Université Lille1
Sciences et Technologies

U.F.R. de Mathématiques
Licence de Mathématiques
S6, M66, année 2013-2014

Probabilités, fiche de T.D. n° 6

Ex 1. *Convergence en loi dans $\mathbb{N}$*

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1) Montrez que si $(X_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire réelle X, alors $P(X \in \mathbb{N}) = 1$ et $P(X_n = k)$ converge vers $P(X = k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. *Indications.* On pourra utiliser la définition fonctionnelle de la convergence en loi avec la fonction en dents de scie $g_j = \sum_{k\in\mathbb{N}} g_{j,k}$ où $g_{j,k}$ désigne la fonction triangle isocèle de base $[k-2^{-j}, k+2^{-j}]$ et de sommet $(k, 1)$. On pourra alternativement utiliser la définition de la convergence en loi par les fonctions de répartition.

2) On suppose désormais que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(X_n = k)$ converge vers un réel a_k (nécessairement positif). Montrez que la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k$ converge et a une somme inférieure ou égale à 1.

3) Montrez que si $\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k = 1$, alors X_n converge en loi vers une variable aléatoire X dont la loi P_X vérifie pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P_X(\{k\}) = a_k$ et donc $P_X(\mathbb{N}) = 1$.

4) Montrez que si $\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k < 1$, X_n ne peut converger en loi. Donnez un exemple de cette situation.

5) Reformulez les théorèmes de convergence de la loi hypergéométrique vers la loi binomiale et de convergence de la loi binomiale vers la loi de Poisson en termes de convergence en loi.

Ex 2. *Questions élémentaires sur la convergence en loi*

1) Montrez que si X_n converge en loi vers une constante c, elle converge aussi en probabilité.

2) Soit $(U_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires où chaque U_n suit la loi uniforme sur l'ensemble fini $\{k/n,\, k \in [\![1, n]\!]\}$. Étudiez la convergence en loi de U_n, de deux façons : avec la définition par les f.d.r. et avec celle par les moments fonctionnels.

3) Soit $(U_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires où chaque U_n suit la loi uniforme sur l'intervalle $[1, 1 + 1/n]$. Étudiez la convergence en loi de U_n.

4) Soit $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires gaussiennes de loi $\mathfrak{N}(0, \sigma_n)$, avec σ_n tendant vers l'infini. Étudiez la convergence de la suite des fonctions de répartitions. Y a-t-il convergence en loi ?

Ex 3. *Centrage, normalisation et convergences*

Soit $(c_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de réels tendant vers $+\infty$, a une constante et $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires telle que $c_n(Y_n - a)$ converge en loi.

1) Montrez qu'une fonction de répartition quelconque a des points de continuité aussi grands que l'on veut en valeur absolue.

2) Montrez que Y_n converge en probabilité vers a.

3) Application : le théorème de de Moivre-Laplace implique la loi faible des grands nombres pour les fréquences.

Ex 4. *La cantine*

Une entreprise emploie 500 personnes qui déjeunent à la cantine à l'un ou l'autre des deux services avec une probabilité égale de manger au premier ou au second. Si le gérant veut avoir une probabilité supérieure à 95 % de disposer d'assez de couverts, combien devra-t-il en prévoir pour chacun des deux services ?
Indication. On numérote les 500 personnes par ordre alphabétique (ou n'importe quel ordre ne dépendant pas de l'ordre d'arrivée au restaurant !). On note X_i la variable aléatoire valant 1 si la i^{e} personne de la liste mange au premier service, 0 si elle mange au deuxième. Exprimer l'évènement dont on cherche à minorer la probabilité à l'aide de $S_n = \sum_{i=1}^{500} X_i$.

Ex 5. *Cumul d'erreurs*

Un programme de calcul utilise J chiffres significatifs après la virgule et arrondit tous les résultats d'opérations à ce format (donc à $\frac{1}{2} \times 10^{-J}$ près). On suppose qu'il effectue 10^6 opérations élémentaires successives, que les erreurs commises pour chacune sont indépendantes, de loi uniforme sur l'intervalle $[-\frac{1}{2} \times 10^{-J} ; \frac{1}{2} \times 10^{-J}]$ et que l'erreur sur le résultat final est la somme des erreurs commises sur chaque opération. Évaluer la probabilité pour que l'erreur finale soit inférieure ou égale en valeur absolue à $\frac{1}{2} \times 10^{-J+3}$.

Ex 6. *Surcharge au décollage*

Un avion a une charge maximum au décollage (hors kérosène) de 25 tonnes. Il embarque 318 personnes et leurs bagages (équipage compris). La masse X_i du i^{e} individu embarqué est une v.a. d'espérance 65 kg et d'écart-type 10 kg. La masse de ses bagages est une v.a. Y_i d'espérance 12 kg et d'écart-type 2 kg.

1) Évaluez la probabilité d'une surcharge au décollage en précisant les hypothèses d'indépendance que vous serez amenés à utiliser.

2) On rappelle que la somme de deux v.a. indépendantes Z_1 et Z_2 de lois gaussiennes respectives $\mathfrak{N}(m_1, \sigma_1)$ et $\mathfrak{N}(m_2, \sigma_2)$ est encore une v.a. gaussienne. Déterminez ses paramètres.

3) La charge maximale de 25 tonnes a été déterminée en tenant compte d'une masse volumique moyenne du kérosène de 0,8 kg/l. En réalité la masse volumique du kérosène peut varier entre 0,755 kg/l et 0,845 kg/l. Du fait des avitaillements [1] successifs d'un aéroport à l'autre, il est impossible de prévoir assez à l'avance la masse volumique du kérosène embarqué pour un vol donné. On est donc amené à modéliser cette masse volumique par une variable aléatoire gaussienne d'espérance 0,8 kg/l et d'écart-type 0,011 kg/l. Commentez ce choix.

4) Les données techniques concernant l'avion sont les suivantes. Masse maximale au décollage 269 tonnes, masse à vide 120 tonnes, volume des réservoirs de kérosène 152 500 litres. En supposant que la densité du kérosène et la masse des personnes embarquées et de leurs bagages sont indépendantes, recalculez la probabilité de surcharge au décollage.

Ex 7. *Records et loi des grands nombres*

On note X une variable aléatoire positive dont la loi vérifie $P(X > t) = t^{-r}$ pour tout réel $t \geqslant 1$. Dans tout l'exercice, on suppose que la constante r est dans $]0, 1[$.

1. Avitaillement : ravitaillement d'un avion en carburant.

On note $(X_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires positives définies sur le même espace probabilisé, indépendantes, de même loi que X et on pose :

$$M_n := \max_{1\leqslant k\leqslant n} X_k, \qquad S_n := \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

1) Que vaut $P(X > 1/2)$? Que vaut $\mathbf{E}X$?

2) Calculez la fonction de répartition de M_n.

3) Montrez que $n^{-1/r}M_n$ converge en loi, quand n tend vers l'infini, vers une variable aléatoire positive Z dont vous donnerez la fonction de répartition.

4) Justifiez la convergence de série à termes positifs :

$$\forall\delta > 0, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \exp(-n^{\delta}) < +\infty.$$

5) Soit a une constante telle que $0 < a < 1/r$. Montrez que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(M_n \leqslant n^a) < +\infty.$$

6) En déduire que presque-sûrement $M_n > n^a$ pour tout $n \geqslant N$, où N est un rang aléatoire.

7) En prenant $a > 1$, en déduire que

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} +\infty.$$

Ceci contredit-il la loi forte des grands nombres ?

8) Montrez qu'en fait

$$\frac{S_n}{n^c} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} +\infty,$$

pour tout exposant c tel que $0 < c < 1/r$.

Ex 8. *Une invariance en loi caractéristique*

On considère la variable aléatoire X (non p.s. constante) et une suite $(X_k)_{k\geqslant 1}$ de variables aléatoires indépendantes et de même loi que X. On suppose de plus que X est de carré intégrable et que

$$\frac{1}{\sqrt{2}}X_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}X_2 \text{ a même loi que } X. \tag{1}$$

Le but de cet exercice est de montrer que ces propriétés caractérisent une loi classique.

1) Montrez que nécessairement, $\mathbf{E}X = 0$.

2) Expliquez pourquoi

$$T_n := 2^{-n/2}\sum_{k=1}^{2^n} X_k$$

a même loi que X.

3) On pose $\sigma^2 = \mathbf{E}X^2$, $\sigma > 0$. Montrez que $\sigma^{-1}T_n$ converge en loi et précisez la loi limite. Même question pour T_n.

4) Quelle est la loi de X ?