Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

CAPES-M1 **Année 2010-2011**

Fiche de T.D. n° 6

Ex 1. *La méthode de Monte-Carlo pour le calcul d'intégrales*

Soit $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On se propose de donner une valeur approchée de

$$I := \int_0^1 h(x)\,\mathrm{d}x,$$

par une méthode probabiliste appelée « méthode de Monte-Carlo ». Pour cela on utilise la simulation informatique d'une suite $(U_i)_{i\geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes et de même loi uniforme sur $[0,1]$. On pose

$$S_n := \sum_{i=1}^{n} h(U_i).$$

1) Expliquer pourquoi $X_1 := h(U_1)$ est intégrable, *i. e.* $\mathbf{E}|X_1| < +\infty$, et exprimer son espérance à l'aide de l'intégrale I.

2) En vous appuyant sur un théorème du cours, montrer que

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} I.$$

On détaillera soigneusement la vérification des hypothèses dudit théorème.

Ce résultat légitime pour n « grand » l'approximation de I par la valeur $S_n(\omega)/n$ calculée à partir de l'échantillon généré par l'ordinateur. On s'intéresse maintenant au contrôle de l'erreur d'approximation.

3) Expliquer pourquoi X_1 est de carré intégrable et exprimer sa variance σ^2 à l'aide d'intégrales de la fonction h. Est-il raisonnable dans ce contexte de supposer σ connue ?

4) En utilisant le théorème limite central, proposer un intervalle centré sur $\frac{S_n}{n}$ et contenant I avec une probabilité de 95% (cet intervalle étant de longueur minimale et en négligeant l'erreur due à l'approximation gaussienne).

5) Cet intervalle dépendant de la quantité inconnue σ, n'est pas utilisable en pratique. Expliquer comment résoudre ce problème en majorant σ si on connaît un majorant M de $\sup_{x\in[0,1]} |h(x)|$.

6) Proposer de même un intervalle de confiance avec « variance estimée » en vous appuyant sur un théorème vu en cours. Pour cela on complète en pratique le programme de calcul de S_n/n en lui faisant calculer en plus la quantité

$$W_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h(U_i)^2.$$

Ex 2. *Un T.P. auquel vous avez échappé, du coup on le fait à l'envers*

Voici les questions d'un exo de T.P. (contentez vous de les lire dans un premier temps, sans machine vous pouvez répondre à l'indication de la question 1 et à la question 3).

1) Calculez numériquement par la méthode de Monte-Carlo l'intégrale

$$I = \int_0^{+\infty} x^2 \sin x \, \mathrm{e}^{-x} \, \mathrm{d}x.$$

Indication : commencez par écrire I sous la forme $I = \mathbf{E}g(X)$ où X suit une loi facile à simuler.

2) Donnez un intervalle de confiance au niveau 98% pour la valeur de I.

3) Comparez avec la *vraie* valeur de I, que vous savez calculer bien sûr [1] !

Voici un script Scilab présenté dans le corrigé, pour répondre aux questions 1) et 2).

```
// calcul de l'integrale
// I = \int_0^\infty x^2 \sin x e^{-x} dx
 // par méthode de Monte-Carlo
n=800000 ; X= -log(rand(1:n,"uniform")); // echantillon de loi Exp(1)
// I estime par Ie moyenne arithmetique des Y_i=X_i^2\sin X_i
Y=(X.^2).*sin(X); Ie = sum(Y)/n ;
printf('\n Valeur estimee de l''integrale I :\n %.6f',Ie)
// intervalle de confiance avec variance estimee
// variance empirique V
V = sum(Y.^2)/n - Ie^2;
// calcul des bornes de l'intervalle de confiance à 98%
// Ie (+ ou -) t(V/n)^{1/2}
t=cdfnor("X",0,1,0.99,1-0.99); // calcul du quantile Phi^{-1}(0.99)
c = t.*(V/n)^0.5 ; a = Ie - c; b = Ie +c;
printf('\n Intervalle de confiance au niveau 98\% pour I : \n...
[%.4f, %.4f] \n',a,b)
```

Voici maintenant une copie d'écran des trois première exécutions de ce script.

```
-->;exec("/home/suquet/Enseignement/Agreg-ext/TP/MonteCarlo1.sce");

 Valeur estimee de l'integrale I :
 0.499988
 Intervalle de confiance au niveau 98% pour I :
[0.4910, 0.5090]

-->;exec("/home/suquet/Enseignement/Agreg-ext/TP/MonteCarlo1.sce");
```

1. cet exercice n'avait d'autre intérêt que pédagogique et l'emploi de la méthode de Monte-Carlo pour calculer I n'est pas pertinente puisqu'on sait ici calculer facilement la vraie valeur de I

```
 Valeur estimee de l'integrale I :
 0.499471
 Intervalle de confiance au niveau 98% pour I :
[0.4906, 0.5083]

-->;exec("/home/suquet/Enseignement/Agreg-ext/TP/MonteCarlo1.sce");

 Valeur estimee de l'integrale I :
 0.504377
 Intervalle de confiance au niveau 98% pour I :
[0.4955, 0.5132]
```

Expliquez ce que fait le script et proposez les justifications mathématiques qui vous paraîssent pertinentes.

Ex 3. *Un calcul d'espérance par la méthode de Monte-Carlo*

On marque deux points « au hasard » A et B dans le carré unité $[0,1]^2$. On note $Z = AB$ leur distance euclidienne. Le choix « au hasard » signifie ici suivant la loi uniforme sur le carré.

1) Exprimez $\mathbf{E}Z$ comme une intégrale multiple.

2) Expliquez comment on peut obtenir une approximation numérique de $\mathbf{E}Z$ par la méthode de Monte-Carlo et proposer un intervalle de confiance pour le résultat obtenu.

Voici un script Scilab, suivi d'une copie d'écran des trois premières exécutions.

```
// Esperance de la distance de deux points pris au hasard
// dans le carre unite, par methode de Monte Carlo
n= 200000;
U = rand(n,4,"uniform");
Z = ((U(:,3)-U(:,1)).^2 + (U(:,4)-U(:,2)).^2 ).^(0.5);
E = sum(Z)/n;
printf('\n Estimation de l''esperance EZ de la distance AB : %.4f',E)
// intervalle de confiance avec variance estimee
// variance empirique V
V = sum(Z.^2)/n - E^2;
// calcul des bornes de l'intervalle de confiance à 98%
// Ie (+ ou -) t(V/n)^{1/2}
t=cdfnor("X",0,1,0.975,1-0.975); // calcul du quantile Phi^{-1}(0.975)
c = t.*(V/n)^0.5 ;
a = E - c;  b = E +c;
printf('\n Intervalle de confiance au niveau 95\% pour EZ :\n...
[%.4f, %.4f] \n',a,b)
```

Voici une copie d'écran de 3 exécutions consécutives du script.

```
-->;exec("/home/suquet/Enseignement/Agreg-ext/TP/MonteCarlo2.sce");

 Estimation de l'esperance EZ de la distance AB : 0.5206
 Intervalle de confiance au niveau 95% pour EZ :
[0.5196, 0.5217]

-->;exec("/home/suquet/Enseignement/Agreg-ext/TP/MonteCarlo2.sce");

 Estimation de l'esperance EZ de la distance AB : 0.5211
 Intervalle de confiance au niveau 95% pour EZ :
[0.5200, 0.5222]

-->;exec("/home/suquet/Enseignement/Agreg-ext/TP/MonteCarlo2.sce");

 Estimation de l'esperance EZ de la distance AB : 0.5219
 Intervalle de confiance au niveau 95% pour EZ :
[0.5208, 0.5230]
```

Remarque. S'il est difficile de calculer explicitement $\mathbf{E}Z$, il n'en va pas de même pour $\mathbf{E}Z^2$ et on peut vérifier (exercice) que $\mathbf{E}Z^2 = 1/3$. Ceci peut servir pour fournir un intervalle de confiance avec variance majorée, puisque $\mathbf{E}Z^2$ est un majorant de la variance de Z.