Université Lille1
Sciences et Technologies

U.F.R. de Mathématiques
Licence de Mathématiques
S6, M66, année 2013-2014

Probabilités, fiche de T.D. n° 2

Ex 1. *Jour de chance*

Un site de jeux propose le jeu suivant. Chaque internaute désireux de jouer s'inscrit en misant un euro et en indiquant son jour de naissance (lundi, mardi, ...). Le jeu commence systématiquement un lundi et une fois par jour, les organisateurs filment et mettent en ligne un seul lancer d'un dé *équilibré*, jusqu'au jour de la première apparition du 6. Le jeu s'arrête alors et les candidats nés ce même jour de la semaine se partagent les mises[1]. Par exemple si la première apparition du 6 a lieu un jeudi, les gagnants sont tous les joueurs nés un jeudi.

1) Calculez la probabilité de gagner pour un joueur né un dimanche.

2) Le jeu est-il équitable (en admettant que les jours de naissance de l'ensemble des joueurs se répartissent uniformément sur les 7 jours de la semaine) ?

Ex 2. *Fonction génératrice et truquage de dés*

Cet exercice introduit la fonction génératrice d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ et applique cet outil à un problème de truquage de dés. On note $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé. On rappelle qu'une variable aléatoire *discrète* définie sur Ω et à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est une application $\mathcal{F}$-Bor($\mathbb{K}$) mesurable et telle que $X(\Omega)$ soit une partie au plus dénombrable de $\mathbb{K}$.

1) Soit X une application $\Omega \to \mathbb{N}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X^{-1}(\{n\}) \in \mathcal{F}. \tag{1}$$

Montrer que X est une application $\mathcal{F}$-$\mathcal{P}(\mathbb{N})$ mesurable et qu'on peut aussi la considérer comme une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{R}$ (au sens rappelé ci-dessus) telle que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$. Dans toute la suite, nous appelerons *variable aléatoire entière* une application $X : \Omega \to \mathbb{N}$ vérifiant (1).

Vérifier que si $(\Omega', \mathcal{G})$ est un espace mesurable et f une application *quelconque* $\mathbb{N} \to \Omega'$, l'application $f \circ X$ est $\mathcal{F}$-$\mathcal{G}$ mesurable *quelle que soit la tribu* $\mathcal{G}$ sur Ω'.

2) Soit z un nombre complexe fixé et $X : \Omega \to \mathbb{N}$ une variable aléatoire entière. Expliquer brièvement pourquoi l'application

$$z^X : \Omega \to \mathbb{C}, \quad \omega \mapsto z^{X(\omega)}$$

1. Le site étant financé par la publicité, les organisateurs n'effectuent pas de prélèvement sur les mises.

est une variable aléatoire discrète à valeurs complexes [2]. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur z et la loi de X pour qu'elle soit $\mathbf{P}$-intégrable. En déduire que le domaine de définition D de la *fonction génératrice* G_X de X

$$G_X : z \mapsto G_X(z) := \mathbf{E}(z^X),$$

contient au moins le disque unité fermé du plan complexe.

Justifier la relation

$$\forall z \in D, \quad G_X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = n) z^n.$$

En déduire que deux variables aléatoires entières ont même fonction génératrice si et seulement si elles ont même loi.

Lorsque l'ensemble des valeurs possibles de X est fini, on remarque que G_X se réduit à un polynôme et est définie sur tout le plan complexe (exemple : loi uniforme, loi binomiale,...).

3) Soit X une variable aléatoire discrète dont l'ensemble des valeurs possibles $X(\Omega)$ est inclus dans $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Vérifier que l'on a la factorisation :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad G_X(z) = z Q_X(z),$$

où Q_X est un polynôme. Expliquer pourquoi si $\mathbf{P}(X = 6) \neq 0$, Q_X a au moins une racine réelle. Expliciter $Q_X(z)$ et donner sa factorisation complète lorsque X suit la loi uniforme sur $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

4) Soient X et Y deux variables aléatoires entières indépendantes (ceci équivaut à l'indépendance des événements $\{X = k\}$ et $\{Y = l\}$ pour tout couple d'entiers (k, l)). Montrer que pour tout z de module inférieur ou égal à 1 on a :

$$G_{X+Y}(z) = G_X(z) G_Y(z)$$

et que cette relation est valable pour tout complexe z lorsque $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ sont des parties finies de $\mathbb{N}$.

5) On dispose de deux dés et on aimerait truquer individuellement chacun d'eux de façon que la somme des points suive la loi uniforme sur $\{2, 3, \ldots, 12\}$. Déduire des questions précédentes que ceci est impossible.
Indications : On utilisera en le redémontrant le fait que la fonction génératrice de la loi uniforme sur $\{2, 3, \ldots, 12\}$ n'admet aucune racine dans $\mathbb{R}^*$.

Précisons ce que l'on entend par truquage *individuel* de chaque dé. Il s'agit d'une méthode de truquage qui préserve l'indépendance du comportement des deux dés. Par exemple, on peut déplacer le centre de gravité de chaque dé en incluant des morceaux de plomb dans le dé, cela ne modifiera pas l'indépendance des deux dés. Par contre si on dissimule un aimant sous une face d'un dé et du fer (ou un autre aimant) sous

2. On adopte la convention usuelle pour les polynômes et les séries entières : $z \mapsto z^0$ est la fonction constante égale à 1 sur $\mathbb{C}$ (y compris au point $z = 0$).

une face de l'autre dé, les comportements des deux dés ne seront plus indépendants. La traduction mathématique de cette idée de truquage individuel est la suivante. Si X et Y sont les variables aléatoires égales aux points marqués par chaque dé après truquage, elles restent indépendantes (mais bien sûr, il n'y a plus de raison de supposer qu'elles suivent encore une loi uniforme sur $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ni qu'elles aient même loi).

Ex 3. *Interprétation du graphique d'une f.d.r.*

La variable aléatoire X a pour fonction de répartition F représentée figure 1.

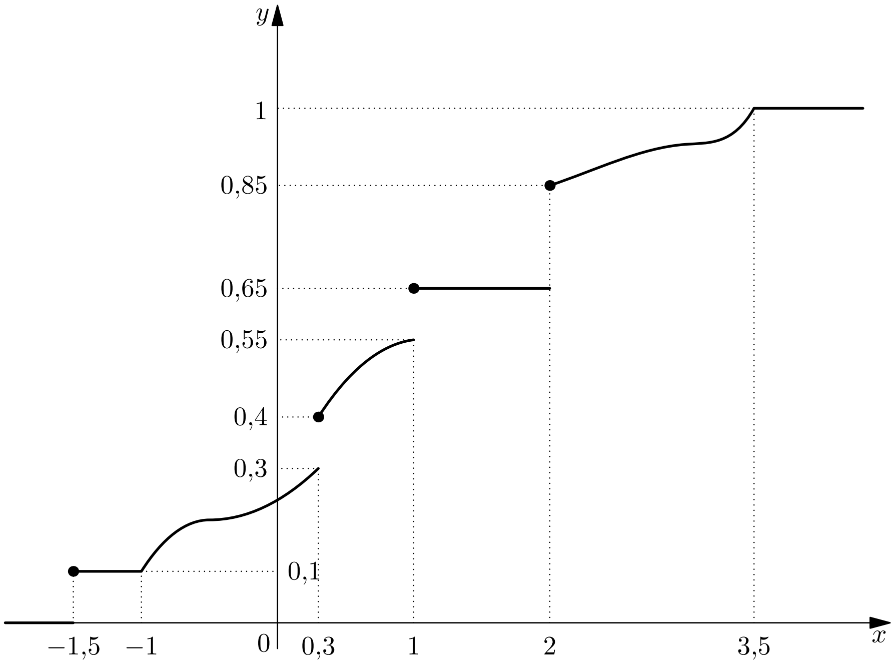

FIGURE 1 – Fonction de répartition F de la v.a. X

1) En exploitant les informations fournies par ce graphique, donner les valeurs des probabilités suivantes.

$$P(X \leqslant -1),\quad P(X = -1{,}5),\quad P(X = 0{,}4),\quad P(X \geqslant 0{,}3),$$
$$P(X > 2),\quad P(X \in [1; 1{,}5]),\quad P(X \in]1; 2]),\quad P(|X| > 1).$$

2) La variable aléatoire X est-elle à densité ?

3) Calculer la somme des sauts de F. La variable aléatoire X est-elle discrète ?

Ex 4. *Démarchage téléphonique*

Un commercial appelle n clients potentiels au téléphone. La probabilité que chaque personne appelée réponde est p, et chacune est supposée répondre indépendamment des autres.

1) Quelle est la loi de X_1, nombre de personnes jointes au premier essai ?

2) Trouver par le calcul la loi de X_2, nombre de personnes jointes au 2^e^ essai.

3) Retrouver ce résultat par un raisonnement direct.

4) Quelle est la loi de $X_1 + X_2$?

Ex 5. *Contrôleur contre fraudeur*

Une compagnie de métro pratique les tarifs suivants. Le ticket donnant droit à un trajet coûte 1 €; les amendes sont fixées à 20 € pour la première infraction constatée, 40 € pour la deuxième et 400 € pour la troisième. La probabilité p pour un voyageur d'être contrôlé au cours d'un trajet est supposée constante et connue de la seule compagnie ($0 < p < 1$). Un fraudeur décide de prendre systématiquement le métro sans payer jusqu'à la deuxième amende et d'arrêter alors de frauder. On note T le nombre de trajets effectués jusqu'à la deuxième amende (T est le numéro du trajet où le fraudeur est contrôlé pour la deuxième fois). On note $q = 1 - p$ la probabilité de faire un trajet sans contrôle.

1) Montrer que la loi de T est donnée par

$$P(T = k) = (k - 1)p^2 q^{k-2}, \quad k \geqslant 2.$$

2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $P(T > n)$. *Indication* : on pourra commencer par chercher une formule explicite pour la somme de la série entière

$$f(x) := \sum_{k=n+1}^{+\infty} x^{k-1},$$

puis pour sa dérivée terme à terme.

3) Calculer numériquement $P(T > 60)$ (pourquoi s'intéresse-t-on à cette quantité ?) lorsque $p = 1/10$ et lorsque $p = 1/20$.

Ex 6. *Mélange de lois*

On supose que le nombre N d'oeufs pondus par un insecte suit une loi de Poisson de paramètre α :

$$P(N = k) = \frac{\mathrm{e}^{-\alpha}\alpha^k}{k\,!} \qquad k \in \mathbb{N}$$

On suppose également que la probabilité de développement d'un oeuf est p et que les oeufs sont mutuellement indépendants. On note S le nombre (aléatoire) de survivants. Montrer que S suit une loi de Poisson de paramètre $p\alpha$.

Ex 7. *Assurances maritimes et concentration du capital*

Une compagnie d'assurances assure une flotte de 500 navires de pêche valant chacun 1 million d'euros. Le risque assuré est la perte totale du navire qui est un événement de probabilité 0,001 pour une année. Les naufrages des différents navires sont considérés comme indépendants. On note X la variable aléatoire égale au nombre de navires perdus en une année.

1) Trouver la loi exacte de X.

2) Evaluer $P(X = 10)$ en utilisant une approximation de la loi de X.

3) La compagnie rembourse le 31 décembre, sur ses réserves, la valeur des bateaux assurés ayant fait naufrage dans l'année. A combien doivent s'élever ces réserves financières pour qu'elle puisse effectuer la totalité de ces remboursements avec une probabilité supérieure à 0,999 ?
Indication : En utilisant l'approximation poissonnienne de la loi binomiale, montrer qu'il suffit que ces réserves représentent la valeur d'un très petit nombre de navires.

4) La compagnie fusionne avec une autre compagnie identique (500 navires assurés). Reprendre brièvement la question 3) et commenter le résultat obtenu.

Ex 8. *Un problème de tige brisée*

Dans tout l'exercice, X désigne une variable aléatoire à valeurs dans $]0,1[$ et de loi uniforme sur $]0,1[$. On pose

$$Z := \frac{1-X}{X}.$$

1) Calculez explicitement la fonction de répartition de la variable aléatoire positive Z.

2) La loi de Z est-elle à densité ? Si oui, calculez la.

3) Expliquez si possible sans calcul pourquoi Z et $1/Z$ ont *même loi.*

4) On brise une tige de longueur 1 en choisissant au hasard le point de rupture suivant une loi uniforme sur $]0,1[$. On notera X la longueur du morceau gauche. Quelle est la probabilité que l'un des deux morceaux soit plus de deux fois plus long que l'autre ?

Ex 9. *Un peu de trigonométrie aléatoire*

On définit une variable aléatoire X grâce à la construction représentée à la figure 2. L'angle $\big(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AM}\big)$ a pour mesure en radians U, *variable aléatoire* de loi uniforme sur $]-\pi/2,\pi/2[$. La distance AO vaut 1 et X est l'abscisse du point M sur la droite de repère $(O,\vec{i}\,)$: $\overrightarrow{OM} = X\vec{i}$. Les angles sont orientés dans le sens trigonométrique, la figure est faite pour U positif. Pour $U = 0$, M coïncide avec le point O et pour $-\pi/2 < U < 0$, M est « à gauche » de O.

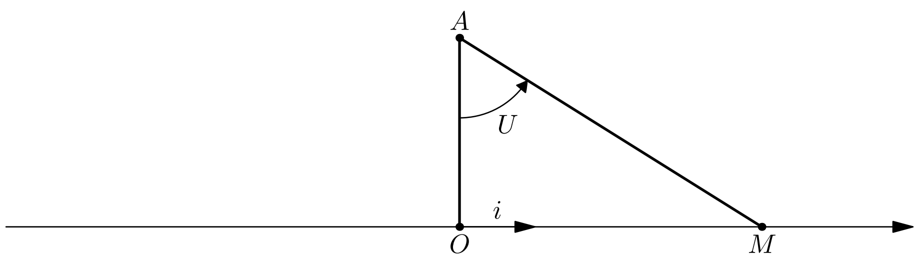

FIGURE 2 – Construction de M

1) Exprimez X en fonction de U.

2) Pour x réel, calculez $P(X \leqslant x)$. On obtient ainsi la fonction de répartition de la variable aléatoire réelle X.

3) Expliquez pourquoi la loi de X est à densité et calculez cette densité. Que reconnaissez vous ainsi ?

4) Quelle est la valeur de $P(|X| \leqslant 1)$? Cette question peut se résoudre avec ou sans l'aide des précédentes.

Ex 10. *Manipulation des notes*

On suppose que les notes d'un contrôle de probabilité suivent une loi normale de paramètres $m = 8,5$, $\sigma = 2$.

1) Quelle est la probabilité pour un étudiant d'avoir la moyenne ?

2) On veut améliorer les notes à l'aide d'une transformation affine $Y = aX + b$. Déterminer a et b pour qu'un étudiant ait la moyenne avec une probabilité de 1/2 et une note supérieure à 8 avec une probabilité de 3/4.

Ex 11. *Parties entière et fractionnaire d'une v.a. exponentielle*

Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre a. On lui associe la variable aléatoire discrète $Y = [X]$, où les crochets désignent la partie entière. Quelle est la loi de Y ? Quelle est la loi de la partie fractionnaire $Z := X - Y$?

Ex 12. *Un exemple à méditer*

Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$ et Y la variable aléatoire définie sur le même espace Ω par

$$Y(\omega) := \begin{cases} X(\omega) & \text{si} \quad X(\omega) \in [0,1/4] \cup [3/4,1]; \\ 1 - X(\omega) & \text{si} \quad X(\omega) \in]1/4, 3/4[. \end{cases}$$

1) Quelle est la loi de Y ?

2) Trouver la fonction de répartition de la variable aléatoire $Z := X + Y$ et vérifier que Z n'est ni discrète ni à densité.

Ex 13. *Une variable aléatoire tronquée*

Sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, X est une variable aléatoire de loi exponentielle. Soient a et b deux réels fixés $0 < a < b$. On définit sur le même espace $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, la variable aléatoire Y par

$$\forall \omega \in \Omega, \quad Y(\omega) := \begin{cases} 0 & \text{si } X(\omega) \leqslant a, \\ X(\omega) & \text{si } a < X(\omega) \leqslant b, \\ b & \text{si } X(\omega) > b. \end{cases}$$

1) Dessinez l'allure de la représentation graphique de la fonction de répartition de Y en justifiant brièvement votre dessin.

2) La variable aléatoire Y est-elle à densité ? Si oui, calculez cette densité.