Université Lille1
Sciences et Technologies

U.F.R. de Mathématiques
Licence de Mathématiques
S6, M66, année 2013-2014

Probabilités, fiche de T.D. n° 1

Ex 1. *Temps d'attente dans un rendez-vous*

Pierre et Paul ont rendez-vous entre 12h et 12h30. On discrétise le temps en minutes et on modélise cette situation par

$$\Omega = [\![1, 30]\!]^2,$$

le tirage $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ représentant la situation où Pierre arrive ω_1 minutes après 12h et où Paul arrive ω_2 minutes après 12h. On munit Ω de la tribu $\mathcal{P}(\Omega)$ et on fait l'hypothèse d'équiprobabilité.

1) Quelle est la probabilité de l'événement « Pierre et Paul arrivent en même temps » ?

2) Calculer la probabilité de l'événement « Pierre attend plus de 5 minutes » :

$$\{ \ (\omega_1, \omega_2) \in \Omega \ ; \ \omega_2 > \omega_1 + 5 \ \}.$$

Quelle est celle de l'événement « Pierre attend entre 5 et 15 minutes » (ces deux valeurs extrêmes étant exclues) ?

3) Quelle est la probabilité que Pierre et Paul arrivent avec k minutes de différence (pour $k \in [\![0, 29]\!]$) ?

4) Quelle autre modélisation aurait-on pu choisir ? Est-ce que cela aurait changé les probabilités des événements considérés ?

Indication globale : n'hésitez pas à faire des dessins !

Ex 2. *Intersection dénombrable d'évènements presque-sûrs*

Sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, on dispose d'une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'évènements tous de probabilité 1. On rappelle au passage qu'un évènement de probabilité 1 n'est pas forcément égal à Ω. Que peut-on dire de $P(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n)$?

Ex 3. *Une probabilité dégénérée*

Soit P une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathrm{Bor}(\mathbb{R}))$ ne prenant que les valeurs 0 et 1. Démontrer que c'est une mesure de Dirac.

Ex 4. *Trois trucs probabilistes classiques*

Soient f et g deux applications de Ω dans $\mathbb{R}$. Vérifiez les affirmations suivantes.

1) $\{\omega \in \Omega \ ; \ \max\big(f(\omega), g(\omega)\big) \geqslant \varepsilon\} = \Big\{\omega \in \Omega \ ; \ f(\omega) \geqslant \varepsilon\Big\} \cup \Big\{\omega \in \Omega \ ; \ g(\omega) \geqslant \varepsilon\Big\}.$

2) $\{\omega \in \Omega \ ; \ \min\big(f(\omega), g(\omega)\big) \geqslant \varepsilon\} = \Big\{\omega \in \Omega \ ; \ f(\omega) \geqslant \varepsilon\Big\} \cap \Big\{\omega \in \Omega \ ; \ g(\omega) \geqslant \varepsilon\Big\}.$

3) $\{\omega \in \Omega \ ; \ f(\omega) + g(\omega) \geqslant \varepsilon\} \subset \Big\{\omega \in \Omega \ ; \ f(\omega) \geqslant \dfrac{\varepsilon}{2}\Big\} \cup \Big\{\omega \in \Omega \ ; \ g(\omega) \geqslant \dfrac{\varepsilon}{2}\Big\}.$

Ex 5. *Écriture ensembliste d'une convergence*

On considère une suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1} : \Omega \to \mathbb{R}, \quad \omega \mapsto f_n(\omega)$. On pose pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$B_{\varepsilon,k} = \{\omega \in \Omega \ ; \ |f_k(\omega)| < \varepsilon\}.$$

1) On fixe $\varepsilon > 0$. Ecrire à l'aide d'opérations ensemblistes sur les $B_{\varepsilon,k}$, l'ensemble :

$$A_{\varepsilon,n} = \{\omega \in \Omega \ ; \ \forall k \geqslant n, \ |f_k(\omega)| < \varepsilon\}.$$

2) Même question pour :

$$A_\varepsilon = \{\omega \in \Omega \ ; \ \exists n(\omega), \ \forall k \geqslant n(\omega), \ |f_k(\omega)| < \varepsilon\}.$$

3) Montrer que l'ensemble :

$$A = \{\omega \in \Omega \ ; \ \lim_{k\to+\infty} f_k(\omega) = 0\}$$

peut s'écrire à l'aide d'opérations ensemblistes sur *une suite* d'ensembles du type $B_{\varepsilon,k}$.

Ex 6. *Mon secrétaire s'appelle Louis*[1]

Un secrétaire un peu distrait a tapé N lettres et préparé N enveloppes portant les adresses des destinataires, mais il répartit au hasard les lettres dans les enveloppes. Pour $1 \leqslant j \leqslant N$, on note A_j l'évènement *la j^e lettre se trouve dans la bonne enveloppe.*

1) Définir un espace de probabilité $(\Omega_N, \mathcal{P}(\Omega_N), P_N)$ associé à cette expérience aléatoire.

2) Calculer $P_N(A_j)$.

3) On fixe k entiers $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$ entre 1 et N. Dénombrer toutes les permutations σ sur $\{1, \ldots, N\}$ telles que $\sigma(i_1) = i_1$, $\sigma(i_2) = i_2$, $\ldots$, $\sigma(i_k) = i_k$. En déduire $P_N(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k})$.

4) On note B l'évènement *au moins une des lettres est dans la bonne enveloppe.* Exprimer B à l'aide des A_j.

5) Utiliser la formule de Poincaré pour calculer $P_N(B)$ et sa limite quand N tend vers l'infini.

Ex 7. *Jeu de franc carreau*

Sur une table plane un damier est peint. Il est carré, constitué de 100 cases, et chaque case est un carré de côté de longueur 2 cm. On jette sur ce damier un pion rond, de 1 cm de diamètre.

1) Quelle est la probabilité que le pion recouvre l'un des « noeuds » du quadrillage ? On appelle noeud l'intersection de deux lignes du quadrillage.

2) Quelle est la probabilité que le pion tombe entièrement dans une case ? On pourra modéliser cette épreuve aléatoire en considérant que le centre du pion suit une loi uniforme sur le damier.

1. Chanson de Michel Polnareff, 1968.

Ex 8. *Conditionnements multiples*

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé et $H \in \mathcal{F}$ un évènement tel que $P(H) \neq 0$. On note P_H la fonction d'ensembles définie par

$$\forall A \in \mathcal{F}, \quad P_H(A) := P(A \mid H).$$

On sait que P_H est une nouvelle probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$, on peut donc l'utiliser pour construire de nouvelles probabilités conditionnelles. On définit ainsi :

$$P(A \mid H_2 \mid H_1) := P_{H_1}(A \mid H_2).$$

1) Quelle condition doivent vérifier H_1 et H_2 pour que cette définition soit légitime ?

2) Exprimer $P(A \mid H_2 \mid H_1)$ sous la forme d'une probabilité conditionnelle relative à un seul évènement.

3) En déduire que $P(A \mid H_2 \mid H_1) = P(A \mid H_1 \mid H_2)$.

4) Généraliser la question 2) au cas de n évènements $H_1, \dots, H_n$ et justifier à l'aide de ces nouvelles notations l'appellation règle des conditionnements successifs vue en cours.

Ex 9. *Une inégalité injustement méconnue*

Sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, on note A un évènement quelconque et B un évènement tel que $0 < P(B) < 1$.

1) Montrez que

$$|P(A \cap B) - P(A)P(B)| \leqslant \frac{1}{4}\big|P(A \mid B) - P(A \mid B^c)\big|. \tag{1}$$

Indication : commencez par exprimer $P(A \mid B) - P(A \mid B^c)$ en fonction des seules probabilités $P(A \cap B)$, $P(A)$, $P(B)$.

2) Que donne l'inégalité (1) lorsque $A \subset B$?

3) Dans quels cas (1) est-elle une égalité ?

Ex 10. *Alcootest*

On s'intéresse à la fiabilité d'un alcootest pour automobilistes. Grâce à des études statistiques, sur un grand nombre d'automobilistes, on sait que 0,5% d'entre eux dépassent la dose d'alcool autorisée. Aucun test n'est fiable a 100%. Pour celui que l'on considère, la probabilité que le test soit positif quand la dose d'alcool autorisée est dépassée, et la probabilité que le test soit négatif quand elle ne l'est pas, valent toutes deux $p = 0{,}95$.

1) Quelle est la probabilité qu'un automobiliste ayant un test positif ait réellement dépassé la dose d'alcool autorisée ?

2) Quelle devrait être la valeur de p pour que cette probabilité soit de 95% ?

3) Un policier affirme : ce test est beaucoup plus fiable le samedi soir à la sortie des boites de nuit ! Sachant que la proportion d'automobilistes ayant trop bu est alors de 30%, déterminer s'il a raison.

Ex 11. *Le gardien ivre*

Un voleur se cache pour observer un veilleur de nuit ouvrir une porte. Il sait que le gardien est ivre un jour sur trois. Celui-ci a un trousseau de 10 clés. Les soirs d'ivresse il essaie une clé au hasard, la remet si elle n'ouvre pas la porte et recommence, en essayant éventuellement plusieurs fois la même. . .Lorsqu'il est à jeun au contraire, il prend soin de séparer les clés déjà essayées.

La porte ayant été ouverte au 8^e^ essai, le voleur en déduit que le veilleur de nuit est ivre et décide de tenter son coup. Quelle probabilité a-t-il de se tromper ? Que pensez-vous de la stratégie du voleur ?

Ex 12. *Tirer au hasard un nombre décimal*

On décide de « tirer au hasard » un réel $x \in [0, 1[$. On procède de telle façon que chaque chiffre de son développement décimal illimité a, indépendamment des autres, une chance sur dix d'être nul.
Pour chaque i de $\mathbb{N}^*$ on note N_i l'évènement :

$$N_i = \{\text{le } i^{\text{e}} \text{ chiffre après la virgule est un zéro}\}.$$

Les N_i sont indépendants et tous de probabilité $\frac{1}{10}$.
On rappelle qu'un réel x est un nombre décimal s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $x = k.10^{-n}$.

1) Exprimer de façon ensembliste (en fonction de N_i) les évènements :

$$D_n = \{\text{l'écriture de } x \text{ ne comporte que des zéros à partir du rang } n\},$$
$$D = \{x \text{ est un nombre décimal}\},$$
$$E = \{\text{l'écriture de } x \text{ comporte une infinité de zéros}\}.$$

Comparer D et E.

2) Donner $P(\{x < 10^{-4}\})$. Les N_i, $i \in \mathbb{N}^*$, sont-ils deux à deux disjoints ?

3) Calculer la probabilité de

$$F_n = \{\text{le premier chiffre non-nul après la virgule est au rang } n\}.$$

Les F_n, $n \in \mathbb{N}^*$, sont-ils deux à deux disjoints ?

4) Ecrire $\bigcup_{i=1}^{+\infty} N_i^c$ à l'aide des F_n et calculer sa probabilité. En déduire $P(\{x = 0\})$.

5) Pour $m \in \mathbb{N}^*$, calculer la valeur de $P(D_m)$. On pourra utiliser la monotonie de la suite $(G_n)_{n \geqslant m}$ où $G_n = \displaystyle\bigcap_{i=m}^{n} N_i$.

6) Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre décimal avec ce type de tirage aléatoire ?

Ex 13. *Pile ou face triphasé*

Trois personnes nommées A, B, C lancent à tour de rôle la même pièce de monnaie (ABCABCABC. . .). La probabilité d'obtenir pile lors d'un lancer est $p \in]0, 1[$. Le gagnant est le premier qui obtient pile (la partie *s'arrête* alors).

1) On note A_n (resp. B_n, C_n) l'évènement A *gagne la partie lors du* n^{e} *lancer* (resp. B, C). Calculer $P(A_1)$, $P(B_2)$, $P(C_3)$. Les évènements A_1 et B_2 sont-ils indépendants ?

2) En discutant suivant les valeurs de n, calculer $P(A_n)$, $P(B_n)$, $P(C_n)$.

3) Calculer la probabilité de gagner de chacun des trois joueurs.

4) Quelle est la probabilité qu'il y ait un vainqueur ? Conclure.

Ex 14. *Probabilité de gagner un jeu sur son service au tennis*

On considère le modèle simplifié suivant du jeu de tennis [2] : le joueur A est au service et affronte B. Un « jeu » est constitué d'un certain nombre d'« échanges » et à la fin de chaque « échange », celui des deux joueurs qui a gagné l'échange marque un point. Le joueur qui gagne le « jeu » est le premier à totaliser au moins 4 points *avec* au moins deux points d'avance sur son adversaire. A peut donc gagner le jeu sur le score de 4 à 0, 4 à 1, 4 à 2, 5 à 3, 6 à 4, ... On suppose que tous les échanges sont indépendants et que lors de chaque échange, la probabilité pour A de gagner le point reste constante et vaut p. Notre objectif est de calculer en fonction de p la probabilité que A remporte le jeu. On introduit les notations d'évènements suivantes.

$$\begin{aligned} G &= \{A \text{ gagne le jeu}\}, \\ A_n &= \{\ A \text{ gagne le } n^{\text{e}} \text{ échange }\}, \\ B_n &= \{\ B \text{ gagne le } n^{\text{e}} \text{ échange }\}, \\ E_{i,j} &= \{\text{Au bout de } i+j \text{ échanges, } A \text{ a } i \text{ points et } B \text{ en a } j\}. \end{aligned}$$

1) Expliquez la décomposition

$$G = E_{4,0} \cup E_{4,1} \cup E_{4,2} \cup \Big(\bigcup_{k=3}^{+\infty} E_{k+2,k} \Big).$$

2) Calculer $P(E_{4,0})$, $P(E_{4,1})$ et $P(E_{4,2})$. *Indication :* on remarquera que $E_{4,1} = A_5 \cap E_{3,1}$ et $E_{4,2} = A_6 \cap E_{3,2}$ et on utilisera l'indépendance des échanges.

3) Expliquer pourquoi pour tout $k \geqslant 3$, on a :

$$E_{k+2,k} = E_{3,3} \cap \Big(\bigcap_{j=4}^{k} C_j \Big) \cap A_{2k+1} \cap A_{2k+2},$$

où l'on a posé $C_j := (A_{2j-1} \cap B_{2j}) \cup (B_{2j-1} \cap A_{2j})$.

4) Calculer $P(E_{3,3})$, puis $r = P(C_j)$. En déduire $P(E_{k+2,k})$.

5) Montrer que les $E_{k+2,k}$ sont deux à deux disjoints et calculer $P\Big(\bigcup_{k\geqslant 3} E_{k+2,k} \Big)$.

6) En déduire $P(G)$.

7) L'évènement $N = \{\text{le jeu continue indéfiniment sans vainqueur}\}$ s'écrit :

$$N = E_{3,3} \cap \Big(\bigcap_{j=4}^{+\infty} C_j \Big).$$

Montrer que sa probabilité est nulle.

2. Il n'est pas nécessaire de connaître les règles classiques du tennis pour faire cet exercice. Elles sont rappelées dans l'énoncé sous une forme permettant de simplifier les écritures.

8) Compte tenu du résultat de la question précédente, pouvez vous donner sans calcul la valeur de $P(G)$ lorsque $p = 1/2$? Utilisez cette réponse pour tester la formule trouvée à la question 6.