Université Lille1
Sciences et Technologies

U.F.R. de Mathématiques
Licence de Mathématiques
S6, M66, année 2013-2014

Probabilités, fiche de T.D. n° 3

Ex 1. *Intégrabilité*

Soit X une variable aléatoire réelle de fonction de répartition F. Démontrez que X est intégrable si et seulement si l'intégrale de Riemann généralisée $\int_{-\infty}^{+\infty} F(t)(1-F(t))\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Ex 2. *Nombre de couples survivants*

Une urne contient $2N$ jetons numérotés de 1 à N, chaque numéro étant présent deux fois. On tire m jetons sans remise. Soit S la variable aléatoire égale au nombre de paires restant dans l'urne. Calculer l'espérance de S. Ce modèle fut utilisé par Bernoulli au 18^{e} siècle pour étudier le nombre de couples survivants dans une population de N couples après m décès.
Indications : Pour $1 \leqslant i \leqslant N$, on considèrera la variable aléatoire X_i définie par :

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si la } i^{\mathrm{e}} \text{ paire reste dans l'urne,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Calculer $P(X_i = 1)$ et $\mathbf{E}X_i$. En déduire la valeur de $\mathbf{E}S$.

Ex 3.

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note $p_k = P(X = k)$. On suppose que X a une espérance mathématique $\mathbf{E}X$ finie et que la suite $(p_k)_{k\geqslant 1}$ est *décroissante* sur $\mathbb{N}^*$.

1) Démontrer l'inégalité :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(X = k) < \frac{2\mathbf{E}X}{k^2}. \tag{1}$$

Indication : Considérer la somme partielle $\sum_{j=1}^{k} jP(X = j)$.

2) L'inégalité (1) reste-t-elle vraie sans l'hypothèse de décroissance de $(p_k)_{k\geqslant 1}$?

3) Est-il possible qu'il existe une constante $c > 0$ et un entier k_0 tels que :

$$\forall k \geqslant k_0, \quad P(X = k) \geqslant \frac{c\mathbf{E}X}{k^2}? \tag{2}$$

4) Montrez que si Y est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et intégrable,

$$\liminf_{n\to+\infty} n^2 P(Y = n) = 0.$$

Ex 4. *Contrôleur contre fraudeur (suite)*

Rappel de l'énoncé. Une compagnie de métro pratique les tarifs suivants. Le ticket donnant droit à un trajet coûte 1 €; les amendes sont fixées à 20 € pour la première infraction constatée, 40 € pour la deuxième et 400 € pour la troisième. La probabilité p pour un voyageur d'être contrôlé au cours d'un trajet est supposée constante et connue de la seule compagnie. Un fraudeur décide de prendre systématiquement le métro sans payer jusqu'à la deuxième amende et d'arrêter alors de frauder. On note T le nombre de trajets effectués jusqu'à la deuxième amende (T est le numéro du trajet où le fraudeur est contrôlé pour la deuxième fois). On note $q = 1 - p$ la probabilité de faire un trajet sans contrôle. La loi de T est donnée par

$$P(T = k) = (k - 1)p^2q^{k-2}, \quad k \geqslant 2.$$

4) Calculez en fonction de p la quantité

$$\mathbf{E}T := \sum_{k=2}^{+\infty} kP(T = k).$$

Cette quantité est l'espérance de T et peut s'interpréter comme la valeur moyenne du temps d'attente.

5) D'un point de vue purement financier (et donc hors de toute considération de moralité), quel conseil donneriez vous au fraudeur ? N.B. ceci est une question ouverte et il y a plusieurs réponses valables possibles.

Ex 5. *Garantie et profit*

Un fabricant de pompes à chaleur offre une garantie de 5 ans incluant remplacement ou la réparation du condenseur en cas de panne. Le temps de fonctionnement sans panne du condenseur est une variable aléatoire T (en années) de densité :

$$f(t) = \frac{1}{8}\mathrm{e}^{-t/8}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t).$$

1) Donner l'espérance de T (temps de panne moyen).

2) Calculer la probabilité que le condenseur tombe en panne avant son temps de panne moyen.

3) Si le bénéfice du fabricant est de 550 € par pompe vendue et si la mise en oeuvre de la garantie (pour simplifier on suppose que le contrat stipule un seul remplacement ou une seule réparation gratuits au cours des 5 ans) lui coûte 200 €, calculer l'espérance du gain réel du fabricant par pompe vendue.

Ex 6. *Espérance du min et du max de deux v.a. uniformes*

Soient X et Y deux variables aléatoires *positives* définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, toutes deux de loi uniforme sur $[0, 1]$. Sauf dans la dernière question, on ne suppose pas X et Y indépendantes. On s'intéresse à l'espérance des variables aléatoires $\min(X, Y)$ et $\max(X, Y)$.

1) Calculez $\mathbf{E}X$ et $\mathbf{E}(X^2)$.

2) Écrivez plus simplement la somme $\min(X,Y)+\max(X,Y)$ et en déduire une relation entre $\mathbf{E}\min(X,Y)$ et $\mathbf{E}\max(X,Y)$. En déduire l'expression de $\mathbf{E}|X-Y|$ en fonction de $\mathbf{E}\min(X,Y)$, puis en fonction de $\mathbf{E}\max(X,Y)$.

3) Montrez brièvement que l'on a toujours

$$\mathbf{E}\min(X,Y)\leqslant\frac{1}{2}\leqslant\mathbf{E}\max(X,Y).$$

Est-il possible avec un choix convenable de X et Y que ces deux inégalités soient des égalités ?

4) On suppose maintenant que X et Y sont indépendantes, ce qui implique notamment que pour tous intervalles I et J de $\mathbb{R}$ les évènements $\{X\in I\}$ et $\{Y\in J\}$ sont indépendants. Calculez $\mathbf{E}\min(X,Y)$, $\mathbf{E}\max(X,Y)$ et en déduire $\mathbf{E}|X-Y|$.
Indication. Commencez par calculer $P(\min(X,Y)>t)$ ou $P(\max(X,Y)\leqslant t)$.

Ex 7. *Loi logistique*

1) Soit Y une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre 1, sa fonction de survie est donc donnée par

$$P(Y>x)=\begin{cases}1 & \text{si } x<0,\\ \mathrm{e}^{-x} & \text{si } x\geqslant 0.\end{cases}$$

Expliquer pourquoi Y est intégrable et calculer $\mathbf{E}Y$. Calculer et représenter graphiquement la fonction de répartition de la variable aléatoire $Y':=-Y$.

2) Dans toute la suite de l'exercice, on note U une variable aléatoire réelle à valeurs dans $]0,1[$, de loi uniforme sur $]0,1[$. On pose

$$Z:=\ln U$$

Montrer que Z et $-Y$ ont même loi. *Indication :* on pourra calculer la fonction de répartition de Z. En déduire la valeur de $\mathbf{E}Z$.

3) On définit la variable aléatoire réelle X par

$$X:=\ln\left(\frac{1-U}{U}\right)$$

Calculer sa fonction de survie $G:\mathbb{R}\to[0,1]$, $x\mapsto G(x):=P(X>x)$. En déduire sa fonction de répartition F et l'existence d'une densité f que l'on calculera.

4) Justifier l'existence de $\mathbf{E}X$ et la calculer. *Indication :* il y a moyen de traiter cette question *sans écrire aucune intégrale*, en notant que $X=\ln(1-U)-\ln U$ et en cherchant la loi de $1-U$.

Ex 8. *Calcul des moments de la loi gaussienne standard*
Soit X une variable aléatoire de loi $\mathfrak{N}(0,1)$.

1) Que valent les $\mathbf{E}X^{2n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$?
2) On pose $c_n = \mathbf{E}X^{2n}$. Montrer en intégrant par parties que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_n = \frac{1}{2n+1} c_{n+1}.$$

en déduire une formule explicite pour $\mathbf{E}X^{2n}$.

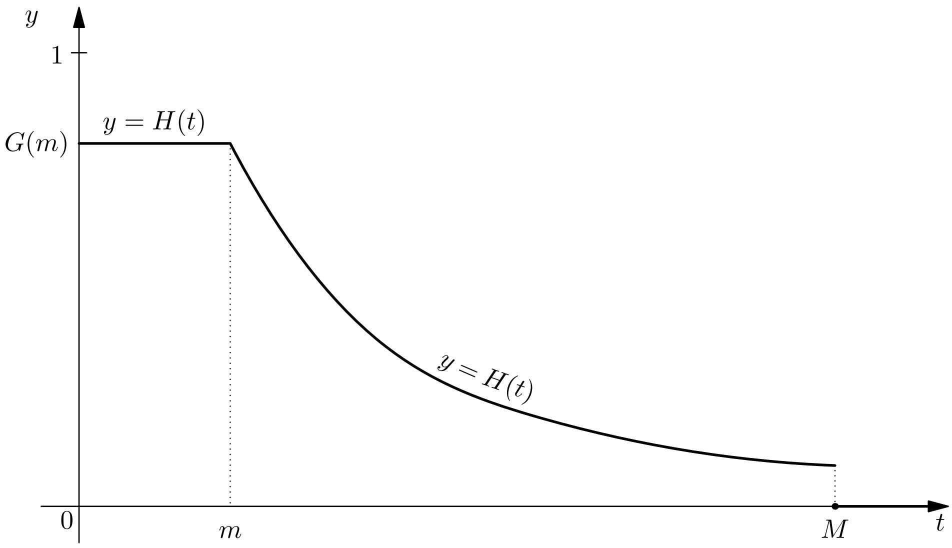

FIGURE 1 – Fonction de survie H de la v.a. positive Y

Ex 9. *Franchise et plafond*

En cas d'incendie d'un certain type de logement, la loi du coût X des « dommages aux biens » a une fonction de survie G de la forme

$$\forall t \geqslant 0, \quad G(t) := P(X > t) = \frac{1}{(1+t)^a},$$

où a est un paramètre positif.

Une compagnie d'assurances propose la couverture de ce risque « dommages aux biens », par un contrat qui prévoit une franchise m et un plafond M. La franchise est destinée à éviter les déclarations de petits sinistres et ainsi à économiser sur les frais de gestion. Le plafond M limite la responsabilité de la compagnie. Notons Y le remboursement perçu par l'assuré en cas d'incendie. La règle franchise-plafond nous permet d'écrire [1]

$$\forall \omega \in \Omega, \quad Y(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } X(\omega) \leqslant m, \\ X(\omega) & \text{si } m < X(\omega) \leqslant M, \\ M & \text{si } X(\omega) > M. \end{cases}$$

1. Pour simplifier, on suppose que le seul but de la franchise est d'éviter les déclarations de petits sinistres. Donc quand l'assuré est remboursé, on ne déduit pas m de son remboursement.

On note $H : [0, +\infty[\to [0, 1]$, $t \mapsto H(t) := P(Y > t)$ la fonction de survie de Y. Sa représentation graphique est esquissée à la figure 1.

1) Justifiez cette représentation graphique en exprimant $H(t)$ à l'aide de G dans les trois cas $0 \leqslant t < m$, $m \leqslant t < M$ et $t \geqslant M$.

2) La loi de la variable aléatoire positive Y est-elle à densité ?

3) Calculer $\mathbf{E}Y$ en fonction de m, M et a.

Ex 10. *Peut-on utiliser le th. de Beppo Levi avec une suite décroissante ?*

La réponse à cette question provocatrice est fournie par le théorème suivant.

Théorème de convergence décroissante. *Soit* $(X_n)_{n\geqslant 1}$ *une suite* décroissante *de v.a. positives définies sur le même espace probabilisé* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. *On suppose de plus que* $\mathbf{E}X_1 < +\infty$. *Alors la suite* $(\mathbf{E}X_n)_{n\geqslant 1}$ *converge en décroissant vers* $\mathbf{E}X$, *où la v.a.* X *est définie par* $X(\omega) = \lim_{n\to+\infty} X_n(\omega)$, *pour tout* $\omega \in \Omega$.

1) Démontrez ce théorème en appliquant le théorème de Beppo Levi à une suite *croissante* convenablement construite.

2) Soit U une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{F})$, à valeurs dans $]0, 1]$ et de loi uniforme sur $]0, 1]$. On considère la suite de v.a. $(X_n)_{n\geqslant 1}$ définie sur $(\Omega, \mathcal{F})$ par

$$X_n = \frac{1}{U}\mathbf{1}_{]0,1/n]}(U).$$

Vérifiez qu'elle est décroissante et converge simplement vers 0 sur tout Ω. Que vaut $\mathbf{E}X_n$? Quel est l'intérêt de cette question ?

Ex 11. *Moment exponentiel*

Soit X une variable aléatoire. On suppose qu'il existe une constante $a > 0$ telle que $\mathbf{E}\exp(aX) < +\infty$.

1) Que peut-on dire de la vitesse de convergence vers 0 de $P(X > t)$ quand t tend vers $+\infty$?

2) Donnez un exemple de v.a. non bornée vérifiant cette condition pour tout a.

Ex 12. *Deux problèmes de minimisation*

Le but de cet exercice est de trouver une constante c qui soit « la plus proche » d'une variable aléatoire réelle X, au sens d'une certaine distance. La première question traite le cas de la distance L^2, les questions suivantes celui de la distance L^1. La résolution de cet exercice ne suppose aucune connaissance sur ces distances et n'utilise que les propriétés de la fonction de répartition et de l'espérance.

1) Soit X une variable aléatoire réelle de carré intégrable. On pose pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$g(a) := \mathbf{E}\big((X - a)^2\big).$$

Montrez que g est bien définie sur $\mathbb{R}$ et y admet un minimum unique atteint en un point a_0 que vous calculerez. Que reconnaissez vous en $g(a_0)$?

2) Dans cette question et les suivantes, X est une variable aléatoire intégrable dont la fonction de répartition sera notée F. On pose pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$h(a) := \mathbf{E}|X - a|$$

et on cherche quelle(s) valeur(s) de a minimise(nt) $h(a)$. Expliquez pourquoi h est bien définie sur tout $\mathbb{R}$.

3) Donnez une représentation graphique de $\mathbf{E}|X - a|$ en utilisant le graphe de F.

4) En utilisant la formule de calcul de l'espérance d'une v.a. à l'aide de la f.d.r., établissez la formule suivante :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \qquad \mathbf{E}|X - a| = \mathbf{E}|X| + 2\int_0^a \Big(F(s) - \frac{1}{2}\Big)\,\mathrm{d}s. \tag{3}$$

On pourra commencer par examiner le cas $a > 0$.

5) L'inverse généralisée de la fonction de répartition F est définie sur $]0, 1[$ par :

$$\forall u \in]0, 1[, \quad F^{-1}(u) := \inf\{t \in \mathbb{R} \ ; \ F(t) \geqslant u\}.$$

On dit d'autre part que le réel m est *une médiane* de X, s'il vérifie les deux conditions $P(X \geqslant m) \geqslant 1/2$ et $P(X \leqslant m) \geqslant 1/2$. Vérifiez que $F^{-1}(1/2)$ est une médiane de X et que c'est la plus petite de toutes les médianes dans le cas où il y en aurait plusieurs. Pourriez vous proposer un exemple d'un tel cas en donnant F par sa représentation graphique ?

6) En revenant à (3), montrez que h atteint un minimum absolu au point $a = F^{-1}(1/2)$. Ce minimum peut-il être atteint ailleurs ?

7) Question bonus : proposez une résolution graphique de ce problème.

Ex 13. *Inégalité de Chernoff*

1) Soit X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ telle que pour un certain $a > 0$, $\mathbf{E}\big(\mathrm{e}^{aX}\big)$ soit finie. Montrer que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad P(X \geqslant t) \leqslant \mathrm{e}^{-at}\mathbf{E}\big(\mathrm{e}^{aX}\big). \tag{4}$$

2) Cette inégalité s'appelle *inégalité de Chernoff*. Dans les cas où l'on sait calculer explicitement $\mathbf{E}\big(\mathrm{e}^{aX}\big)$, on peut alors chercher à améliorer cette majoration en optimisant le majorant $M(a) := \mathrm{e}^{-at}\mathbf{E}\big(\mathrm{e}^{aX}\big)$ en a. Faut-il chercher à minimiser ou à maximiser $M(a)$?

3) Donner la version optimisée de l'inégalité de Chernoff lorsque X suit la loi binomiale $\mathrm{Bin}(n, p)$.