Université Lille1
Sciences et Technologies

U.F.R. de Mathématiques
Licence de Mathématiques
S6, M66, année 2013-2014

Probabilités, fiche de T.D. n° 5

Ex 1. *Unicité de la limite en probabilité*

On veut vérifier que la limite en probabilité est unique modulo l'égalité presque-sûre. Pour cela on supposera que Y_n converge en probabilité vers Y *et* vers Y'.

1) Justifier pour tout $\varepsilon > 0$ l'inégalité :

$$P(|Y - Y'| > \varepsilon) \leq P\Big(|Y - Y_n| > \frac{\varepsilon}{2}\Big) + P\Big(|Y_n - Y'| > \frac{\varepsilon}{2}\Big).$$

2) En déduire la valeur de $P(|Y - Y'| > \varepsilon)$ et conclure.

Ex 2. *Convergence en probabilité et bornitude stochastique*

Montrez que si Y_n converge en probabilité vers une variable aléatoire Y, alors la suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ est *stochastiquement bornée*, c'est-à-dire :

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists c > 0,\ \forall n \geq 1, \quad P(|Y_n| > c) < \varepsilon.$$

Ex 3. *Convergence en probabilité et opérations*

Soient $(X_n)_{n\geq 1}$, $(Y_n)_{n\geq 1}$, X et Y des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. On suppose que X_n et Y_n convergent en probabilité vers X et Y respectivement.

1) Montrer que $X_n + Y_n$ converge en probabilité vers $X + Y$.

2) Montrer que $X_n Y_n$ converge en probabilité vers XY. *Indication* : commencer par montrer que pour tout $\delta > 0$, il existe un réel c et un entier n_0 tels que pour tout $n \geq n_0$, $P(|Y_n| > c) < \delta$.

Ex 4. *Convergences p.s. ou en probabilité et image continue*

Soient $(Y_n)_{n\geq 1}$ et Y des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé.

1) On suppose que Y_n converge en probabilité vers une constante c et que g est une fonction définie au voisinage de c et continue au point c. Montrez que $g(Y_n)$ converge en probabilité vers $g(c)$. On commencera par préciser la définition de $g(Y_n)$.

2) Même question pour la convergence presque-sûre.

3) On suppose maintenant que Y_n converge en probabilité vers Y et que g est continue sur $\mathbb{R}$. Montrez que $g(Y_n)$ converge en probabilité vers $g(Y)$. *Indication* : on pourra commencer par examiner le cas plus simple où g est *uniformément* continue sur $\mathbb{R}$. Pour passer au cas général, on pourra utiliser la bornitude stochastique.

4) Même question pour la convergence presque-sûre.

Ex 5. *Convergence en probabilité de gaussiennes*

Soit $(Y_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, gaussiennes de loi $\mathfrak{N}(c, \sigma_n)$, où la constante c ne dépend pas de n. Montrez que Y_n converge en probabilité vers c si et seulement si σ_n tend vers 0.

Ex 6. Soit $p \in]0,1[$ et $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi de Bernoulli de paramètre p. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$Y_n = X_n X_{n+1} \quad \text{et} \quad U_n = Y_1 + \cdots + Y_n.$$

1) Quelle est la loi de Y_n ($n \in \mathbb{N}^*$) ?

2) Pour quels couples (n, m) les variables Y_n et Y_m sont-elles indépendantes ?

3) Calculer l'espérance et la variance de U_n ($n \in \mathbb{N}^*$).

4) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\left|\frac{U_n}{n} - p^2\right| \geq \epsilon\right) = 0.$$

Ex 7. *Hasard et compensations exactes*

On considère une épreuve ayant r issues élémentaires équiprobables ($r = 2$ pour le lancer d'une pièce, $r = 6$ pour celui d'un dé, ...). On répète cette épreuve dans des conditions identiques. On note A_n l'événement : *au cours des nr premières épreuves, chacune des r issues distinctes se produit exactement n fois.* On dira que A_n est une *compensation exacte.*

1) Calculer $p_n = P(A_n)$.

2) Donner un équivalent de p_n quand n tend vers l'infini en utilisant la formule de Stirling.

3) En déduire que si $r \geq 4$, presque sûrement il n'y aura plus jamais de compensation exacte au delà d'un certain nombre d'épreuves.

Ex 8. *Une armée de singes dactylographes peut elle taper par hasard* Don Quichotte *?*

Montrer que dans le jeu de pile ou face infini, la séquence `pfffp` apparaît presque sûrement une infinité de fois. Généraliser.

Ex 9.

Soit $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, indépendantes et de même loi. Montrez que

$$Y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{X_k}{1 + |X_k|}$$

converge presque-sûrement quand n tend vers l'infini vers une constante $c \in [-1, 1]$.

Ex 10. *Escargot aléatoire*

Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, indépendantes et de même loi, de carré intégrable ($\mathbf{E}X_1^2 < +\infty$). On définit par récurrence la suite de variables aléatoires positives $(R_n)_{n\geq 1}$ par

$$R_1 = |X_1|, \quad R_n = \sqrt{R_{n-1}^2 + X_n^2}, \quad n \geq 2.$$

1) Montrer que la suite $(n^{-1/2}R_n)_{n\geq 1}$ converge presque sûrement vers une limite constante τ que l'on exprimera en fonction de $\mathbf{E}X_1^2$.

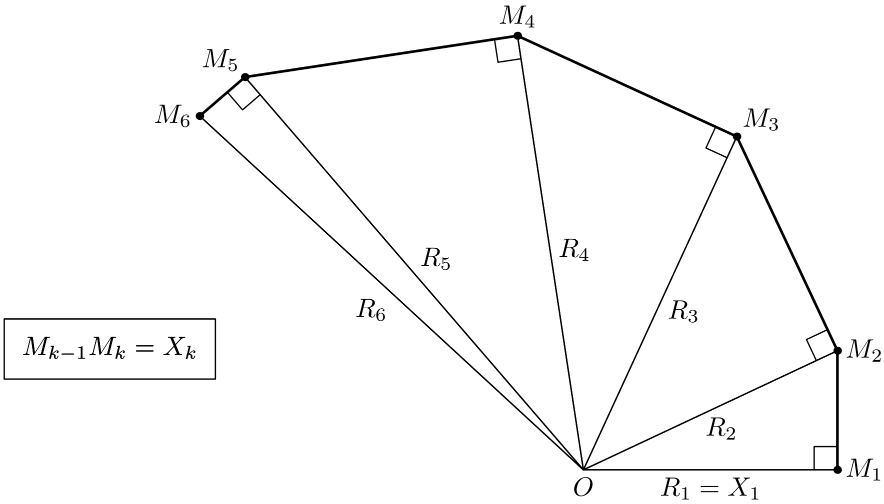

FIGURE 1 – Construction de l'escargot aléatoire $\mathcal{E}_6$

2) Pour illustrer graphiquement cette convergence, on prend les X_i de même loi uniforme sur $[0,1]$ et on construit dans un repère orthonormé du plan la suite $(M_n)_{n\geq 1}$ de points aléatoires par la récurrence suivante. On pose d'abord $M_1 = (X_1, 0)$, puis connaissant M_{n-1} on obtient M_n comme l'unique point tel que $M_{n-1}M_n = X_n$ et que l'angle $(\overrightarrow{M_{n-1}M_n}, \overrightarrow{M_{n-1}O})$ ait pour mesure $+\pi/2$. En d'autre termes, on construit M_n tel que le triangle $OM_{n-1}M_n$ soit rectangle en M_{n-1}, de côtés de l'angle droit $OM_{n-1} = R_{n-1}$ et $M_{n-1}M_n = X_n$ et en tournant toujours dans le sens trigonométrique. On trace ainsi la ligne polygonale $\mathcal{E}_n$ de sommets $M_1, M_2, \dots, M_n$ (l'escargot aléatoire, cf. figure 1).

On fixe un $\varepsilon > 0$. Montrer que presque sûrement, $\mathcal{E}_n$ est inclus dans le disque de centre O et de rayon $(1+\varepsilon)\sqrt{n/3}$ pour tout n assez grand (cf. figure 2 p. 3).

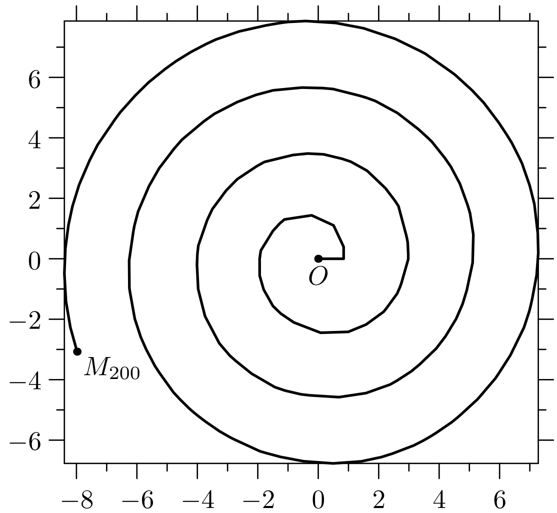

FIGURE 2 – Escargot aléatoire $\mathcal{E}_{200}$ (simulation)

Ex 11. *Borel-Cantelli et les retours à l'origine*

Soit (X_n) une suite de v.a.r. indépendantes telles que :

$$P(X_i = +1) = p \qquad P(X_i = -1) = 1 - p = q \qquad 0 < p < 1 \quad p \neq \frac{1}{2}.$$

On pose :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \qquad A_n = \{S_n = 0\}$$

L'événement A_n est un retour à zéro. On pose

$$A := \{\omega \in \Omega \ ; \ \text{la suite } S_n(\omega) \text{ repasse une infinité de fois en } 0\} = \bigcap_{k\geq 1} \bigcup_{j\geq k} A_j.$$

1) Prouver que $P(A) = 0$.

2) En utilisant la loi forte des grands nombres, donner une conclusion plus précise permettant de retrouver le résultat précédent.

Ex 12. *Loi de Cauchy et LFGN*

Le but de cet exercice est d'étudier la convergence des moyennes arithmétiques d'une suite de v.a. indépendantes et de même loi de Cauchy. Toutes les variables aléatoires intervenant dans l'énoncé sont supposées définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

1) Soit X une variable aléatoire réelle suivant la loi de Cauchy de densité :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+, \quad t \mapsto \frac{1}{\pi(1+t^2)}.$$

Pour tout entier $n \geq 1$, exprimez $P(X > n)$ à l'aide d'une intégrale. Déduisez-en la minoration :

$$\forall n \geq 1, \quad P(X > n) \geq \frac{1}{2\pi n}.$$

2) Soit $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi que X. On pose

$$A := \{\omega \in \Omega \ ; \ X_k(\omega) > k \text{ pour une infinité d'indices } k\}.$$

Expliquez pourquoi $P(A) = 1$.

3) Déduire de ce qui précède que la suite $(X_k)_{k\geq 1}$ ne vérifie pas la loi forte des grands nombres. *Indication* : en posant comme d'habitude $S_n := X_1 + \cdots + X_n$, exprimez $\frac{X_n}{n}$ en fonction de $\frac{S_n}{n}$ et $\frac{S_{n-1}}{n-1}$ et raisonnez par l'absurde en supposant que $\frac{S_n}{n}$ converge p.s. vers une certaine variable aléatoire Y (pas forcément constante).

4) Ce résultat est-il contradictoire avec la loi forte des grands nombres ?

Ex 13. Soit $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, d'espérance nulle et vérifiant :

$$\forall i, j \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{E}(X_i X_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

On pose $S_n := X_1 + \cdots + X_n$. Montrer que pour tout $\alpha > 1$,

$$\frac{S_n}{n^\alpha} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} 0.$$

Nota bene. Vous avez bien lu, il n'y a pas d'erreur dans l'énoncé, on ne suppose pas les X_k indépendantes.