Université Lille1
Sciences et Technologies

U.F.R. de Mathématiques
Licence de Mathématiques
S6, M66, année 2013-2014

Probabilités, fiche de T.D. n° 4

Ex 1. *Un couple discret*

On suppose que le couple de variables aléatoires discrètes (X, Y) a une loi donnée par :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \quad P(X = i, Y = j) = \frac{\alpha}{(1+i+j)!},$$

où α est une constante strictement positive qui sera précisée ultérieurement.

1) Expliquer sans calcul pourquoi les marginales X et Y ont même loi.

2) On pose $S = X + Y$. Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(S = k) = \frac{\alpha}{k!}.$$

3) En déduire la valeur de α et reconnaître la loi de S.

4) Calculer $P(X = 0)$. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

5) Donner sans calcul l'espérance de S et en déduire la valeur de $\mathbf{E}X$. La même méthode peut-elle servir pour obtenir $\operatorname{Var} X$?

6) Calculer $P(X = Y)$ et en déduire sans calcul $P(X > Y)$.

Ex 2. *Usagers et usagères à la poste*

Le nombre de personnes entrant dans un bureau de poste un jour donné est une variable de Poisson S de paramètre α. Chaque nouvel arrivant est un arrivant avec probabilité p et une arrivante avec probabilité q. On se propose de montrer que le nombre X d'hommes et le nombre Y de femmes entrant dans le bureau de poste au cours d'une journée sont deux variables de Poisson indépendantes de paramètres respectifs $p\alpha$ et $q\alpha$.

1) Calculer $P(X = i, Y = j \mid S = n)$ pour tout entier n et tout couple (i, j) tel que $i + j = n$.

2) Quelle est la loi du vecteur (X, Y) ?

3) En déduire les lois de X et Y.

Ex 3. *Lois de Poisson multidimensionnelles*

Soit $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ un vecteur de $\mathbb{R}^d$ à composantes toutes strictement positives. On dit que $X = (X_1, \dots, X_d)$ suit la loi de Poisson de paramètre α si

$$\forall (k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{N}^d, \quad P(X_1 = k_1, \dots, X_d = k_d) = \mathrm{e}^{-(\alpha_1 + \dots + \alpha_d)} \frac{\alpha_1^{k_1} \dots \alpha_d^{k_d}}{k_1! \dots k_d!} \qquad (1)$$

1) Vérifiez que (1) définit bien une loi de probabilité discrète sur $\mathbb{R}^d$.

2) Que peut-on dire des lois marginales de X ?

3) Soit I un sous-ensemble de $[\![1, d]\!]$ ayant au moins deux éléments. On pose $X_I = \sum_{i \in I} X_i$. Quelle est la loi de X_I ?

Ex 4. *Encore un vecteur à marginales uniformes*

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$h(x,y) = \frac{1}{4}(1 + \sin \pi x \sin \pi y)\mathbf{1}_{[-1,+1]^2}(x,y).$$

1) Vérifier que h est une densité de probabilité.

2) Soit (X,Y) un vecteur aléatoire dont la loi a pour densité h. Montrer que X et Y suivent la loi uniforme sur $[-1,+1]$. Calculer $\mathrm{Cov}(X,Y)$. Les variables aléatoires X et Y sont elles indépendantes ?

Ex 5. *Densité et forme linéaire*

Montrez que si le vecteur aléatoire $X = (X_1, \dots, X_d)$ est à densité, toute combinaison linéaire $a_1X_1 + \cdots + a_dX_d$ avec au moins un des a_i non nul est une variable aléatoire à densité.

Ex 6. *Tir à l'arc*

Dans un stand de tir à l'arc, un archer vise une cible placée sur une grande palissade (assimilée à un plan vertical). On munit ce plan d'un repère orthonormé de centre celui de la cible, l'axe des abscisses étant horizontal et celui des ordonnées vertical. On modélise le point d'impact de la flèche par le vecteur aléatoire gaussien (X,Y) de densité :

$$f : (x,y) \longmapsto \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(\frac{-(x^2+y^2)}{2\sigma^2}\right).$$

Intuitivement le paramètre σ mesure l'adresse du tireur. Pour ε positif fixé, plus σ est petit, plus grande sera la probabilité que la flèche atteigne un point à distance inférieure à ε du centre.

1) Montrer sans calcul que X et Y sont indépendantes et de même loi que l'on précisera.

2) On se propose dans cette question de déterminer la loi du vecteur image de (X,Y) par un passage en coordonnées polaires. On note $\Delta := \mathbb{R}_- \times \{0\}$ et $\varphi : \mathbb{R}^2 \backslash \Delta \to]0,+\infty[\times]-\pi,\pi[$ le passage des coordonnées cartésiennes aux coordonées polaires pour le plan privé de la demi-droite Δ. C'est un C^1-difféomorphisme dont l'inverse φ^{-1} est donné par :

$$\forall (r,u) \in]0,+\infty[\times]-\pi,\pi[, \quad (x,y) = \varphi^{-1}(r,u) = (r\cos u, r \sin u).$$

L'évènement $\Omega' := \big\{\omega \in \Omega;\ \big(X(\omega), Y(\omega)\big) \in \mathbb{R}^2 \backslash \Delta\big\}$ est de probabilité 1 puisque $\mathbf{P}\big((X,Y) \in \Delta\big) = \int_\Delta f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0$. On pose pour tout $\omega \in \Omega'$, $\big(R(\omega), U(\omega)\big) = \varphi\big(X(\omega), Y(\omega)\big)$ et on *admet* qu'il est possible de prolonger (R,U) à tout Ω de façon à en faire une application mesurable, donc un *vecteur aléatoire*. Comme $\mathbf{P}(\Omega \backslash \Omega') = 0$, la façon dont on effectue ce prolongement, pourvu qu'il soit mesurable, n'influence pas la loi de (R,U). Déterminer la loi du vecteur aléatoire (R,U) par sa densité. En déduire que R et U sont indépendantes et donner la loi de R et celle de U.

Ex 7. *Un vecteur gaussien*

Soit (X, Y) un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbf{R}^2$ dont la densité est donnée par :

$$f(x,y) = \frac{1}{\pi\sqrt{3}} \mathrm{e}^{-\frac{2}{3}(x^2-xy+y^2)}$$

1) Quelle est la loi de $X + Y$?

2) Calculer les lois marginales de X et Y. Ces deux variables aléatoires sont-elles indépendantes ?

Ex 8.

Soit (U, V) un vecteur aléatoire de densité g et (X, Y) tel que $X = U^2+V^2$ et $Y = V$. Calculer la densité f du couple (X, Y) en fonction de g.

Ex 9. *Densité isotrope*

Soit (X, Y) un couple de v.a.r. dont la loi possède une densité $f(x, y) = g(x^2 + y^2)$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$. Déterminer la loi de la v.a.r. $T = \frac{Y}{X}\cdot$

Ex 10. *Covariances d'une loi multinomiale*[1]

On considère une suite de n épreuves répétées indépendantes, chaque épreuve ayant k résultats possibles $r_1, \dots, r_k$. On note p_i la probabilité de réalisation du résultat r_i lors d'une épreuve donnée. Par exemple si on lance n fois un dé équilibré, $k = 6$ et $p_i = 1/6$ pour $1 \leqslant i \leqslant 6$. Pour $1 \leqslant i \leqslant k$, notons X_i le nombre de réalisations du résultat r_i au cours des n épreuves.

1) Expliquer sans calcul pourquoi $\mathrm{Var}(X_1 + \dots + X_k) = 0$.

2) Quelle est la loi de X_i ? Que vaut sa variance ?

3) Pour $i \neq j$, donner la loi et la variance de $X_i + X_j$.

4) En déduire $\mathrm{Cov}(X_i, X_j)$.

5) Contrôler ce résultat en développant $\mathrm{Var}(X_1+\dots+X_k)$ et en utilisant la première question.

Ex 11.

1) Vérifier que la fonction $g(u, v) = \frac{1}{4\pi}\, \mathbf{1}_{[-\pi,\pi]}(u)\, \mathbf{1}_{[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}(v) \cos v$ peut s'interpréter comme la densité de probabilité d'un couple (U, V) de variables aléatoires réelles.

2) On définit :

$$X = \cos U \cos V\,, \quad Y = \sin U \cos V\,, \quad Z = \sin V$$

et on note W le vecteur (X, Y, Z). Sur quel sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ la loi de W est-elle concentrée ? Cette loi est-elle à densité ?

3) Calculer l'espérance et la matrice de covariance de W.

4) Les variables X, Y, Z sont-elles non correlées ?

5) Quelle est la loi de Z ? Quelle est la loi du couple (X, Y) ? Quelles sont les lois de X et de Y ?

6) Quelle est la loi de (Y, Z) ; les variables X, Y, Z sont-elles indépendantes ?

1. Il n'est pas nécessaire de connaître la loi multinomiale pour pouvoir faire cet exercice.

Ex 12.

Soit X une variable aléatoire réelle de loi à densité $f(x) = \alpha e^{-\alpha x}\ \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(x)$ et Y de loi à densité $g(y) = \frac{1}{2\pi}\ \mathbf{1}_{[0,2\pi]}(y)$. X et Y étant supposées indépendantes, on pose $U = \sqrt{X}\cos Y$, $V = \sqrt{X}\sin Y$.

1) Quelle est la loi du couple (U, V) ?

2) Quelle est la loi de U, celle de V ?

3) U et V sont-elles indépendantes ?

Ex 13.

Le couple aléatoire (X, Y) de $\mathbb{R}^2$ a pour densité

$$f(x, y) = x e^{-(x+y)}\ \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(x)\ \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(y).$$

On pose $U = \min(X, Y)$, $V = \max(X, Y)$.

1) Sur quelle portion A du plan (u, v) la loi conjointe du couple (U, V) est-elle concentrée ? Montrer que sur A cette loi admet une densité g de la forme

$$g(u, v) = (u + v)e^{-(u+v)}.$$

2) Calculer l'espérance et la matrice de covariance du couple (U, V).

Ex 14. *Autour de la loi Gamma*

On dit qu'une variable X suit une loi $\Gamma(\lambda, a)$ avec $\lambda > 0, a > 0$ si elle admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue égale à :

$$f_{\lambda,a}(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^a x^{a-1}}{\Gamma(a)}\, e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On note $\Gamma(a) = \int_0^\infty u^{a-1} e^{-u}\, du$.

1) Calculer $\Gamma(a + 1)$ en fonction de $\Gamma(a)$, $a > 0$. En déduire $\Gamma(n)$ ($n \in \mathbf{N}$). Calculer $\mathbf{E}(X), \mathrm{Var}(X)$. Montrer que pour tout couple (a, b), $a > 0$, $b > 0$:

$$\Gamma(a)\,\Gamma(b) = \Gamma(a + b)\,B(a, b) \quad \text{où} \quad B(a, b) = \int_0^1 t^{a-1}(1 - t)^{b-1}\,\mathrm{d}t.$$

2) Soient X, Y deux v.a. indépendantes, X de loi $\Gamma(\lambda, a)$, Y de loi $\Gamma(\lambda, b)$. On pose $U = X + Y$ et $V = \frac{X}{X+Y}$. Calculer la loi du vecteur aléatoire (U, V), la loi de U, la loi de V ; les v.a. U et V sont-elles indépendantes ? Calculer $\Gamma(\frac{1}{2})$ en choisissant $a = b = \frac{1}{2}$.

3) Soit $Z = \frac{X}{Y}$. Donner la densité de Z ; $\mathbf{E}(Z)$ et $\mathrm{Var}(Z)$ existent-elles toujours ?

4) Soient $(X_i)_{i=1\cdots n}$ n v.a. indépendantes de loi normale centrée réduite. Donner les lois de X_i^2 et de $S = \sum_{i=1}^n X_i^2$; retrouver $\Gamma(\frac{1}{2})$.

5) Soient $(X_i)_{i=1\cdots n}$ n v.a. indépendantes telles que X_i suit la loi $\Gamma(\lambda, a_i)$, $S = \sum_{i=1}^n X_i$ et $T_i = \frac{X_i}{S}$. Calculer la loi du vecteur aléatoire $(S, T_1, \ldots, T_{n-1})$. Quelle est la loi de S, quelle est la loi du vecteur aléatoire $(T_1, \ldots, T_{n-1})$? Les v.a. $T_1, T_2 \cdots T_{n-1}$ sont-elles indépendantes ?

Ex 15. *Somme de deux v.a. indépendantes*

Calculer la loi de la somme de deux v.a. X et Y indépendantes et de même loi dans les trois cas suivants :

a) X et Y sont de loi uniforme sur $[0, \theta]$.

b) X et Y sont de loi exponentielle de paramètre a.

c) X et Y sont de loi de Poisson de paramètre a.

Ex 16. *Une somme mixte*

On définit sur le même espace probabilisé une variable aléatoire N à valeurs dans $\mathbb{N}$ et une variable aléatoire U de loi uniforme sur $[0, 1]$. On pose $X = N + U$.

1) Montrez que la fonction de répartition F de X est continue sur $\mathbb{R}$.

2) On suppose désormais que N et U sont *indépendantes*. Montrez que F est affine par morceaux. Donnez une méthode simple pour tracer le graphe de F à partir de celui de la f.d.r de N.

3) Montrez que X est à densité et donnez une expression de cette densité à l'aide des $p_k = P(N = k)$.

Ex 17. *Produit d'une v.a. discrète par une uniforme*

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et *indépendantes* : X est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont la loi est donnée par $P(X = k) = p_k$, $k \in \mathbb{N}$, et Y est de loi uniforme sur $[0, 1]$. Déterminer la fonction de répartition F de la variable aléatoire XY. Que peut on dire de F ? La loi de XY est-elle à densité ?

Ex 18. *La méthode de Box Muller*

Il s'agit d'une méthode de simulation de variables gaussiennes $\mathfrak{N}(0, 1)$ à partir d'un générateur de variables de loi uniforme sur $]0, 1[$. Elle repose sur le résultat suivant. Si U_1 et U_2 sont indépendantes et de loi uniforme sur $]0, 1[$, les variables aléatoires

$$X := (-2 \ln U_1)^{1/2} \cos(2\pi U_2) \quad \text{et} \quad Y := (-2 \ln U_1)^{1/2} \sin(2\pi U_2)$$

sont indépendantes et de même loi $\mathfrak{N}(0, 1)$.

1) Quelle est la loi du vecteur (U_1, U_2) ?

2) En déduire la loi de (X, Y) par changement de variable et conclure.

Ex 19. *Loi uniforme sur l'hypographe d'une densité*

Soit f une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$ et G son hypographe :

$$G := \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \, ; \, 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}.$$

Soit $M = (Z, Y)$ un vecteur aléatoire de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ de loi *uniforme* sur G. Vérifiez que la loi de la variable aléatoire Z a pour densité f.

Ex 20. *Simulation d'une loi uniforme sur un hypographe*

Soit X une variable aléatoire réelle de densité g. Posons

$$M := \bigl(X, cg(X)U\bigr),$$

où U est une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$, *indépendante* de X et $c > 0$ une constante. On note H l'hypographe de cg :

$$H := \bigl\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \; ; \; 0 \leqslant y \leqslant cg(x)\bigr\}.$$

Montrez que M suit la loi uniforme sur H. *Indication.* On pourra utiliser la caractérisation de la loi du vecteur alétoire M par les moments fonctionnels $\mathbf{E}h(M)$ où $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ est continue à support compact.

Ex 21. *Simulation d'une v.a. à densité par rejet*

On voudrait simuler une variable aléatoire Z, de densité f. On suppose que l'on sait simuler X de densité g et trouver une constante c telle que $f \leqslant cg$ (nécessairement $c \geqslant 1$, pourquoi ?). Les X_i sont des v.a. indépendantes de même loi ayant pour densité g, les U_i des variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $[0, 1]$ et les suites $(X_i)_{i \geqslant 1}$ et $(U_i)_{i \geqslant 1}$ sont indépendantes. On génère la suite des $M_i := \bigl(X_i, cg(X_i)U_i\bigr)$ en s'arrêtant au premier indice i_0 (aléatoire) tel que $cg(X_{i_0})U_{i_0} \leqslant f(X_{i_0})$. On pose alors $Z = X_{i_0}$ et Z a pour densité f. Justifiez cet algorithme.