec l'espace mesuré $(D_k, \mathcal{F}_k, \mu_k)$, on peut construire une suite $(Y_{k,n})_{n\geq 1}$ de fonctions simples $D_k \to B$ telles que $Y_{k,n}$ converge μ_k-p.p. sur D_k vers la restriction de X à D_k et $\|Y_{k,n}(\omega) - X(\omega)\| \leq 3\|X(\omega)\|$ pour tout $\omega \in D_k$. On prolonge $Y_{k,n}$ à tout Ω en posant $Y_{k,n}(\omega) := 0$ pour $\omega \notin D_k$ et ce prolongement vérifie $Y_{k,n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} X\mathbf{1}_{D_k}$ μ-p.p. et $\|Y_{k,n} - X\| \leq 3\|X\|\mathbf{1}_{D_k}$. Finalement, on définit une nouvelle suite de fonctions simples Y_n en posant :

$$Y_n := \sum_{k=1}^{n} Y_{k,n}$$

et on voit que Y_n tend vers X μ-p.p. (justifiez soigneusement ce point). De plus

$$\|Y_n - X\| = \sum_{k=1}^{n} \|Y_{k,n} - X\|\mathbf{1}_{D_k} \leq \sum_{k=1}^{n} 3\|X\|\mathbf{1}_{D_k} \leq 3\|X\|.$$

On peut finalement appliquer le théorème de convergence dominée pour obtenir la convergence vers 0 de $\int_\Omega \|Y_n - X\| \,\mathrm{d}\mu$ et conclure à la Bochner intégrabilité de X. □

Corollaire 1.13.

1. *Si $X : \Omega \to B$ est μ-Bochner intégrable, on a*

$$\left\| \int_\Omega X \,\mathrm{d}\mu \right\| \leq \int_\Omega \|X\| \,\mathrm{d}\mu < +\infty. \tag{1.10}$$

2. *Si B est séparable et $\int_\Omega \|X\| \,\mathrm{d}\mu < +\infty$, alors X est μ-Bochner intégrable et vérifie (1.10).*

Preuve. Le deuxième point est évident à partir du premier et n'est listé ici que par commodité de référence. Démontrons le premier point. Puisque X est μ-Bochner intégrable, $\int_\Omega \|X\| \,\mathrm{d}\mu < +\infty$ et nous avons au moins une suite (X_n) de fonctions simples convergent μ-p.p. vers X. À partir de cette suite, nous pouvons définir par (1.9) une suite (Y_n) de fonctions simples vérifiant

a) $\displaystyle\int_\Omega X \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega Y_n \,\mathrm{d}\mu$,

b) $Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mu-\text{p.p.}} X$,

c) $\|Y_n\| \leq 2\|X\|$.

Comme Y_n est simple, on a par (1.4),

$$\left\| \int_\Omega Y_n \,\mathrm{d}\mu \right\| \leq \int_\Omega \|Y_n\| \,\mathrm{d}\mu. \tag{1.11}$$

Par a) on a

$$\left\| \int_\Omega X \,\mathrm{d}\mu \right\| = \lim_{n\to+\infty} \left\| \int_\Omega Y_n \,\mathrm{d}\mu \right\|. \tag{1.12}$$

Par b) et c), on a *via* le théorème de convergence dominée

$$\int_\Omega \|Y_n\| \,\mathrm{d}\mu \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_\Omega \|X\| \,\mathrm{d}\mu. \tag{1.13}$$

En utilisant (1.12) et (1.13) pour passer à la limite dans (1.11), on obtient la première inégalité de (1.10). □

Corollaire 1.14. *Soient B_1 et B_2 deux espaces de Banach, B_2 étant séparable. Soit T un opérateur linéaire* continu *$B_1 \to B_2$ et $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mu) \to (B_1, \mathcal{B}_1)$ μ-Bochner intégrable. Alors $T(X) = T \circ X : (\Omega, \mathcal{F}, \mu) \to (B_2, \mathcal{B}_2)$ est μ-Bochner intégrable et*

$$\int_\Omega T(X) \,\mathrm{d}\mu = T\left(\int_\Omega X \,\mathrm{d}\mu \right). \tag{1.14}$$

Notons que dans cet énoncé, B_1 n'est pas supposé séparable.

Preuve. X étant Bochner intégrable est mesurable $\mathcal{F}$-$\mathcal{B}_1$ et T est borélienne parce que continue, donc mesurable $\mathcal{B}_1$-$\mathcal{B}_2$. Ainsi $T \circ X$ est mesurable $\mathcal{F}$-$\mathcal{B}_2$.

La μ-Bochner intégrabilité de $T(X)$ découle facilement de celle de X, de la continuité de T et du théorème 1.12 en écrivant :

$$\int_\Omega \|T(X)\|_{B_2} \,\mathrm{d}\mu \leq \int_\Omega \|T\|_{\mathcal{L}(B_1,B_2)} \|X\|_{B_1} \,\mathrm{d}\mu = \|T\|_{\mathcal{L}(B_1,B_2)} \int_\Omega \|X\|_{B_1} \,\mathrm{d}\mu < +\infty.$$

La finitude de cette dernière intégrale provient de la première partie du théorème 1.12 appliquée avec X et l'espace B_1. L'espace B_2 étant séparable, la finitude de $\int_\Omega \|T(X)\|_{B_2} \,\mathrm{d}\mu$ implique la μ-Bochner intégrabilité de $T(X)$, par la deuxième partie du théorème 1.12 appliquée avec $T(X)$ et l'espace B_2.

Voyons maintenant la vérification de (1.14). Par μ-Bochner intégrabilité de X, nous disposons d'une suite de fonctions simples $X_n : \Omega \to B_1$ telle que

$$\int_\Omega \|X_n - X\|_{B_1} \,\mathrm{d}\mu \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \tag{1.15}$$

et

$$\int_\Omega X_n \,\mathrm{d}\mu \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_\Omega X \,\mathrm{d}\mu \quad \text{(convergence forte dans } B_1\text{)}. \tag{1.16}$$

Par continuité de T, on en déduit

$$T\left(\int_\Omega X_n \,\mathrm{d}\mu\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} T\left(\int_\Omega X \,\mathrm{d}\mu\right) \quad \text{(convergence forte dans } B_2\text{)}. \tag{1.17}$$

La fonction simple X_n peut s'écrire

$$X_n = \sum_{i\in I_n} x_{n,i} \mathbf{1}_{A_{n,i}},$$

avec I_n fini, les $A_{n,i}$ deux à deux disjoints pour n fixé et $\mu(A_{n,i}) < +\infty$. Pour tout $\omega \in \Omega$,

$$(T \circ X_n)(\omega) = T(X_n(\omega)) = T\left(\sum_{i\in I_n} x_{n,i} \mathbf{1}_{A_{n,i}}(\omega)\right) = \sum_{i\in I_n} \mathbf{1}_{A_{n,i}}(\omega) T(x_{n,i}),$$

par linéarité de T (les $x_{n,i}$ sont des vecteurs de B_1 et pour ω *fixé* les $\mathbf{1}_{A_{n,i}}(\omega)$ sont des scalaires). Cette égalité vraie pour tout $\omega \in \Omega$ peut se réécrire sous la forme de l'égalité fonctionnelle

$$T(X_n) = \sum_{i\in I_n} T(x_{n,i}) \mathbf{1}_{A_{n,i}},$$

qui montre que $T(X_n)$ est une fonction simple $\Omega \to B_2$. En particulier l'intégrale de Bochner $\int_\Omega T(X_n) \,\mathrm{d}\mu$ a bien un sens. Elle peut se calculer comme suit.

$$\int_\Omega T(X_n) \,\mathrm{d}\mu = \sum_{i\in I_n} T(x_{n,i}) \mu(A_{n,i}) = T\left(\sum_{i\in I_n} x_{n,i} \mu(A_{n,i})\right) = T\left(\int_\Omega X_n \,\mathrm{d}\mu\right). \tag{1.18}$$

La première et la troisième égalité ci-dessus expriment la définition de l'intégrale de Bochner d'une fonction simple, la deuxième égalité vient de la linéarité de T.

Pour établir (1.14), nous allons passer à la limite dans l'égalité $\int_\Omega T(X_n)\,\mathrm{d}\mu = T\big(\int_\Omega X_n\,\mathrm{d}\mu\big)$. Par (1.17), le second membre converge vers $T\left(\int_\Omega X\,\mathrm{d}\mu\right)$. Pour justifier la convergence du premier membre vers $\int_\Omega T(X)\,\mathrm{d}\mu$, on écrit les majorations suivantes :

$$\begin{aligned}
\left\| \int_\Omega T(X_n)\,\mathrm{d}\mu - \int_\Omega T(X)\,\mathrm{d}\mu \right\|_{B_2} &= \left\| \int_\Omega T(X_n - X)\,\mathrm{d}\mu \right\|_{B_2} \quad \text{(linéarité de } T\text{)} \\
&\leq \int_\Omega \|T(X_n - X)\|_{B_2}\,\mathrm{d}\mu \quad \text{(corollaire 1.13.1)} \\
&\leq \int_\Omega \|T\|_{\mathcal{L}(B_1,B_2)} \|X_n - X\|_{B_1}\,\mathrm{d}\mu \quad \text{(continuité de } T\text{)} \\
&= \|T\|_{\mathcal{L}(B_1,B_2)} \int_\Omega \|X_n - X\|_{B_1}\,\mathrm{d}\mu \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,
\end{aligned}$$

par (1.15). Ceci achève la preuve. □

Remarque 1.15. L'examen de la preuve ci-dessus montre que la séparabilité de B_2 n'a été utilisée que pour vérifier la μ-Bochner intégrabilité de $T(X)$. Par conséquent si B_2 n'est pas séparable, (1.14) reste valide à condition de rajouter l'hypothèse de μ-Bochner intégrabilité de $T(X)$.

Théorème 1.16 (convergence dominée)**.** *Soit B un espace de Banach séparable et (X_n) une suite de fonctions fortement mesurables $(\Omega, \mathcal{F}, \mu) \to (B, \mathcal{B})$ vérifiant :*

a) $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mu-\text{p.p.}} X$*,*

b) il existe une fonction $g : \Omega \to \mathbb{R}$, μ-intégrable telle que $\|X_n\| \leq g$ μ-p.p.

Alors les X_n et X sont μ-Bochner intégrables et

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega X_n\,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega X\,\mathrm{d}\mu. \tag{1.19}$$

Noter que dans cet énoncé, on ne suppose pas que les X_n sont des fonctions simples.

Preuve. Comme $\|X_n\| \leq g$ et $\|X\| \leq g$ μ-p.p., X_n et X sont μ-Bochner intégrable par μ-intégrabilité de g et le théorème 1.12. Par le corollaire 1.13.1, on a

$$\left\| \int_\Omega X_n\,\mathrm{d}\mu - \int_\Omega X\,\mathrm{d}\mu \right\| = \left\| \int_\Omega (X_n - X)\,\mathrm{d}\mu \right\| \leq \int_\Omega \|X_n - X\|\,\mathrm{d}\mu. \tag{1.20}$$

Comme $\|X_n - X\| \leq 2g$ μ-p.p. par b) et a) et $\|X_n - X\|$ tend vers 0 μ-p.p. par a), on peut appliquer le théorème de convergence dominée classique pour obtenir la convergence vers 0 de $\int_\Omega \|X_n - X\|\,\mathrm{d}\mu$. En reportant cette convergence dans (1.20) on en déduit la convergence forte dans B de $\int_\Omega X_n\,\mathrm{d}\mu$ vers $\int_\Omega X\,\mathrm{d}\mu$. □

Remarque 1.17. La séparabilité de B n'a été utilisée dans ce théorème que pour établir la μ-Bochner intégrabilité de X_n et X. Donc si B n'est pas séparable, on a aussi un théorème de convergence dominée en rajoutant dans l'énoncé ci-dessus l'hypothèse de μ-Bochner intégrabilité des X_n et de X.

1.3 Intégrale de Pettis

Rappelons que la tribu cylindrique $\mathcal{C}$ sur l'espace de Banach B est la tribu engendrée par la topologie faible $\sigma(B, B')$ et que c'est aussi la plus petite tribu rendant mesurables toutes les formes linéaires continues sur B. Une application $X : \Omega \to B$ mesurable $\mathcal{F}$-$\mathcal{C}$ est dite faiblement mesurable. Dans ce qui suit, on note $\langle f, x\rangle := f(x)$, $f \in B'$, $x \in B$ la forme de dualité entre B et B'.

Définition 1.18. *Soit $X : \Omega \to B$ faiblement mesurable. On dit que X est* scalairement *μ-intégrable si*

$$\forall f \in B', \quad \int_\Omega |\langle f, X\rangle| \,\mathrm{d}\mu < +\infty. \tag{1.21}$$

Pour construire l'intégrale de Pettis de X, on commence par montrer que si X est scalairement intégrable, l'application $f \to \int_\Omega \langle f, X\rangle \,\mathrm{d}\mu$ est un élément ξ du bidual topologique B'' de B. Si on peut identifier ξ avec un élément x de B, alors on dit que X est Pettis intégrable et son intégrale de Pettis est précisément cet élément x de B.

Proposition 1.19. *Si X est scalairement μ-intégrable, l'application*

$$\xi : B' \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f \longmapsto \int_\Omega \langle f, X\rangle \,\mathrm{d}\mu$$

est une forme linéaire continue sur B', donc un élément du bidual topologique B''.

Remarque 1.20. La linéarité de ξ découle immédiatement de la linéarité de la forme de dualité (par rapport à la première variable) et de celle de l'intégrale au sens de Lebesgue des fonctions $\Omega \to \mathbb{R}$. Si X est Bochner intégrable, l'appartenance de ξ à B'' est immédiate en écrivant pour toute $f \in B'$,

$$\left|\int_\Omega \langle f, X\rangle \,\mathrm{d}\mu\right| \leq \int_\Omega |\langle f, X\rangle| \,\mathrm{d}\mu \leq \int_\Omega \|f\|_{B'} \|X\|_B \,\mathrm{d}\mu = \|f\|_{B'} \int_\Omega \|X\|_B \,\mathrm{d}\mu \tag{1.22}$$

et en notant que par μ-Bochner intégrabilité de X, $\int_\Omega \|X\|_B \,\mathrm{d}\mu$ est finie (et constante relativement à f). Comme sous-produit de (1.22), notons au passage que la μ-Bochner intégrabilité de X implique son intégrabilité scalaire.

Preuve de la proposition 1.19. L'application ξ étant clairement une forme linéaire sur B', il s'agit de prouver sa continuité. Pour cela introduisons l'application linéaire

$$\psi : B' \longrightarrow \mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{F}, \mu), \quad f \longmapsto \langle f, X\rangle.$$

Nous allons vérifier que Ψ est continue grâce au théorème du *graphe fermé*. Cela revient à montrer si $(f_n)_{n\geq 1}$ est une suite dans B' vérifiant

$$f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{B'} f \quad \text{et} \quad \psi(f_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}(\Omega,\mathcal{F},\mu)} Z,$$

où $f \in B'$ et $Z \in \mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, alors $\psi(f) = Z$.

La convergence de f_n vers f dans B' implique en particulier

$$\forall \omega \in \Omega, \quad f_n(X(\omega)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(X(\omega)),$$

autrement dit

$$\forall \omega \in \Omega, \quad \big(\psi(f_n)\big)(\omega) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \big(\psi(f)\big)(\omega). \tag{1.23}$$

D'autre part comme $\psi(f_n)$ converge vers Z au sens $\mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, on peut en extraire une sous-suite $\big(\psi(f_{n_k})\big)$ qui converge vers Z μ-p.p. sur Ω. Au vu de (1.23), on en déduit que $Z = \psi(f)$ μ-p.p. sur Ω, autrement dit ces deux applications sont égales en tant qu'éléments de l'espace [5] $\mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. La continuité de ψ est ainsi établie.

Cette continuité se traduit par l'inégalité

$$\forall f \in B', \quad \|\psi(f)\|_{\mathrm{L}^1} \leq \|\psi\|_{\mathcal{L}(B',\mathrm{L}^1)} \|f\|_{B'},$$

ce qui s'écrit encore $\int_\Omega |\langle f, X\rangle| \,\mathrm{d}\mu \leq \|\psi\|_{\mathcal{L}(B',\mathrm{L}^1}\|f\|_{B'}$, d'où

$$\forall f \in B', \quad |\xi(f)| = \left|\int_\Omega \langle f, X\rangle \,\mathrm{d}\mu\right| \leq \int_\Omega |\langle f, X\rangle| \,\mathrm{d}\mu \leq C\|f\|_{B'},$$

ce qui établit la continuité de ξ. □

Définition 1.21 (intégrale de Pettis)**.** *Soit $X : \Omega \to B$ scalairement μ-intégrable et ξ l'élément de B'' associé à X par $\langle \xi, f\rangle_{B'',B'} := \int_\Omega \langle f, X\rangle \,\mathrm{d}\mu$. On dit que X est Pettis intégrable si $\xi \in J(B)$, image canonique isométrique de B dans son bidual, autrement dit si*

$$\exists x_0 \in B,\ \forall f \in B', \quad \langle f, x_0\rangle_{B',B} = \int_\Omega \langle f, X\rangle_{B',B} \,\mathrm{d}\mu. \tag{1.24}$$

On définit alors l'intégrale au sens de Pettis de X en posant

$$\int_\Omega^{\text{Pettis}} X \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega X \,\mathrm{d}\mu := x_0. \tag{1.25}$$

Remarque 1.22. Autrement dit, lorsqu'elle existe, l'intégrale de Pettis $\int_\Omega X \,\mathrm{d}\mu$ est l'unique vecteur x_0 de B vérifiant

$$\forall f \in B', \quad f(x_0) = \int_\Omega f(X) \,\mathrm{d}\mu. \tag{1.26}$$

Notons que si un tel x_0 existe, il est forcément unique puisque les formes linéaires continues sur B séparent les points : si $f(x_1) = f(x_2)$ pour toute $f \in B'$, nécessairement $x_1 = x_2$. Par construction l'intégrale de Pettis commute avec les formes linéaires continues puisque lorsque X est Pettis intégrable, (1.26) peut se réécrire

$$\forall f \in B', \quad f\left(\int_\Omega X \,\mathrm{d}\mu\right) = \int_\Omega f(X) \,\mathrm{d}\mu. \tag{1.27}$$

5. Rappelons opportunément que $\mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ est l'espace des classes d'équivalence modulo l'égalité μ-p.p. des fonctions μ intégrables sur Ω.

Proposition 1.23. *L'ensemble des fonctions Pettis intégrables $(\Omega, \mathcal{F}, \mu) \to B$ est un espace vectoriel et l'intégrale de Pettis est un opérateur linéaire de cet espace dans B. De plus pour toute X Pettis-intégrable,*

$$\left\| \int_\Omega^{\text{Pettis}} X \, \mathrm{d}\mu \right\|_B \leq \int_\Omega \|X\|_B \, \mathrm{d}\mu \leq +\infty. \tag{1.28}$$

Preuve de (1.28). Soit $x_0 := \int_\Omega^{\text{Pettis}} X \, \mathrm{d}\mu$. Par le théorème de Hahn-Banach, il existe $f \in B'$ telle que $f(x_0) = \|x_0\|_B$ et $\|f\|_{B'} = 1$. Avec cette f, on a donc

$$\begin{aligned}
\left\| \int_\Omega^{\text{Pettis}} X \, \mathrm{d}\mu \right\|_B = f(x_0) = \int_\Omega f(X) \, \mathrm{d}\mu &\leq \int_\Omega |f(X)| \, \mathrm{d}\mu \\
&\leq \int_\Omega \|f\|_{B'} \|X\|_B \, \mathrm{d}\mu \\
&= \int_\Omega \|X\|_B \, \mathrm{d}\mu \leq +\infty.
\end{aligned}$$

□

Proposition 1.24 (comparaison des intégrales de Bochner et Pettis)**.**
a) Si X est μ-Bochner intégrable, elle est aussi μ-Pettis intégrable et

$$\int_\Omega^{\text{Bochner}} X \, \mathrm{d}\mu = \int_\Omega^{\text{Pettis}} X \, \mathrm{d}\mu. \tag{1.29}$$

b) La réciproque est fausse.

Preuve du a). Posons $x_0 := \int_\Omega^{\text{Bochner}} X \, \mathrm{d}\mu$. Si X est Bochner intégrable, elle est scalairement intégrable, cf. remarque 1.20. En appliquant le corollaire 1.14 avec $T = f$ et $B_2 = \mathbb{R}$ séparable, on a

$$\forall f \in B', \quad \int_\Omega f(X) \, \mathrm{d}\mu = f\left(\int_\Omega^{\text{Bochner}} X \, \mathrm{d}\mu \right) = f(x_0).$$

Donc X est μ-Pettis intégrable et $\int_\Omega^{\text{Pettis}} X \, \mathrm{d}\mu = x_0$, ce qui justifie (1.29). □

Contre exemple pour le b). On prend $B = \ell^2(\mathbb{N}^*)$ et un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sur lequel on peut définir un élément aléatoire $X = (X_i)_{i \geq 1} : \Omega \to \ell^2(\mathbb{N}^*)$ vérifiant [6]

$$X(\Omega) = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}^*} \{u_j\}, \quad u_j = (u_{j,i})_{j \geq 1}, \quad u_{j,i} = j \mathbf{1}_{\{|j|\}}(i)$$

et

$$P(X = u_j) = \frac{c}{j^2}, \quad \text{où} \quad c \sum_{j \in \mathbb{Z}^*} \frac{1}{j^2} = 1.$$

6. Si vous vous interrogez sur l'existence d'une telle construction, notez qu'il suffit de prendre $\Omega = \ell^2(\mathbb{N}^*)$, $X : \omega \to \omega$ et P la probabilité discrète ne chargeant que les $\pm x_n$ avec masse cn^{-2}.

Nous allons montrer que X *n'est pas P-Bochner intégrable*, mais qu'elle est P-Pettis intégrable.

Pour le premier point, il suffit de vérifier que $\int_\Omega \|X\| \,\mathrm{d}P = +\infty$. Pour cela, introduisons $Y_n := \pi_n(X) = (X_i)_{1\leq i\leq n}$, où π_n est la projection orthogonale de $\ell^2(\mathbb{N}^*)$ sur $\ell^2(\{1,\dots,n\})$. On a alors clairement $\|Y_n\| \leq \|X\|$. On va calculer $\int_\Omega \|Y_n\| \,\mathrm{d}P$ pour voir qu'elle tend vers $+\infty$ avec n. Ce calcul se réduit à celui de l'espérance d'une variable aléatoire positive discrète :

$$\int_\Omega \|Y_n\| \,\mathrm{d}P = \int_\Omega \|\pi_n(X)\| \,\mathrm{d}P = \sum_{j\in\mathbb{Z}^*} \|\pi_n(u_j)\| P(X = u_j). \tag{1.30}$$

Or

$$\|\pi_n(u_j)\| = \left(u_{j,1}^2 + \cdots + u_{j,n}^2\right)^{1/2} = \begin{cases} |j| & \text{si } n \geq |j|,\\ 0 & \text{si } n < |j|,\end{cases}$$

d'où en reportant dans (1.30),

$$\int_\Omega \|Y_n\| \,\mathrm{d}P = \sum_{0<|j|\leq n} |j| \frac{c}{j^2} = 2c \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

On en déduit que $\int_\Omega \|X\| \,\mathrm{d}P = +\infty$ et donc que X n'est pas P-Bochner intégrable.

Pour la Pettis-intégrabilité, notons $f = (f_i)_{i\geq 1}$ un élément quelconque du dual $\ell^2(\mathbb{N}^*)' = \ell^2(\mathbb{N}^*)$ en rappelant que pour l'espace de Hilbert $\ell^2(\mathbb{N}^*)$, la forme de dualité est donnée par $\langle f, x\rangle = \sum_{i\geq 1} x_i f_i$. En particulier on a pour tout $j \in \mathbb{Z}^*$, $\langle f, u_j\rangle = j f_{|j|}$. Vérifions d'abord que X est P-scalairement intégrable. En effet

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\langle f, X\rangle| \,\mathrm{d}P = \sum_{j\in\mathbb{Z}^*} |\langle f, u_j\rangle| P(X = u_j) &= 2c \sum_{j=1}^{+\infty} |f_j| \frac{1}{j}\\ &\leq 2c \left(\sum_{j=1}^{+\infty} f_j^2\right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^2}\right)^{1/2} < +\infty.\end{aligned}$$

Cette intégrabilité scalaire légitime l'écriture $\int_\Omega \langle f, X\rangle \,\mathrm{d}P = \sum_{j\in\mathbb{Z}^*} \langle f, u_j\rangle P(X = u_j)$, et la sommabilité de la fammille de réels $\big(\langle f, u_j\rangle P(X = u_j)\big)_{j\in\mathbb{Z}^*}$. Ceci nous autorise à sommer par paquets indexés par $\{-j, j\}$, d'où

$$\int_\Omega \langle f, X\rangle \,\mathrm{d}P = \sum_{j=1}^{+\infty} (j f_j - j f_j) \frac{c}{j^2} = 0.$$

Nous venons ainsi d'établir que

$$\forall f \in (\ell^2)', \quad \int_\Omega \langle f, X\rangle \,\mathrm{d}P = 0 = f(0).$$

Autrement dit, X est P-Pettis intégrable et $\int_\Omega^{\text{Pettis}} X \,\mathrm{d}P = 0$. □

Nous terminons ce chapitre avec une condition suffisante de Pettis intégrabilité qui nous sera utile pour l'étude des é.a. gaussiens. Nous l'énonçons avec une mesure de probabilité P pour la commodité de référence.

Théorème 1.25 (condition suffisante de Pettis intégrabilité)**.** *Soient B un Banach séparable et X un élément aléatoire de B, défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et scalairement intégrable (relativement à la mesure de probabilité P). Pour que X soit Pettis intégrable, il suffit que*

$$\exists \varepsilon > 0, \quad \inf_{f \in B'} P\big(|f(X)| \geq \varepsilon |\mathbf{E} f(X)| \big) > 0. \tag{1.31}$$

Preuve. On sait que la formule

$$\forall f \in B', \quad \langle \xi, f \rangle_{B'', B'} := \int_\Omega \langle X, f \rangle_{B, B'} \,\mathrm{d}P = \mathbf{E} f(X), \tag{1.32}$$

définit un élément ξ de B'' le bidual topologique de B. Il s'agit de montrer que ξ appartient à $J(B)$, où J est l'injection canonique de B dans B''.

Commençons par deux rappels d'analyse fonctionnelle.

1. Si $\xi : B' \to \mathbb{R}$ est une forme linéaire continue pour $\sigma(B', B)$, il existe $x \in B$ tel que $\forall f \in B'$, $\xi(f) = f(x)$, autrement dit, $\xi \in J(B)$, cf. Brézis, Prop. III.13. La réciproque étant évidente, on en déduit que B' muni de la topologie $\sigma(B', B)$ a pour dual topologique $J(B)$. Donc pour vérifier l'appartenance à $J(B)$ de ξ définie par (1.32), il suffit de vérifier que ξ est continue sur B' pour la topologie $\sigma(B', B)$, ou ce qui est équivalent, qu'elle est continue au point 0.
2. Si B est séparable, la boule unité fermée de B' est métrisable pour la topologie $\sigma(B', B)$, cf. Brézis Th. III.25.

En combinant les points 1 et 2, il nous suffit donc de vérifier que pour toute suite f_n dans la boule unité de B' qui converge vers 0 au sens $\sigma(B', B)$, $\mathbf{E} f_n(X)$ converge vers 0 dans $\mathbb{R}$.

Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe une suite $(f_n)_{n \geq 1}$ dans la boule unité de B' telle que

$$f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\sigma(B', B)} 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{E} f_n(X) \nrightarrow 0. \tag{1.33}$$

On peut alors trouver un $\delta > 0$ et une sous-suite (f_{n_k}) tels que

$$\forall k \geq 1, \quad |\mathbf{E} f_{n_k}(X)| \geq \delta. \tag{1.34}$$

Introduisons les évènements

$$A_k := \big\{ |f_{n_k}(X)| \geq \varepsilon |\mathbf{E} f_{n_k}(X)| \big\}, \qquad A := \bigcap_{j \geq 1} \bigcup_{k \geq j} A_k,$$

où le réel $\varepsilon > 0$ est celui fourni par l'hypothèse (1.31). On a ainsi pour tout $k \geq 1$, $P(A_k) \geq c > 0$, avec

$$c := \inf_{f \in B'} P\big(|f(X)| \geq \varepsilon |\mathbf{E} f(X)| \big).$$

Posons $D_j := \cup_{k \geq j} A_k$. La suite $(D_j)_{j \geq 1}$ est décroissante pour l'inclusion et son intersection est A. Par continuité séquentielle décroissante de P, $P(D_j) \downarrow P(A)$. Or pour tout $j \geq 1$, $P(D_j) \geq P(A_j) \geq c$. Par conséquent, $P(A) \geq c > 0$, donc A *n'est pas vide*. Il existe donc au moins un $\omega_0 \in A$. Pour cet ω_0, on a

$$\forall j \geq 1, \exists k = k(\omega_0, j) \geq j, \quad |f_{n_k}(X(\omega_0))| \geq \varepsilon |\mathbf{E} f_{n_k}(X)| \geq \varepsilon \delta.$$

Mais ceci contredit la convergence $\sigma(B', B)$ de f_n vers 0, donc (1.33) est fausse, ce qui achève la démonstration. $\square$

Remarque 1.26. La condition suffisante (1.31) se généralise immédiatement pour la Pettis-intégrabilité relativement à une mesure finie μ (en écrivant $\int_\Omega f(X(\omega))\,\mathrm{d}\mu(\omega)$ au lieu de $\mathbf{E} f(X)$). En effet la seule propriété de la mesure de probabilité P que nous avons utilisée est la continuité séquentielle *décroissante* qui reste vraie pour une mesure finie, mais plus pour une mesure infinie.

Chapitre 2

Convergence en loi

2.1 Introduction

Ce chapitre fait le point sur la convergence en loi dans un espace de Banach en dégageant le concept clé d'équitension. Rappelons (cf. définition 1.2) que si B est un espace de Banach et $\mathcal{B}$ sa tribu borélienne, l'élément aléatoire $X : \ (\Omega, \mathcal{F}, P) \to (B, \mathcal{B})$ est dit de Radon ou tendu si :

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists K \text{ compact de } B; \quad P(X \in K) \geq 1 - \varepsilon.$$

Nous avons vu que X est tendu si et seulement s'il existe un s.e.v. séparable fermé F de B tel que $P(X \in F) = 1$. En conséquence si B est séparable, tout é.a. borélien à valeurs dans B est tendu.

Définition 2.1. *Soit $\mathfrak{X}$ un espace métrique, $\mathcal{B}_{\mathfrak{X}}$ sa tribu borélienne et $\mathcal{P}$ l'ensemble des probabilités sur $(\mathfrak{X}, \mathcal{B}_{\mathfrak{X}})$. On munit $\mathcal{P}$ de la topologie faible définie par la base de voisinages de la forme :*

$$N(\mu, f_1, \dots, f_r, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r) := \Big\{ \nu \in \mathcal{P}; \ \Big| \int_{\mathfrak{X}} f_i \, d(\mu - \nu) \Big| < \varepsilon_i, \ i = 1, \dots, r \Big\},$$

où $\mu \in \mathcal{P}$, $r \in \mathbb{N}^*$, les f_i sont dans $C_b(\mathfrak{X})$, espace des fonctions réelles continues bornées sur $\mathfrak{X}$ et les ε_i des réels strictement positifs. En particulier, μ_n converge faiblement vers μ dans $\mathcal{P}$ si et seulement si :

$$\forall f \in C_b(\mathfrak{X}), \qquad \int_{\mathfrak{X}} f \, d\mu_n \to \int_{\mathfrak{X}} f \, d\mu.$$

On dit enfin que la suite d'éléments aléatoires X_n de $\mathfrak{X}$ converge en loi *vers l'élément aléatoire X si la suite des lois $P_{X_n} = P \circ X_n^{-1}$ converge faiblement vers la loi $P_X = P \circ X^{-1}$.*

Dans le langage de l'analyse fonctionnelle, cette topologie est la topologie trace sur $\mathcal{P}$ de la topologie $\sigma(C_b', C_b)$ ou topologie étoile faible sur le dual de C_b. Dans tout ce qui suit, $\mathcal{P}$ sera muni de cette topologie. Rappelons les critères classiques de convergence des suites pour cette topologie.

Théorème 2.2 (Alexandrov 1943)**.**
Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) μ_n *converge faiblement vers* μ *quand* n *tend vers* $+\infty$ *;*

ii) $\forall f \in UC_b(\mathfrak{X})$, $\int_{\mathfrak{X}} f\,d\mu_n \to \int_{\mathfrak{X}} f\,d\mu$ *;*

iii) $\forall F$ *fermé,* $\limsup \mu_n(F) \leq \mu(F)$ *;*

iv) $\forall G$ *ouvert,* $\liminf \mu_n(G) \geq \mu(G)$ *;*

v) Pour tout borélien A *tel que* $\mu(\partial A) = 0$, $\lim \mu_n(A) = \mu(A)$.

Dans ii), $UC_b(\mathfrak{X})$ désigne l'espace des fonctions réelles uniformément continues bornées sur $\mathfrak{X}$.

Dans toute la suite de ce chapitre, nous prenons pour espace métrique $\mathfrak{X}$ un espace de Banach B et nous étudions la convergence en loi dans B.

2.2 Convergence en loi et équitension

La méthode standard pour établir la convergence en loi d'une suite d'éléments aléatoires dans un espace de Banach séparable repose sur la proposition suivante.

Proposition 2.3. *Soient* X, X_n $(n \geq 1)$ *des éléments aléatoires de l'espace de Banach* séparable B *de dimension infinie. Alors* X_n *converge en loi vers* X *si et seulement si :*

(a) $\{P_{X_n},\ n \geq 1\}$ *est relativement compacte ;*

(b) Pour tout $f \in B'$, $f(X_n) \xrightarrow{\text{loi}} f(X)$.

Dans le cas où B est de dimension finie, on voit facilement en utilisant les fonctions caractéristiques que la convergence en loi de X_n vers X équivaut à (b).

La nécessité de (a) et (b) pour la convergence en loi de X_n vers X est évidente. Pour montrer leur suffisance, on utilise une argumentation standard en analyse fonctionnelle où pour prouver une certaine convergence on montre d'abord la relative compacité puis une convergence selon un mode plus faible, ici le (b), qui permet d'établir l'existence d'une seule limite possible pour toutes les sous-suites et d'identifier cette limite. Voyons cela en détail.

Lemme 2.4 (convergence par sous-sous-suites)**.** *Soit* $\mathcal{E}$ *un espace topologique. La suite* $(u_n)_{n\geq 1}$ *converge vers* ℓ *dans* $\mathcal{E}$ *si de toute sous-suite infinie de* $(u_n)_{n\geq 1}$ *on peut extraire une nouvelle sous-suite infinie convergeant vers* ℓ.

Preuve. Par confort typographique, nous noterons une sous-suite infinie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ comme une suite $(u_n)_{n\in I}$, où I est une partie infinie de $\mathbb{N}^*$. Une sous-suite infinie de $(u_n)_{n\in I}$ s'écrira alors $(u_n)_{n\in J}$, pour une partie infinie J de I. La convergence de cette sous-suite sera notée :

$$u_n \xrightarrow[n\in J,\, n\to+\infty]{} \ell.$$

L'hypothèse du lemme s'écrit donc

$$\forall I \text{ infini} \subset \mathbb{N}^*, \quad \exists J \text{ infini} \subset I, \quad u_n \xrightarrow[n\in J,\, n\to+\infty]{} \ell. \tag{2.1}$$

Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *ne converge pas* vers ℓ. Il existe alors un voisinage V de ℓ tel que

$$\forall j \in \mathbb{N}^*,\ \exists n \geq j, \quad u_n \notin V. \tag{2.2}$$

Autrement dit, il existe *une infinité* d'entiers n tels que $u_n \notin V$. Notons I l'ensemble de ces entiers. Par l'hypothèse (2.1), il existe une partie infinie J de I telle que la sous-suite $(u_n)_{n\in J}$ converge vers ℓ. On peut alors trouver $n \in J$ assez grand pour que $u_n \in V$. Mais comme cet n est aussi dans I, on aboutit à une contradiction. On peut donc conclure à la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers ℓ. □

Fin de la preuve de la proposition 2.3. Il s'agit de montrer que les conditions (a) et (b) impliquent la convergence en loi de X_n vers X. Nous allons utiliser le lemme 2.4 avec l'espace topologique $\mathcal{E} = \mathcal{P}$, ensemble des probabilités sur la tribu borélienne de B, muni de la topologie faible de la définition 2.1.

Par le (a), de toute sous-suite infinie $(P_{X_n})_{n\in I}$, on peut extraire une sous-suite infinie $(P_{X_n})_{n\in J}$ convergente dans $\mathcal{P}$ vers une certaine mesure de probabilité μ, dépendant *a priori* de J. Introduisons par commodité un élément aléatoire Y dans B de loi[1] μ. La convergence de $(P_{X_n})_{n\in J}$ vers μ nous donne alors la convergence en loi dans B de $(X_n)_{n\in J}$ vers Y, d'où par image continue :

$$\forall f \in B', \quad f(X_n) \xrightarrow[n\in J, n\to+\infty]{\text{loi}} f(Y).$$

En comparant avec (b), on en déduit que pour toute $f \in B'$, $f(X)$ et $f(Y)$ ont même loi, puis par la proposition 1.5 que X et Y ont même loi, ce qui s'écrit $P_X = \mu$. Le lemme 2.4 avec $\ell = P_X$ nous permet de conclure. □

Remarque 2.5. L'examen de la preuve de la proposition 2.3 montre que la séparabilité de B n'intervient que *via* la proposition 1.5 pour déduire l'égalité $P_X = \mu$. On pourrait donc se passer de la séparabilité de B en rajoutant l'hypothèse que les X_n sont des éléments aléatoires de Radon. En effet, on peut vérifier (exercice) que toute limite faible d'une sous-suite $(P_{X_n})_{n\in J}$ est encore de Radon.

Nous allons voir maintenant qu'il suffit dans la proposition 2.3 de tester (b) sur une partie dense de B'.

Proposition 2.6. *Soient X, X_n $(n \geq 1)$ des éléments aléatoires de l'espace de Banach B. On suppose*

i) que la famille $\{X_n;\ n \geq 1\}$ est stochastiquement bornée*, i. e.*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists c \in \mathbb{R}_+, \quad \forall n \geq 1,\ P(\|X_n\| > c) < \varepsilon; \tag{2.3}$$

ii) qu'il existe une partie dense D de B' (pour la topologie forte de B') telle que pour toute $g \in D$, $g(X_n)$ converge en loi vers $g(X)$.

Alors $f(X_n)$ converge en loi vers $f(X)$ pour toute $f \in B'$.

1. Il en existe au moins un, par exemple l'identité sur $(B, \mathcal{B}, \mu)$.

Notons que dans cet énoncé, nous n'avons pas besoin de séparabilité de B, ni même que les X_n ou X soient de Radon. En anticipant un peu sur le théorème de Prokhorov rappelé ci-dessous, on se convaincra que la propriété (2.3) de bornitude stochastique est plus faible que l'hypothèse (a) de relative compacité de $(P_{X_n})_{n\geq 1}$ dans la proposition 2.3. Notons aussi que la famille $\{X\} \cup \{X_n;\ n \geq 1\}$ est elle aussi stochastiquement bornée, puisque la fonction de répartition de la variable aléatoire réelle $\|X\|$ tend vers 1 en $+\infty$, ce qui nous donne pour tout $\varepsilon > 0$ un réel c' tel que pour tout $c > c'$, $P(\|X\| > c) < \varepsilon$. Donc en imposant en plus $c > c'$ dans (2.3), on a à la fois $P(\|X_n\| > c) < \varepsilon$ pour tout n et $P(\|X\| > c) < \varepsilon$.

Preuve de la proposition 2.6. Par le point ii) du théorème d'Alexandrov avec $\mathfrak{X} = \mathbb{R}$, il nous suffit de montrer que pour toute fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *uniformément* continue et bornée sur $\mathbb{R}$ et toute $f \in B'$,

$$\mathbf{E}h(f(X_n)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbf{E}h(f(X)). \tag{2.4}$$

Fixons h et f. La continuité uniforme de h sur $\mathbb{R}$, se traduit par

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0,\ |t - s| < \delta \Rightarrow |h(t) - h(s)| < \varepsilon. \tag{2.5}$$

Fixons $\varepsilon > 0$. En approximant f par une $g \in D$ dont le choix sera précisé ultérieurement, on peut écrire

$$\bigl|\mathbf{E}h(f(X_n)) - \mathbf{E}h(f(X))\bigr| \leq T_1(n) + T_2(n) + T_3,$$

avec

$$\begin{aligned} T_1(n) &:= \bigl|\mathbf{E}h(f(X_n)) - \mathbf{E}h(g(X_n))\bigr|, \\ T_2(n) &:= \bigl|\mathbf{E}h(g(X_n)) - \mathbf{E}h(g(X))\bigr|, \\ T_3 &:= \bigl|\mathbf{E}h(g(X)) - \mathbf{E}h(f(X))\bigr|. \end{aligned}$$

Occupons nous d'abord de $T_1(n)$, en notant que $T_1(n) = T_1'(n) + T_1''(n)$ où

$$\begin{aligned} T_1'(n) &:= \Bigl|\mathbf{E}\Bigl(\bigl(h(f(X_n)) - h(g(X_n))\bigr)\mathbf{1}_{\{\|X_n\|\leq c\}}\Bigr)\Bigr|, \\ T_1''(n) &:= \Bigl|\mathbf{E}\Bigl(\bigl(h(f(X_n)) - h(g(X_n))\bigr)\mathbf{1}_{\{\|X_n\|> c\}}\Bigr)\Bigr|, \end{aligned}$$

le réel $c > 0$ étant associé à ε par la bornitude stochastique de $\{X\} \cup \{X_n;\ n \geq 1\}$, ce qui nous donne déjà

$$\forall n \geq 1, \qquad T_1''(n) \leq 2\|h\|_\infty P(\|X_n\| > c) < 2\|h\|_\infty\varepsilon. \tag{2.6}$$

Pour majorer $T_1'(n)$, on note que sur l'évènement $\{\|X_n\| \leq c\}$, on a $|f(X_n) - g(X_n)| \leq \|f - g\|_{B'}\|X_n\| \leq c\|f - g\|_{B'}$, ce qui nous conduit à choisir $g \in D$ telle que $c\|f - g\|_{B'} < \delta$, le δ associé à ε et h par (2.5). Avec ce choix, on a $|h(f(X_n)) - h(g(X_n))| < \varepsilon$ sur l'évènement $\{\|X_n\| \leq c\}$, d'où

$$\forall n \geq 1, \qquad T_1'(n) \leq \varepsilon. \tag{2.7}$$

Le choix de g étant maintenant fixé, il est clair que le même type de découpage entre $\{\|X\| \leq c\}$ et son complémentaire permet de traiter T_3 pour obtenir

$$T_3 < (2\|h\|_\infty + 1)\varepsilon. \tag{2.8}$$

Enfin, comme $g \in D$, $g(X_n)$ converge en loi vers $g(X)$ et comme h est continue bornée sur $\mathbb{R}$, $T_2(n)$ tend vers 0, ce qui nous donne l'existence d'un $n_0 = n_0(\varepsilon)$ tel que

$$\forall n \geq n_0, \quad T_2(n) < \varepsilon. \tag{2.9}$$

Nous avons travaillé avec ε fixé mais arbitraire, donc en rassemblant (2.6)–(2.9), nous avons en fait établi que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0,\ \forall n \geq n_0, \quad \left|\mathbf{E}h(f(X_n)) - \mathbf{E}h(f(X))\right| < (4\|h\|_\infty + 3)\varepsilon,$$

ce qui nous donne la convergence de $\mathbf{E}h(f(X_n))$ vers $\mathbf{E}h(f(X))$. Comme h et f étaient quelconques respectivement dans $UC_b(\mathbb{R})$ et B', on a bien convergence en loi de $f(X_n)$ vers $f(X)$ pour toute $f \in B'$. □

La propriété d'équitension joue un rôle central dans la vérification de la condition (a) de la proposition 2.3.

Définition 2.7. *La famille $\mathcal{R}$ de probabilités sur la tribu borélienne de l'espace topologique $\mathfrak{X}$ est équitendue sur $\mathfrak{X}$ si :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists K \text{ compact de } \mathfrak{X};\ \forall \mu \in \mathcal{R}, \quad \mu(K) \geq 1 - \varepsilon.$$

On dit que la suite d'éléments aléatoires X_n de $\mathfrak{X}$ est équitendue si la suite des lois P_{X_n} l'est.

La relation entre équitension et relative compacité est donnée par :

Théorème 2.8 (Prokhorov)**.**
(*i*) *Si $\mathfrak{X}$ est métrique, équitension $\Rightarrow$ relative compacité ;*
(*ii*) *Si $\mathfrak{X}$ est polonais, relative compacité $\Rightarrow$ équitension.*

Rappelons qu'un espace est dit *polonais* lorsqu'il est métrique, séparable et complet. Si $\mathfrak{X}$ est un Banach séparable, la relative compacité de $\mathcal{R}$ dans $\mathcal{P}$ et son équitension sur $\mathfrak{X}$ sont donc équivalentes. On est ainsi amené à s'intéresser aux compacts de $\mathfrak{X}$. Le problème n'est pas trivial car (théorème de Riesz) dans un espace vectoriel normé $\mathfrak{X}$ les boules fermées sont compactes si et seulement si $\mathfrak{X}$ est de dimension finie. En dimension infinie, la classe des compacts est donc plus petite que celle des fermés bornés.

À titre d'illustration de ce qui précède, nous allons voir maintenant comment en combinant la proposition 2.3, le théorème de Prokhorov et le théorème d'Ascoli on peut retrouver un résultat classique de la théorie des processus stochastiques à trajectoires continues.

Proposition 2.9 (convergence en loi dans $C[0,1]$)**.** *Soient X, X_n $(n \geq 1)$ des éléments aléatoires de $C[0,1]$. La suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers X dans $C[0,1]$ si et seulement si*

(a) $\{P_{X_n},\ n \geq 1\}$ est relativement compacte ;

(b') X_n converge vers X au sens des lois finidimensionnelles i. e.

$$\forall k \geq 1, \forall t_1, \dots, t_k \in [0,1], \quad \big(X_n(t_1), \dots, X_n(t_k)\big) \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{loi}} \big(X(t_1), \dots, X(t_k)\big), \tag{2.10}$$

convergence en loi des vecteurs aléatoires de $\mathbb{R}^k$.

Preuve. Dans le cas particulier où $B = C[0,1]$, B' est l'ensemble des mesures signées sur la tribu borélienne de $[0,1]$, par le théorème de Riesz [2]. Une mesure signée μ s'écrit $\mu = \mu_1 - \mu_2$, où μ_1 et μ_2 sont deux mesures positives finies sur la tribu borélienne de $[0,1]$. Ainsi, à toute forme linéaire continue f sur $C[0,1]$, on peut associer une mesure signée $\mu = \mu_1 - \mu_2$ vérifiant :

$$\forall x \in C[0,1], \quad f(x) = \int_{[0,1]} x(t)\,\mathrm{d}\mu(t) := \int_{[0,1]} x(t)\,\mathrm{d}\mu_1(t) - \int_{[0,1]} x(t)\,\mathrm{d}\mu_2(t).$$

Traduisons l'hypothèse (b') traduite à l'aide des fonctions caractéristique des vecteurs aléatoires apparaissant dans (2.10), que nous noterons Z_n et Z pour alléger. Pour tout $k \geq 1$, tous $t_1, \dots, t_k \in [0,1]$ et tout $(a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{R}^k$, $\varphi_{Z_n}(a_1, \dots, a_k)$ converge vers $\varphi_Z(a_1, \dots, a_k)$, ce qui s'écrit encore :

$$\mathbf{E} \exp\big(i(a_1 X_n(t_1) + \cdots + a_k X_n(t_k)\big) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbf{E} \exp\big(i(a_1 X(t_1) + \cdots + a_k X(t_k)\big)$$

Remarquons maintenant que

$$a_1 X_n(t_1) + \cdots + a_k X_n(t_k) = \int_{[0,1]} X_n(t)\,\mathrm{d}\nu(t), \quad \text{où} \quad \nu := \sum_{j=1}^{k} a_j \delta_{t_j}.$$

Notons D le sous espace vectoriel de B' formé de toutes les combinaisons linéaires finies des mesures de Dirac δ_s, pour $s \in [0,1]$. On peut donc réécrire (b') sous la forme équivalente

$$\forall g \in D, \quad g(X_n) = \int_{[0,1]} X_n(t)\,\mathrm{d}\nu(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{loi}} g(X) = \int_{[0,1]} X(t)\,\mathrm{d}\nu(t). \tag{2.11}$$

La situation commence à ressembler à celle de la propostion 2.6, avec deux différences : D est dense dans B' seulement pour la topologie $\sigma(B', B)$ au lieu de la topologie forte de B' et on a remplacé l'hypothèse de bornitude stochastique de $\{X_n,\ n \geq 1\}$ par l'hypothèse plus forte de relative compacité de $\{P_{X_n},\ n \geq 1\}$. Grâce au théorème de Prokhorov, cette dernière nous permet d'écrire :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists K \text{ compact de } C[0,1],\ \forall n \geq 1, \quad P(X_n \notin K) < \varepsilon.$$

2. Voir par exemple, W. Rudin, *Analyse réelle et complexe*, Masson 1975.

Comme $C[0,1]$ est séparable, P_X est tendue et quitte à agrandir K, on peut considérer que l'on a aussi $P(X \notin K) < \varepsilon$. On peut reprendre alors la preuve de la proposition 2.6, en remplaçant l'évènement $\{\|X_n\| > c\}$ par $\{X_n \notin K\}$. On voit facilement que la seule adaptation à faire concerne la majoration de $T_1'(n)$ et le choix de la forme linéaire continue approximante g. Plus précisément, il nous faut vérifier l'existence d'une g combinaison linéaire finie de mesures de Dirac telle que

$$\forall x \in K, \quad |f(x) - g(x)| < \delta, \tag{2.12}$$

où δ est associé à ε et h par (2.5). On aura alors sur l'évènement $\{X_n \in K\}$, $|h(f(X_n)) - h(g(X_n))| < \varepsilon$. Introduisons le partage de $[0,1]$ par les points $t_{k,j} := j/k$, $j = 0,1,\dots k$ et posons $I_{k,j} := [t_{k,j}, t_{k,j+1}[$ pour $0 \leq j < k$ et $I_{k,k} := \{1\}$. Approximons la fonction continue x par la fonction en escaliers x_k définie par

$$x_k := \sum_{j=0}^{k} x(t_{k,j}) \mathbf{1}_{I_{k,j}}.$$

Si μ est la mesure signée associée à f, on remarque que

$$\int_{[0,1]} x_k(t)\,\mathrm{d}\mu(t) = \sum_{j=0}^{k} x(t_{k,j})\mu(I_{k,j}) = \int_{[0,1]} x(t)\,\mathrm{d}\nu_k(t),$$

où la mesure signée ν_k est définie par

$$\nu_k := \sum_{j=0}^{k} a_{k,j}\delta_{t_{k,j}}, \quad \text{avec} \quad a_{k,j} := \mu(I_{k,j}),\ j = 0,1,\dots,k$$

et représente donc un élément g_k de D. On a alors en notant w le module de continuité uniforme, voir (2.13) ci-dessous,

$$|f(x) - g_k(x)| = \left| \int_{[0,1]} (x - x_k)\,\mathrm{d}\mu \right| \leq w(x, 1/k)(\mu_1([0,1]) + \mu_2([0,1])).$$

Par le théorème d'Ascoli, voir l'exemple 2.12 ci-dessous, $w(x, 1/k)$ tend vers 0 *uniformément* sur K parce que K est un compact de $C[0,1]$. On obtient donc (2.12) pour k assez grand. □

2.3 Compacts dans un espace de Banach

Pour pouvoir utiliser le théorème de Prokhorov dans l'étude de la convergence en loi, il importe de disposer de conditions de compacité dans les espaces de Banach. Commençons par examiner sans démonstration quelques exemples de caractérisations de la compacité dans des espaces usuels. Ces caractérisations pourront être justifiées en exercice comme des corollaires du théorème 2.18.

Exemple 2.10. K est relativement compact dans $\ell^p(\mathbb{N})$ $(1 \leq p < +\infty)$ si et seulement si :
 (i) K est borné,
 (ii) $\sup_{u \in K} \sum_{i \geq j} |u_i|^p \xrightarrow[j \to +\infty]{} 0.$

Notons que $p = 2$ nous donne le cas des Hilbert séparables (à isomorphisme près, en remplaçant la base canonique de ℓ^p par une base hilbertienne).

Exemple 2.11. K est relativement compact dans $c_0(\mathbb{N})$ si et seulement si :
 (i) K est borné,
 (ii) $\sup_{u \in K} \sup_{i \geq j} |u_i| \xrightarrow[j \to +\infty]{} 0.$

Une condition équivalente à (i) et (ii) est l'existence d'une suite $v \in c_0(\mathbb{N})$ qui domine K : $\forall u \in K$, $|u| \leq v$ (i.e. $u_i \leq v_i$ pour tout i).

Exemple 2.12 (théorème d'Ascoli)**.** K est relativement compact dans $C[0, 1]$ si et seulement si :
 (i) K est borné,
 (ii) K est équicontinue.

Rappelons que l'équicontinuité d'une famille K de fonctions signifie la convergence uniforme sur K vers 0 du module de continuité uniforme :

$$w(x, \delta) := \sup_{|t-s| \leq \delta} |x(t) - x(s)| \tag{2.13}$$

quand δ tend vers 0. Notons aussi que l'on peut remplacer (i) par la condition plus faible : $\sup_{f \in K} |x(0)| < +\infty$.

Exemple 2.13 (espaces de Hölder)**.** On définit l'espace de Hölder d'ordre α $(0 < \alpha < 1)$ comme l'espace, noté $\mathrm{H}_\alpha[0, 1]$, des fonctions x $[0, 1] \to \mathbb{R}$ telles que :

$$\|x\|_\alpha := \|x\|_\infty + w_\alpha(x, 1) < +\infty,$$

où $w_\alpha(x, \delta)$ désigne le module de continuité hölderien de x :

$$w_\alpha(x, \delta) := \sup_{0 < |t-s| < \delta} \frac{|x(t) - x(s)|}{|t - s|^\alpha}.$$

On définit le sous-espace $\mathrm{H}_\alpha^0[0, 1]$ de $\mathrm{H}_\alpha[0, 1]$ par :

$$x \in \mathrm{H}_\alpha^0 \iff x \in \mathrm{H}_\alpha \quad \text{et} \quad \lim_{\delta \to 0} w_\alpha(x, \delta) = 0.$$

$(\mathrm{H}_\alpha, \| \ \|\alpha)$ est un espace de Banach non séparable. $(\mathrm{H}_\alpha^0, \| \ \|\alpha)$ en est un sous-espace fermé séparable. Alors K est relativement compact dans $\mathrm{H}_\alpha^0[0, 1]$ si et seulement si :

(i) $\sup_{x\in K}|x(0)| < +\infty$,
(ii) $\lim_{\delta\to 0}\sup_{x\in K} w_\alpha(x,\delta) = 0$.

On en déduit immédiatement la condition suffisante suivante : si K est borné dans un H_β pour un $\beta > \alpha$, alors il est relativement compact dans H_α^0.

Voici maintenant deux caractérisations générales des compacts d'un Banach. Si A est une partie de B, on note $\mathrm{co}(A)$ son enveloppe convexe et $\overline{\mathrm{co}}(A)$ son enveloppe convexe fermée.

Théorème 2.14. *K est compact dans l'espace de Banach B si et seulement si K est fermé et inclus dans un $\overline{\mathrm{co}}(A)$ où A est de la forme :*

$$A = \{x_n;\ n \geq 1\} \cup \{0\}, \ \textit{avec} \lim_{n\to+\infty} \|x_n\| = 0.$$

Pour une preuve du théorème 2.14, voir par exemple H. Queffélec et C. Zuily, *Éléments d'Analyse pour l'Agrégation*, Masson 1995, th. IV.4, p. 159.

Théorème 2.15. *K est compact dans l'espace de Banach B si et seulement si*

i) K est fermé borné ;

ii) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un s.e.v. de dimension finie F tel que pour tout $x \in K$, $d(x, F) < \varepsilon$.

Rappelons que par définition, $d(x, F) = \inf\{\|x - y\| \,;\, y \in F\}$.

Preuve. La nécessité de i) et ii) pour la compacité de K est évidente. Réciproquement montrons que si une partie K de B vérifie i) et ii), elle est compacte. Fixons un $\varepsilon > 0$ arbitraire. Par ii) il existe un s.e.v. F_ε de B, de dimension finie, tel que pour tout $x \in K$, $d(x, F_\varepsilon) < \varepsilon$. En notant que cette inégalité est *stricte*, on peut associer à chaque $x \in K$ un $x' \in F_\varepsilon$ tel que $\|x - x'\| < \varepsilon$. L'ensemble A_ε de ces x' est borné dans F_ε parce que K est borné et tous les x' sont à une distance de K inférieure à ε. Comme F_ε est de dimension finie, le borné A_ε est relativement compact et on peut le recouvrir par un nombre fini de boules $\Delta_{F_\varepsilon}(x'_i, \varepsilon)$, $1 \leq i \leq N_\varepsilon$. Alors les $\Delta(x_i, 2\varepsilon)$, $1 \leq i \leq N_\varepsilon$, forment un recouvrement de K. Comme ε est arbitraire, on en déduit que K est précompact (grâce à la complétude de B). Comme K est fermé par i), on conclut que K est un compact de B. □

Définition 2.16. *L'espace de Banach B est dit Schauder décomposable s'il existe une suite $(B_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de s.e.v. fermés telle que :*

$$B = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} B_i \quad \textit{(somme directe topologique).}$$

Rappelons que somme directe *topologique* signifie que les projections canoniques $\pi_i : B \to B_i$ sont continues. Par analogie avec les notations de la théorie des ondelettes, nous poserons :

$$V_j = \bigoplus_{i \leq j} B_i,$$

et noterons E_j les projections continues correspondantes :

$$E_j = \sum_{i \leq j} \pi_i : \ B \to V_j, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Remarque 2.17. Les applications linéaires continues E_j vérifient $\lim_{j\to+\infty} \|x - E_j x\| = 0$ pour tout $x \in B$. En particulier pour tout $x \in B$, la suite $(E_j x)_{j\in\mathbb{N}}$ est bornée. Par le théorème de Banach-Steinhaus (ou principe de la borne uniforme), on a

$$\sup_{j\in\mathbb{N}} \|E_j\| = C < +\infty. \tag{2.14}$$

En notant que pour $i > j$, $E_j x = E_i E_j x$ et en écrivant

$$\|x - E_i x\| \leq \|x - E_j x\| + \|E_i E_j x - E_i x\| = \|x - E_j x\| + \|E_i(E_j x - x)\|,$$

on en déduit

$$\forall i > j, \ \forall x \in B, \quad \|x - E_i x\| \leq (1 + C)\|x - E_j x\|. \tag{2.15}$$

Comme exemples d'espaces Schauder décomposables, on peut citer tous les espaces ayant une base de Schauder et tous les espaces analysables par AMR (Analyse Multi Résolution). Ceci nous donne déjà les espaces ℓ^p, $L^p[0,1]$ ou $L^p(\mathbb{R})$ $(1 \leq p < +\infty)$, c_0, $C[0,1]$, les espaces de Hölder [3], de Sobolev, de Besov [4] ...

Théorème 2.18. *K est relativement compact dans l'espace Schauder décomposable B si et seulement si :*

i) Pour chaque $j \in \mathbb{N}$, $E_j K$ est relativement compact dans V_j,

ii) $\sup_{x\in K} \|x - E_j x\| \xrightarrow[j\to+\infty]{} 0.$

On peut remplacer i) par :

i') Pour chaque $i \in \mathbb{N}$, $\pi_i K$ est relativement compact dans B_i.

L'une et l'autre sont faciles à vérifier si $\dim B_i < +\infty$. Sinon (cas de l'AMR) on peut appliquer le théorème à V_j avant de l'appliquer à B.

Preuve. Pour prouver la suffisance de i) et ii), on montre qu'elles impliquent la précompacité de K, c'est-à-dire l'existence pour tout $\varepsilon > 0$ d'un recouvrement fini de K par des boules de rayon ε (dans un espace complet, relative compacité et précompacité sont équivalentes). Fixons donc $\varepsilon > 0$. Par ii), il existe j tel que pour tout $x \in K$,

3. Plus précisément leurs sous-espaces séparables du type H^0_α.
4. Sauf les $B^{s,q}_p$ tels que p ou q soit infini.

$\|x - E_jx\| < \varepsilon$. La trace sur V_j de $\cup_{x\in K}\Delta(E_jx, \varepsilon)$ est un recouvrement de E_jK par des boules de V_j. Par i) on peut en extraire un sous-recouvrement fini :

$$E_jK \subset \bigcup_{i=1}^{n} \Delta(E_jx_i, \varepsilon).$$

Soit $x \in K$, E_jx est dans une boule $\Delta(E_jx_i, \varepsilon)$ pour un certain i. On a alors :

$$\|x - x_i\| \leq \|x - E_jx\| + \|E_jx - E_jx_i\| < 2\varepsilon,$$

donc

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} \Delta(x_i, 2\varepsilon).$$

La nécessité de i) est évidente en raison de la continuité de E_j. Pour montrer la nécessité de ii), on ne perd pas de généralité en supposant que K est déjà compact. Examinons d'abord le cas particulier où B est un espace de Hilbert séparable et où la décomposition de Schauder provient d'une base hilbertienne (e_i, $i \in \mathbb{N}$). On a alors :

$$\|x - E_jx\|^2 = \sum_{i=j+1}^{+\infty} |\langle x, e_i\rangle|^2.$$

On voit tout de suite que $\big(x \mapsto \|x - E_jx\|^2\big)_{j\in\mathbb{N}}$ est une suite *décroissante* de fonctions *continues* sur K et qu'elle converge vers 0. Par le théorème de Dini, cette convergence est uniforme. Dans le cas général, on perd la décroissance de $\|x - E_jx\|$. Pour y remédier, on utilise la majoration :

$$\|x - E_jx\| \leq \sup_{i\geq j} \|x - E_ix\| =: N_j(x).$$

Comme B est somme directe topologique des B_i, $x - E_jx$ tend vers 0 quand j tend vers l'infini. Par (2.15) il en est de même pour $N_j(x)$. D'autre part pour j fixé, N_j est une semi-norme. En utilisant (2.15) et la continuité de E_j, on voit qu'elle est continue en 0. Elle est donc continue sur tout l'espace et on conclut en appliquant le théorème de Dini à la suite décroissante vers 0 de fonctions continues $(N_j)_{j\geq 0}$. □

2.4 Equitension dans un Banach

Nous pouvons maintenant exploiter l'étude analytique de la section 3 pour donner des conditions d'équitension. Commençons par la condition dite de *plate concentration* qui découle du théorème 2.15.

Théorème 2.19. *La famille $\mathcal{F}$ de probabilités sur l'espace de Banach séparable B est équitendue si et seulement si*

i) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie L bornée de B telle que pour toute $\mu \in \mathcal{F}$, $\mu(L) \geq 1 - \varepsilon$;

ii) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un s.e.v. de dimension finie F_ε tel que pour toute $\mu \in \mathcal{F}$, $\mu\{x \in B;\ d(x, F_\varepsilon) < \varepsilon\} \geq 1 - \varepsilon$.

Pour la preuve, voir Ledoux Talagrand lemme 2.2 p. 40, ou démontrer ce théorème en exercice en s'appuyant sur le théorème 2.15. L'inconvénient du critère de plate concentration est qu'il n'est pas constructif : comment exhiber le F_ε ? comment contrôler $d(x, F_\varepsilon)$? Avec les espaces Schauder-décomposables, on se donne *a priori* une famille de s.e.v. d'approximation jouant le même rôle que les F_ε, ce sont les V_j. Les notations sont celles de la définition 2.16.

Théorème 2.20 (c.n.s. d'équitension dans un Schauder décomposable)**.** *Soit B un espace de Banach séparable admettant une décomposition de Schauder. Soit $\mathcal{R}$ une famille de probabilités sur la tribu borélienne de B et $E_j\mathcal{R}$ la famille des mesures images sur la tribu borélienne de V_j :*

$$E_j\mathcal{R} = \{\mu \circ E_j^{-1};\ \mu \in \mathcal{R}\}.$$

Alors $\mathcal{R}$ est équitendue si et seulement si :

i) Pour tout $j \in \mathbb{N}$, $E_j\mathcal{R}$ est équitendue sur V_j ;

ii) Pour tout $\varepsilon > 0$, $\lim_{j\to+\infty} \sup_{\mu\in\mathcal{R}} \mu(x \in B;\ \|x - E_jx\| > \varepsilon) = 0$.

Preuve du théorème 2.20.

Suffisance de i) et ii). Soit $\delta > 0$ fixé. Posons $\delta_l = 2^{-l}\delta$, $l \geq 1$ et choisissons une suite ε_l tendant vers 0 en décroissant. Par ii), pour tout $l \geq 1$, il existe un indice j_l tel que

$$\forall \mu \in \mathcal{R}, \quad \mu(x \in B;\ \|x - E_{j_l}x\| > \varepsilon_l) < \delta_l. \tag{2.16}$$

On peut bien sûr s'arranger pour que la suite (j_l) soit croissante. Par i) il existe alors un compact K_l de V_{j_l} (comme V_{j_l} est un s.e.v. fermé de B, K_l est aussi un compact de B) tel que :

$$\forall \mu \in \mathcal{R}, \quad \mu(x \in B;\ E_{j_l}x \notin K_l) < \delta_l. \tag{2.17}$$

De (2.16) et (2.17) on déduit que :

$$\forall \mu \in \mathcal{R}, \quad \mu\Big(\bigcup_{l\geq 1}\{x \in B;\ \|x - E_{j_l}x\| > \varepsilon_l \text{ ou } E_{j_l}x \notin K_l\}\Big) \leq \sum_{l=1}^{+\infty} 2\delta_l = 2\delta,$$

puis

$$\forall \mu \in \mathcal{R}, \quad \mu\Big(\bigcap_{l\geq 1}\{x \in B;\ \|x - E_{j_l}x\| \leq \varepsilon_l \text{ et } E_{j_l}x \in K_l\}\Big) \geq 1 - 2\delta. \tag{2.18}$$

Vérifions enfin que

$$K := \bigcap_{l\geq 1}\{x \in B;\ \|x - E_{j_l}x\| \leq \varepsilon_l \text{ et } E_{j_l}x \in K_l\}$$

est un compact de B. En raison de la continuité des E_j, il est fermé comme intersection de fermés. Sa relative compacité découle du théorème 2.18 : on vérifie facilement que dans la preuve de ce théorème on peut sans dommage remplacer la suite (V_j) par une sous-suite (V_{j_l}). Ainsi (2.18) nous donne l'équitension de $\mathcal{R}$. □

Nécessité de i). Supposons $\mathcal{R}$ équitendue :

$$\forall\varepsilon > 0, \quad \exists K \text{ compact de } B;\ \inf_{\mu\in\mathcal{R}} \mu(K) > 1-\varepsilon.$$

Alors $K_j := E_jK$ est compact dans V_j puisque E_j est continue et

$$\mu\circ E_j^{-1}(K_j) = \mu(E_j^{-1}(E_jK)) = \mu(x\in B;\ E_jx\in E_jK) \geq \mu(K) > 1-\varepsilon,$$

en notant que $\{x\in B;\ E_jx\in E_jK\}$ contient K. □

Nécessité de ii). Par le théorème de Prokhorov, l'équitension de $\mathcal{R}$ implique sa relative compacité pour la topologie faible (donnée par la définition 2.1). Comme $\sup_{\mu\in\mathcal{R}} \leq \sup_{\mu\in\overline{\mathcal{R}}}$, il est clair que l'on peut se ramener sans perte de généralité à prouver que la *compacité* de $\mathcal{R}$ implique ii). Pour cela nous utilisons le lemme suivant.

Lemme 2.21. *Soit $\mathcal{R}$ une famille compacte (pour la topologie faible) de probabilités sur l'espace métrique séparable S. Soit $(F_j)_{j\geq 1}$ une suite de fermés de S, décroissant vers $\emptyset$. Définissons les fonctions u_j, $j\geq 1$ par :*

$$u_j :\ \mu\mapsto\mu(F_j).$$

Alors la suite $(u_j)_{j\geq1}$ converge uniformément vers 0 sur $\mathcal{R}$.

Admettons pour l'instant ce lemme et appliquons le avec $S=B$ et :

$$F_j = \Big\{x\in B;\ \sup_{i\geq j}\|x-E_ix\|\geq\varepsilon\Big\} = N_j^{-1}([\varepsilon,+\infty[).$$

C'est bien un fermé en raison de la continuité de la semi norme $N_j(x)=\sup_{i\geq j}\|x-E_ix\|$. La suite $(F_j)_{j\geq1}$ est clairement décroissante. Pour x fixé on a $\lim_{i\to+\infty}\|x-E_ix\|=0$, donc aussi $\lim_{j\to+\infty}N_j(x)=0$, ce qui entraîne la vacuité de l'intersection des F_j. La convergence *uniforme sur* $\mathcal{R}$ vers 0 de $\mu(F_j)$ peut s'écrire sous la forme

$$\sup_{\mu\in\mathcal{R}}\mu\Big(\Big\{x\in B;\ \sup_{i\geq j}\|x-E_ix\|\geq\varepsilon\Big\}\Big)\xrightarrow[j\to+\infty]{}0,$$

ce qui implique ii) en raison de l'implication « $\|x-E_jx\|\geq\varepsilon \Rightarrow \sup_{i\geq j}\|x-E_ix\|\geq\varepsilon$ » et de sa traduction par une inclusion ensembliste. □

Preuve du lemme 2.21. Pour $\varepsilon>0$, définissons

$$D_{j,\varepsilon} := \{\mu\in\mathcal{R};\ u_j(\mu)\geq\varepsilon\}.$$

Montrons d'abord que $D_{j,\varepsilon}$ est un fermé dans l'espace des mesures de probabilité. La topologie faible sur les probabilités sur la tribu boréliennes de l'espace métrique *séparable* S étant métrisable, ceci peut se faire par les suites. On doit donc montrer que si (μ_n) est une suite convergente d'éléments de $D_{j,\varepsilon}$, sa limite μ est encore dans $D_{j,\varepsilon}$. Or d'après le point iii) du théorème d'Alexandrov, nous avons

$$u_j(\mu)=\mu(F_j)\geq\limsup_{n\to+\infty}\mu_n(F_j)=\limsup_{n\to+\infty}u_j(\mu_n)\geq\varepsilon,$$

donc μ est bien dans $D_{j,\varepsilon}$.

D'autre part la continuité monotone séquentielle des mesures de probabilité nous donne ici :

$$\forall \nu \in \mathcal{R}, \quad \lim_{j\to+\infty} \nu(F_j) = \nu(\emptyset) = 0.$$

La vacuité de l'intersection sur $j \geq 1$ des $D_{j,\varepsilon}$ en découle. Comme $\mathcal{R}$ est compacte on peut alors extraire de la famille de fermés $\{D_{j,\varepsilon},\ j \geq 1\}$ une sous-famille finie qui soit déjà d'intersection vide. Il existe donc un $j_0 \geq 1$ tel que $\cap_{j\leq j_0} D_{j,\varepsilon} = \emptyset$. Comme la suite $(D_{j,\varepsilon})_{j\geq 1}$ est décroissante, $D_{j,\varepsilon}$ est vide pour tout $j \geq j_0$, ce qui s'écrit :

$$\forall j \geq j_0,\ \forall \nu \in \mathcal{R}, \quad u_j(\nu) < \varepsilon.$$

□

La preuve du théorème 2.20 est maintenant complète. □

Chapitre 3

Éléments aléatoires gaussiens

3.1 Covariance

Nous allons définir l'opérateur de covariance d'un é.a. X dans le Banach B. Ceci généralise la notion de matrice de covariance d'un vecteur aléatoire en dimension finie.

Définition 3.1 (forme bilinéaire de covariance)**.** *Soit X un é.a. dans B, scalairement de carré intégrable, i. e. pour tout $f \in B'$, $\mathbf{E} f(X)^2 < +\infty$, et Pettis intégrable. On peut alors définir sur $B' \times B'$ la forme bilinéaire notée* $\operatorname{Cov} X$ *par*

$$\forall (f,g) \in B' \times B', \quad (\operatorname{Cov} X)(f,g) := \mathbf{E}\big(f(X - \mathbf{E}X) g(X - \mathbf{E}X)\big) = \operatorname{Cov}\big(f(X), g(X)\big), \tag{3.1}$$

où $\mathbf{E}X \in B$ désigne l'intégrale de Pettis de X. Cette forme bilinéaire est appelée covariance *de X.*

Proposition 3.2. *La covariance de X définie ci-dessus est une forme bilinéaire symétrique, positive, semi-définie et continue.*

Preuve. Seule la continuité n'est pas évidente. La continuité d'ne forme bilinéaire b sur $B' \times B'$ équivaut à l'existence d'une constante $C > 0$ telle que pour tout $(f,g) \in B' \times B'$, $|b(f,g)| \leq C \|f\|_{B'} \|g\|_{B'}$. Pour établir la continuité de $b = \operatorname{Cov} X$, on est naturellement tenté d'écrire :

$$\begin{aligned}
\big|(\operatorname{Cov} X)(f,g)\big| = \big|\operatorname{Cov}\big(f(X), g(X)\big)\big| &\leq \big(\operatorname{Var} f(X)\big)^{1/2} \big(\operatorname{Var} g(X)\big)^{1/2} && (3.2)\\
&\leq \big(\mathbf{E} f(X)^2\big)^{1/2} \big(\mathbf{E} g(X)^2\big)^{1/2} && (3.3)\\
&\leq \big(\mathbf{E}\|f\|_{B'}^2 \|X\|_B^2\big)^{1/2} \big(\mathbf{E}\|g\|_{B'}^2 \|X\|_B^2\big)^{1/2} && (3.4)\\
&= \big(\mathbf{E}\|X\|_B^2\big) \|f\|_{B'} \|g\|_{B'}. && (3.5)
\end{aligned}$$

Tout est correct dans ces inégalités : (3.2) n'est que Cauchy-Schwarz pour la covariance dea variables aléatoires *réelles* de carré intégrable $f(X)$ et $g(X)$, (3.3) provient de l'inégalité $\operatorname{Var} Z = \mathbf{E} Z^2 - (\mathbf{E} Z)^2 \leq \mathbf{E} Z^2$ vraie pour toute v.a. réelle Z de carré intégrable, (3.4) utilise la continuité de f et g et la croissance de l'espérance. Le *hic* c'est que l'on ne peut pas prendre $C := \mathbf{E}\|X\|_B^2$ car on ignore si cette espérance est finie. On sait seulement que X est *scalairement* de carré intégrable, ce qui est une hypothèse plus faible. Les inégalités ci-dessus donnent donc la continuité de $\operatorname{Cov} X$ lorsque $\mathbf{E}\|X\|_B^2 < +\infty$, mais il nous faut trouver une autre méthode dans le cas général. Pour cela on se branche sur (3.3) que l'on réécrit sous la forme

$$\bigl|(\operatorname{Cov} X)(f,g)\bigr| \leq \|f(X)\|_{L^2(\Omega)}\|g(X)\|_{L^2(\Omega)}. \tag{3.6}$$

Sous cette forme, on voit que la seule chose dont on ait besoin pour finir la preuve est la continuité de l'opérateur

$$T : B' \to L^2(\Omega), \quad f \longmapsto T(f) := f(X).$$

En effet en admettant cette continuité que nous justifierons ci-dessous, on a

$$\|f(X)\|_{L^2(\Omega)} = \|T(f)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|T\|_{\mathcal{L}(B',L^2(\Omega))}\|f\|_{B'},$$

d'où en posant $C := \|T\|^2_{\mathcal{L}(B',L^2(\Omega))} < +\infty$ et en reportant dans (3.6),

$$\bigl|(\operatorname{Cov} X)(f,g)\bigr| \leq C\|f\|_{B'}\|g\|_{B'}.$$

On complète la preuve avec le lemme suivant. □

Lemme 3.3. *Si X est un élément aléatoire de B scalairement de carré sommable, on peut lui associer l'opérateur*

$$T : B' \to L^2(\Omega), \quad f \longmapsto T(f) := f(X)$$

et cet opérateur est continu.

Preuve. La linéarité de T étant évidente, nous allons utiliser le théorème du graphe fermé en montrant que

$$\text{si} \quad f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{B'} f \quad \text{et} \quad T(f_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{L^2(\Omega)} Z, \quad \text{alors} \quad T(f) = Z.$$

Puisque $\bigl(T(f_n)\bigr)_{n\geq 1}$ converge au sens $L^2(\Omega)$ vers la variable aléatoire réelle Z, on peut en extraire une sous suite $\bigl(T(f_n)\bigr)_{n\in I}$, avec I partie infinie de $\mathbb{N}$, telle que

$$T(f_n) \xrightarrow[n\in I, n\to+\infty]{\text{p.s.}} Z. \tag{3.7}$$

D'autre part pour tout $\omega \in \Omega$,

$$|f_n(X(\omega)) - f(X(\omega))| \leq \|f_n - f\|_{B'}\|X(\omega)\|_B$$

et ce majorant tend vers 0 puisque f_n converge vers f dans B'. Ceci nous donne :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad T(f_n)(\omega) \xrightarrow[n\to+\infty]{} Z(\omega). \tag{3.8}$$

En comparant (3.7) et (3.8), on en déduit que $Z = T(f)$ presque sûrement, ce qui est bien l'égalité dans $L^2(\Omega)$, espace des classes d'équivalence des v.a.r. de carré intégrable modulo l'égalité P-presque-sûre. □

Définition 3.4 (opérateur de covariance)**.** *Si l'élément aléatoire X est scalairement de carré intégrable, on peut lui associer « son opérateur de covariance » noté R (ou R_X si besoin) défini par :*

$$\begin{aligned} R : B' \to B'', \quad f \mapsto Rf, \quad Rf : B' \to \mathbb{R}, \quad g \mapsto (Rf)(g), \\ (Rf)(g) := (\operatorname{Cov} X)(f, g) = \operatorname{Cov}\big(f(X), g(X)\big). \end{aligned} \tag{3.9}$$

Autrement dit, pour tout $f \in B'$, $Rf = (\operatorname{Cov} X)(f, \,.\,)$.

On peut montrer que si B est séparable, $R(B') \subset J(B)$. Dans ce cas on peut considérer R comme un opérateur de B' dans B. Cette définition utilise implicitement la continuité de Rf sur B' (*via* l'appartenance de Rf à B''). La justification est fournie ci-dessous.

Proposition 3.5 (propriétés de l'opérateur de covariance)**.** *Tout opérateur de covariance R vérifie :*

a) R est continu sur B' ;

b) R est autoadjoint : $\forall f, g \in B'$, $\langle f, Rg\rangle_{B',B''} = \langle g, Rf\rangle_{B',B''}$;

c) R est positif : $\forall f \in B'$, $\langle f, Rf\rangle_{B',B''} \geq 0$;

d) si X et Y sont des é.a. indépendants et scalairement de carré intégrable, $R_{X+Y} = R_X + R_Y$.

Preuve. Pour le a), on utilise le lemme 3.3 qui nous donne par continuité de T :

$$|(Rf)(g)| = \big|\operatorname{Cov}\big(f(X), g(X)\big)\big| \leq \|T\|^2_{\mathcal{L}(B',L^2(\Omega))} \|f\|_{B'} \|g\|_{B'}.$$

On en déduit d'abord que la forme linéaire Rf sur B' est continue, ce qui justifie *a posteriori* l'appartenance de Rf à B'' admise implicitement dans la définition 3.4. De plus la norme de cette forme linéaire continue vérifie

$$\|Rf\|_{B''} \leq \|T\|^2_{\mathcal{L}(B',L^2(\Omega))} \|f\|_{B'}.$$

Cette inégalité étant vraie pour toute $f \in B'$, on en déduit que l'application linéaire $R : B' \to B''$ est continue et que

$$\|R\|_{\mathcal{L}(B',B'')} \leq \|T\|^2_{\mathcal{L}(B',L^2(\Omega))}.$$

Le b) est évident puisque $(Rf)(g) = \operatorname{Cov}\big(f(X), g(X)\big)$ et que cette dernière expression est symétrique en f et g. Pour le c), on note que $(Rf)(f) = \operatorname{Var}\big(f(X)\big) \geq 0$.

Pour vérifier le d), on prend f et g quelconques dans B' et on écrit que

$$\big(R_{X+Y} f\big)(g) = \operatorname{Cov}\big(f(X+Y), g(X+Y)\big) = \operatorname{Cov}\big(f(X) + f(Y), g(X) + g(Y)\big).$$

Ensuite on développe en utilisant la bilinéarité de Cov et l'indépendance des v.a. réelles $f(X)$ et $g(Y)$, héritée de celle de X et Y, donc la nullité de leur covariance, pour arriver à $\big(R_{X+Y} f\big)(g) = (R_X f)(g) + R_Y f)(g)$. $\square$

Exemple 3.6 (covariance dans les espaces ℓ^p ou c_0)**.**

Exemple 3.7 (covariance dans un espace de Banach fonctionnel)**.**

3.2 Élément aléatoire gaussien

On suppose désormais B séparable. La définition des éléments aléatoires gaussiens est la même que celle des vecteurs aléatoires gaussiens en dimension finie, à ceci près que l'on se limite aux formes linéaires *continues* (elles le sont toutes en dimension finie).

Définition 3.8 (élément aléatoire gaussien)**.** *L'élément aléatoire X dans B est dit* gaussien *si pour toute $f \in B'$, la variable aléatoire réelle $f(X)$ est gaussienne (éventuellement gaussienne dégénérée, i. e. constante p.s.).*

Remarque 3.9. Compte-tenu des propriétés des lois gaussiennes en dimension 1, il découle immédiatement de cette définition que la famille des é.a. gaussiens dans B est stable par addition d'un élément constant (*i. e.* non aléatoire) de B, multiplication par un scalaire constant et addition d'é.a. indépendants.

Nous montrerons à la fin de ce chapitre (théorème de Fernique) que les é.a. gaussiens ont des propriétés d'intégrabilité très fortes. En attendant nous aurons besoin pour démarrer leur étude de la propriété beaucoup plus faible de Pettis intégrabilité.

Proposition 3.10 (Pettis intégabilité)**.** *Tout é.a. gaussien dans l'espace de Banach séparable B est Pettis intégrable.*

Preuve. Soit X un é.a. gaussien dans B. Pour établir sa Pettis intégrabilité, il suffit d'après le théorème 1.25 de vérifier que pour un certain $\varepsilon > 0$,

$$\inf_{f \in B'} P\big(|f(X)| \geq \varepsilon |\mathbf{E} f(X)|\big) > 0. \tag{3.10}$$

Pour toute $f \in B'$, la variable aléatoire réelle $f(X)$ est gaussienne $\mathfrak{N}(m, \sigma)$ avec $m = \mathbf{E} f(X)$ et $\sigma^2 = \operatorname{Var} f(X)$. Il est facile de voir que si Z est une v.a. de loi $\mathfrak{N}(m, \sigma)$, on a toujours $P(|Z| \geq |m|) \geq 1/2$, y compris dans le cas dégénéré $\sigma = 0$ où $Z = m$ presque-sûrement. En appliquant cette remarque à $Z = f(X)$ pour f quelconque dans B', on en déduit que

$$\inf_{f \in B'} P\big(|f(X)| \geq \varepsilon |\mathbf{E} f(X)|\big) \geq \frac{1}{2} > 0,$$

ce qui nous donne (3.10) avec $\varepsilon = 1$. $\square$

Dans la suite nous notons $\mathbf{E}X$ l'intégrale de Pettis de X. On dit que X est « centré » si $\mathbf{E}X = 0$.

Proposition 3.11. *Si X est un é.a. gaussien, il a une covariance et sa loi est entièrement déterminée par $\mathbf{E}X$ et $\operatorname{Cov} X$ (ou R_X).*

Preuve. Dire que X a une covariance, c'est dire qu'il est scalairement de carré intégrable. Or $f(X)$ étant une v.a. réelle gaussienne pour toute $f \in B'$, $f(X)$ est de carré intégrable. D'autre part $\mathbf{E}X$ existe (au moins) comme intégrale de Pettis d'après la proposition 3.10.

La loi de X est carctérisée par sa fonctionnelle caractéristique, cf. corollaire 1.6

$$\varphi_X : B' \to \mathbb{C}, \quad f \mapsto \varphi_X(f) = \mathbf{E} \exp\big(if(X)\big).$$

On remarque que $\varphi_X(f) = \varphi_{f(X)}(1)$, en notant $\varphi_{f(X)}$ la fonction caractéristique de la variable aléatoire réelle $f(X)$. Cette dernière étant gaussienne, on sait que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi_{f(X)} = \exp\Big(imt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}\Big), \quad \text{avec } m := \mathbf{E} f(X),\ \sigma^2 := \operatorname{Var} f(X).$$

En utilisant la Pettis intégabilité de X et la définition de $\operatorname{Cov} X$, on en déduit que

$$\begin{aligned}
\forall f \in B', \quad \varphi_X(f) = \varphi_{f(X)}(1) &= \exp\Big(i\mathbf{E} f(X) - \frac{1}{2}\operatorname{Var} f(X)\Big)\\
&= \exp\Big(if(\mathbf{E}X) - \frac{1}{2}(\operatorname{Cov})(f,f)\Big)\\
&= \exp\Big(if(\mathbf{E}X) - \frac{1}{2}(R_X f)(f)\Big)\\
&= \exp\Big(i\langle f, \mathbf{E}X\rangle_{B',B} - \frac{1}{2}\langle R_X f, f\rangle_{B'',B'}\Big).
\end{aligned}$$

On voit ainsi que la loi de X ne dépend que des deux paramètres (infinidimensionnels) $\mathbf{E}X$ et $\operatorname{Cov} X$, ou $\mathbf{E}X$ et R_X. □

En dimension finie, si X est un vecteur aléatoire dont les composantes sont de carré intégrable (donc si X est scalairement de carré intégrable), il est bien connu qu'il existe un vecteur aléatoire *gaussien* ayant même covariance que X, *i. e.* même matrice de covariance. Cette propriété *n'est plus vraie en général en dimension infinie.* Ce fait est même une des caractéristiques essentielles de la théorie des probabilités dans les espaces de Banach. Voici un célèbre contre exemple qui nous servira aussi dans l'étude du théorème limite central.

Exemple 3.12 (un é.a. borné non prégaussien)**.** Dans l'espace $B = c_0$ des suites tendant vers 0 à l'infini, considérons l'élément aléatoire X donné par

$$X = \left(\frac{\epsilon_k}{\sqrt{2\ln(1+k)}}\right)_{k\geq 1},$$

où les ϵ_k forment une suite de Rademacher *i. e.* sont indépendantes et de même loi discrète donnée par $P(\epsilon_k = -1) = P(\epsilon_k = 1) = 1/2$. On a clairement

$$\|X\|_{c_0} = \sup_{k\geq 1} \frac{|\epsilon_k|}{\sqrt{2\ln(1+k)}} = \frac{1}{\sqrt{2\ln 2}} < +\infty,$$

donc X est Bochner intégrable et *a fortiori* Pettis intégrable. Comme X est bornée, les v.a. $f(X)$ le sont aussi et sont donc de carré intégrable. Ainsi X est scalairement de carré intégable et sa covariance existe.

Rappelons que le dual topologique de c_0 peut s'identifier à ℓ^1, la forme de dualité étant donnée par

$$\forall f \in \ell^1, \forall x \in c_0, \quad \langle f, x\rangle_{\ell^1, c_0} = \sum_{k=1}^{+\infty} x_k f_k, \quad \text{avec } \sum_{k=1}^{+\infty} |f_k| < +\infty \text{ et } \sup_{k\geq 1} |x_k| < +\infty.$$

D'après l'expression de la covariance dans c_0 vue à l'exemple 3.6, on a pour toutes $f = (f_k)_{k\geq 1}$ et $g = (g_k)_{k\geq 1}$ dans ℓ^1,

$$(\operatorname{Cov} X)(f, g) = \sum_{j,k=1}^{+\infty} \frac{f_j g_k}{2\sqrt{\ln(1+j)\ln(1+k)}} \operatorname{Cov}(\epsilon_j, \epsilon_k).$$

Par indépendance des ϵ_j, $\operatorname{Cov}(\epsilon_j, \epsilon_k) = 0$ si $j \neq k$. De plus $\operatorname{Var} \epsilon_j = \mathbf{E}\epsilon_j^2 = \frac{1}{2}(-1)^2 + \frac{1}{2}(1)^2 = 1$, d'où

$$\forall f, g \in \ell^1, \quad (\operatorname{Cov} X)(f, g) = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{f_j g_j}{2\ln(1+j)}.$$

Ceci nous montre que la covariance de X est donnée par la matrice infinie de terme général

$$\operatorname{Cov}(X_j, X_k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq j, \\ \frac{1}{2\ln(1+j)} & \text{si } k = j. \end{cases}$$

Suppsons maintenant qu'il existe une élément aléatoire *gaussien* $Y = (Y_k)_{k\geq 1}$ de c_0 ayant même covariance que X. Quitte à lui retrancher $\mathbf{E}Y$, on peut toujours supposer que Y est centré. La covariance de Y est donnée par la même matrice infinie que celle de X. On en déduit que les v.a. *gaussiennes* Y_j sont indépendantes et que la loi de Y_j est

$$P_{Y_j} = \mathfrak{N}\left(0, \frac{1}{2\ln(1+j)}\right).$$

Nous allons montrer grâce au deuxième lemme de Borel-Cantelli[1] que

$$\limsup_{n\to+\infty} Y_n \geq 1 \text{ p.s.} \tag{3.11}$$

Pour celà, on réécrit les Y_j sous la forme

$$Y_j = \frac{1}{\sqrt{2\ln(1+j)}} Z_j, \quad \text{avec } P_{Z_j} = \mathfrak{N}(0, 1)$$

et on utilise la minoration classique

$$\forall t > 1, \quad P(Z_j \geq t) \geq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t^3}\right) \exp\left(\frac{-t^2}{2}\right).$$

1. Si les A_j sont des évènements indépendants tels que $\sum_{j\geq 1} P(A_j) = +\infty$, alors $P(\limsup A_n) = P(\text{réalisation d'une infinité de } A_n) = 1$.

Notons que pour $j \geq 1$, $\sqrt{2\ln(1+j)} \geq \sqrt{2\ln 2} > 1$, d'où

$$P(Y_j \geq 1) = P\big(Z_j \geq \sqrt{2\ln(1+j)}\big) \geq \frac{1}{\sqrt{4\pi\ln(1+j)}}\Big(1 - \frac{1}{\ln(1+j)}\Big)\exp(-\ln(1+j)).$$

Ce minorant étant équivalent quand j tend vers l'infini à $(4\pi)^{-1/2}j^{-1}(\ln j)^{-1/2}$, on en déduit que la série de terme général $P(Y_j \geq 1)$ diverge. Donc d'après le deuxième lemme de Borel-Cantelli, il existe un evènement Ω' de probabilité 1 tel que pour tout $\omega \in \Omega'$, la suite de réels $(Y_j(\omega))_{j\geq 1}$ possède une sous-suite infinie ayant tous ses termes strictement supérieurs à 1, cette sous-suite dépendant de ω. Pour tout $\omega \in \Omega'$, on a donc $\limsup_{j\to+\infty} Y_j(\omega) \geq 1$. Et comme $P(\Omega') = 1$, on en déduit (3.11). Évidemment (3.11) est contradictoire avec l'appartenance de Y à c_0. Il n'existe donc aucun é.a. gaussien dans c_0 ayant même covariance que X.

Définition 3.13 (é.a. prégaussien)**.** *On dit que l'élément aléatoire X du banach B est* prégaussien dans B *s'il existe un é.a. gaussien Y dans B ayant même covariance que X.*

Exemple 3.14 (caractérisation des é.a. prégaussiens dans ℓ^p)**.**

Exemple 3.15 (caractérisation des é.a. prégaussiens dans $L^p(\mu)$)**.**

3.3 Intégrabilité des é.a. gaussiens

Le but de cette section est de démontrer le résultat suivant.

Théorème 3.16 (Fernique)**.** *Si X est un é.a. gaussien centré dans B, il existe un réel $a > 0$ tel que*

$$\mathbf{E}\exp\big(a\|X\|^2\big) < +\infty. \tag{3.12}$$

Corollaire 3.17. *Si X est un é.a. gaussien centré dans B, la v.a. réelle $\|X\|$ a des moments finis de tout ordre. En particulier X est Bochner intégrable et $\mathbf{E}\|X\|^2 < +\infty$.*

La première étape dans la preuve du théorème 3.16 est la caractérisation des lois gaussiennes par la propriété d'invariance rotatoire [2]

Proposition 3.18 (caractérisation des gaussiennes par invariance rotatoire)**.** *L'é.a. X dans B est gaussien centré si et seulement si pour tous X_1 et X_2 indépendants et de même loi que X, tous réels s, t vérifiant $s^2 + t^2 = 1$, les é.a.*

$$Y_1 := sX_1 + tX_2 \quad \text{et} \quad Y_2 := tX_1 - sX_2$$

sont indépendants et de même loi que X.

Preuve du théorème de Fernique. Soit X un é.a. gaussien centré dans B. On veut montrer l'existence d'un $a > 0$ tel que $\mathbf{E}\exp\big((a\|X\|^2\big) < +\infty$.

2. Souvent appelée aussi « invariance rotationnelle ».

Première étape. On montre grâce à la proposition 3.18 que

$$\forall s \in \mathbb{R},\ \forall t > s, \quad P(\|X\| \leq s)P(\|X\| > t) \leq P\Big(\|X\| > \frac{t-s}{\sqrt{2}}\Big)^2. \tag{3.13}$$

Soit Y une copie indépendante de X. Par la proposition 3.18, les é.a. $2^{-1/2}(X+Y)$ et $2^{-1/2}(X-Y)$ ont même loi que X, d'où

$$P(\|X\| \leq s)P(\|X\| \leq t) = P\big(\|X-Y\| \leq s\sqrt{2}\big)P\big(\|X+Y\| > t\sqrt{2}\big).$$

On sait de plus que $2^{-1/2}(X+Y)$ et $2^{-1/2}(X-Y)$ sont indépendantes, d'où

$$P(\|X\| \leq s)P(\|X\| > t) = P\big(\|X-Y\| \leq s\sqrt{2} \text{ et } \|X+Y\| > t\sqrt{2}\big). \tag{3.14}$$

Par inégalité triangulaire, on a toujours $\|X+Y\| - \|X-Y\| \leq 2\|X\|, 2\|Y\|$, donc *sur l'évènement* $\big\{\|X-Y\| \leq s\sqrt{2} \text{ et } \|X+Y\| > t\sqrt{2}\big\}$, on a :

$$t\sqrt{2} - s\sqrt{2} < 2\|X\| \quad \text{et} \quad t\sqrt{2} - s\sqrt{2} < 2\|Y\|,$$

ce qui justifie l'inclusion

$$\big\{\|X-Y\| \leq s\sqrt{2} \text{ et } \|X+Y\| > t\sqrt{2}\big\} \subset \big\{\|X\| > 2^{-1/2}(t-s) \text{ et } \|Y\| > 2^{-1/2}(t-s)\big\}.$$

En reportant ceci dans (3.14) et en utilisant le fait que X et Y sont indépendantes et de même loi, on en déduit (3.13). □

Deuxième étape. On contrôle la vitesse de convergence vers zéro de $P(\|X\| > t_n)$ pour une certaine suite t_n à croissance exponentielle. Dans (3.13) fixons s assez grand pour que

$$P(\|X\| \leq s) = q > \frac{1}{2}. \tag{3.15}$$

Définissons maintenant la suite $(t_n)_{n\geq 0}$ par

$$t_0 := s, \quad \text{et } \forall n \geq 1,\ t_n = s + 2^{1/2}t_{n-1}.$$

En prenant $t = t_n$ dans (3.13), on a donc

$$qP(\|X\| > t_n) \leq P\Big(\|X\| > \frac{t_n - s}{\sqrt{2}}\Big)^2 = P(\|X\| > t_{n-1})^2.$$

Posons pour alléger $u_n := P(\|X\| > t_n)$ et $c := 1/q$. La suite (u_n) vérifie l'inégalité $u_n \leq cu_{n-1}^2$. Regardons ce que donne l'itération de cette inégalité.

$$u_n \leq cu_{n-1}^2 \leq c(cu_{n-2}^2)^2 = c^{1+2}u_{n-2}^4 \leq c^{1+2}(cu_{n-3}^2)^4 = c^{1+2+4}u_{n-3}^8 \leq c^{1+2+4+8}u_{n-4}^{16} \leq \dots$$

On voit ainsi au bout de n itérations que

$$u_n \leq c^{1+2+2^2+\dots+2^{n-1}}(u_0)^{2^n} = c^{2^n-1}u_0^{2^n} = q\Big(\frac{u_0}{q}\Big)^{2^n}.$$

Rappelons que $u_0 = P(\|X\| > s) = 1 - q$ et $q > 1/2$, d'où

$$P(\|X\| > t_n) \leq qr^{2^n} \quad \text{avec } r := \frac{1-q}{q} < 1. \tag{3.16}$$

□

Troisième étape. On utilise la suite t_n pour découper une expression en intégrale $\int_0^{+\infty}$ de $\mathbf{E}\exp(a\|X\|^2)$ et on montre que la série majorante obtenue converge dans $\mathbb{R}_+$ pour un choix convenable de a. On vérifie facilement (exercice) que si $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est croissante et C^1, on a pour toute v.a. positive Z

$$\mathbf{E}h(Z) = \int_0^{+\infty} h'(t)P(Z > t)\,\mathrm{d}t + h(0).$$

En appliquant ceci avec $h(t) = \exp(at^2)$ et $Z = \|X\|$, on obtient

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\exp(a\|X\|^2) &= 2a\int_0^{+\infty} t\exp(at^2)P(\|X\| > t)\,\mathrm{d}t + 1 \\ &\leq 1 + 2as^2\exp(as^2) + 2a\int_s^{+\infty} t\exp(at^2)P(\|X\| > t)\,\mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{3.17}$$

On est ainsi ramenés à majorer l'intégrale généralisée I apparaissant dans (3.17). En rappelant que (t_n) est croissante et $t_0 = s$, on a

$$I = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{t_n}^{t_{n+1}} t\exp(at^2)P(\|X\| > t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{n=0}^{+\infty} t_{n+1}(t_{n+1} - t_n)\exp(at_{n+1}^2)P(\|X\| > t_n).$$

On vérifie facilement que

$$t_n = s\bigl(1 + 2^{1/2} + \cdots + 2^{n/2}\bigr) = s\frac{2^{(n+1)/2} - 1}{2^{1/2} - 1},$$

d'où

$$t_{n+1} \leq bs2^{n/2} \quad \text{avec } b = 2(2^{1/2} - 1)^{-1}. \tag{3.18}$$

D'autre part,

$$t_{n+1} - t_n = 2^{1/2}(t_n - t_{n-1}) = \cdots = 2^{n/2}(t_1 - t_0) = 2^{(n+1)/2}s. \tag{3.19}$$

En reportant (3.16), (3.18) et (3.19) dans la série majorant I, on obtient

$$I \leq 2^{1/2}bqs^2 \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n \exp(ab^2s^2 2^n) r^{2^n} = 2^{1/2}bqs^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \exp\bigl(2^n(ab^2s^2 + \ln r + n2^{-n}\ln 2)\bigr).$$

Rappelons que $r < 1$, donc $\ln r$ est négatif. En prenant $a < a_0 := -\ln r/(b^2s^2)$, la série ci-dessus converge. □

On en conclut que pour tout $a < a_0$, $\mathbf{E}\exp(a\|X\|^2) < +\infty$. □

Table des matières