Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

CAPES-M1 **Année 2010-2011**

Fiche de T.D. n° 4

Ex 1. *Mise en confiance ?*

Dans un centre de tri postal, on voudrait connaître la proportion p de lettres affranchies au tarif « lettre prioritaire 20g » et dont la masse est strictement supérieure à 20g. Dans ce but, on prélève 100 lettres au hasard et on pèse chacune. Les résultats obtenus sont rassemblés dans le tableau suivant.

20,01	19,85	20,04	16,49	19,60	17,80	19,15	17,57	20,67	15,98
16,92	13,53	19,12	20,12	17,74	17,52	17,28	19,11	21,02	17,65
19,15	16,38	18,91	15,90	18,85	21,37	19,73	19,29	16,88	15,69
18,82	16,44	17,11	15,63	23,43	18,29	18,24	18,77	17,21	13,02
18,25	18,45	19,02	18,57	18,89	20,79	15,93	17,02	16,13	14,05
19,69	20,74	16,28	17,53	17,88	18,34	15,81	17,17	20,20	17,20
15,70	15,60	19,41	18,48	13,25	20,02	19,97	18,41	19,60	15,97
19,46	19,95	17,25	15,07	18,45	19,48	16,31	20,97	17,37	18,75
16,30	14,73	14,57	14,26	20,77	20,43	18,78	17,96	16,38	19,29
19,08	20,88	18,23	22,19	15,96	20,21	20,44	18,03	19,21	19,32

Proposez deux intervalles de confiance pour p au niveau 95% en expliquant comment vous les avez obtenus et en indiquant les théorèmes qui les justifient.

Ex 2. *Sur le max de gaussiennes*

1) Soit X une variable aléatoire gaussienne de loi $\mathfrak{N}(0,1)$. Montrez que

$$\forall t > 0, \quad P(|X| \geq t) \leq \exp\left(\frac{-t^2}{2}\right). \tag{1}$$

Indication : partir de $P(X \geq t) = \int_t^{+\infty} (2\pi)^{-1/2} \exp(-x^2/2)\,\mathrm{d}x$ et ramener cette intégrale à $\int_0^{+\infty}$ par changement de variable.

2) Soit $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de v.a. gaussiennes de même loi $\mathfrak{N}(0,1)$. Utilisez (1) pour majorer $P(\max_{k\leq n} |X_k| \geq t)$ pour $t > 0$ et en déduire que :

$$\forall s > \sqrt{2}, \quad P\Big(\max_{k\leq n} |X_k| \geq s(\ln n)^{1/2}\Big) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0. \tag{2}$$

3) Proposez une constante c, la plus petite que vous puissiez trouver parmi les décimaux à trois chiffres après la virgule, telle que

$$P\Big(\max_{k\leq 10^6} |X_k| < c\Big) \geq 0,999999.$$

4) On suppose en plus que les X_k sont indépendantes. Montrez que :

$$\forall t > 0, \quad P\Big(\max_{k\leq n} |X_k| \geq t\Big) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

Donnez un exemple simple où les X_k ne sont pas indépendantes et où cette convergence vers 1 n'a pas lieu.

Ex 3. *Un modèle simple pour le mélange de deux gaz*
Un récipient hermétique de 2 litres est séparé en deux parties symétriques « gauche » et « droite » par une cloison hermétique munie d'une vanne à large ouverture. La vanne étant fermée, la partie gauche du récipient contient au départ 1 litre d'oxygène et sa partie droite 1 litre d'azote le tout à la pression atmosphérique. On ouvre la vanne de la cloison intermédiaire et on laisse s'effectuer le mélange, puis au bout d'un temps suffisant on ferme la vanne. On mesure alors la proportion d'azote et d'oxygène dans la partie gauche et on constate *expérimentalement* qu'elles sont égales. Le but de cet exercice est l'étude d'un modèle simple permettant de prévoir ce phénomène.

Les molécules étant agitées d'un mouvement incessant, on suppose qu'après fermeture de la vanne, chaque molécule a une probabilité $1/2$ de se trouver dans la partie gauche du récipient. On dispose de n molécules d'oxygène et n d'azote. On indexe les molécules d'oxygène de 1 à n et celles d'azote de $n+1$ à $2n$. On note X_i la variable de Bernoulli indicatrice de l'événement *la i-ème molécule se trouve dans la partie gauche après fermeture de la vanne.* On suppose les X_i *indépendantes.* On pose :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i, \qquad T_n = \sum_{i=n+1}^{2n} X_i.$$

La variable S_n est donc le nombre aléatoire de molécules d'oxygène et T_n celui des molécules d'azote dans la partie gauche après fermeture.

1) Quelle est la loi exacte de S_n, son espérance et sa variance (en fonction de n) ? On a clairement les mêmes résultats pour T_n.

2) Soit $x > 0$ un nombre fixé. On considère l'événement

$$A = \Big\{ \frac{n}{2} - \frac{x}{2}\sqrt{n} \leq S_n \leq \frac{n}{2} + \frac{x}{2}\sqrt{n} \Big\}.$$

En utilisant le théorème de De Moivre-Laplace, montrer que l'on peut approximer $P(A)$ par $2\Phi(x) - 1$ où Φ est la fonction de répartition de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. On a bien sûr le même résultat pour $P(B)$, avec

$$B = \Big\{ \frac{n}{2} - \frac{x}{2}\sqrt{n} \leq T_n \leq \frac{n}{2} + \frac{x}{2}\sqrt{n} \Big\}.$$

3) On suppose désormais que $n - x\sqrt{n} > 0$. On s'intéresse à l'événement

$$C = \Big\{ \frac{n - x\sqrt{n}}{n + x\sqrt{n}} \leq \frac{T_n}{S_n} \leq \frac{n + x\sqrt{n}}{n - x\sqrt{n}} \Big\}.$$

Montrer que $A \cap B \subset C$.

4) En négligeant l'erreur due à l'approximation gaussienne, proposer à l'aide de $\Phi(x)$ une majoration de $P(A^c \cup B^c)$. En déduire une *minoration* de $P(C)$. On exprimera simplement le résultat final en fonction de la quantité $R(x) = (1 - \Phi(x))$.

5) Application numérique : $n = 10^{22}$, $x = 10$. On utilisera la formule d'encadrement de $1 - \Phi(x)$ pour les « très grandes valeurs de x » fournie à la fin des tables. Commentez le résultat obtenu.

Ex 4. *Une application du théorème de Berry-Esséen*

On rappelle l'énoncé du théorème de Berry-Esséen.

Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. telle que $\mathbf{E}|X_i|^3 < +\infty$. On note $\sigma^2 := \operatorname{Var} X_1$, $\rho^3 := \mathbf{E}|X_1 - \mathbf{E}X_1|^3$, avec $\sigma > 0$ et $\rho > 0$. On note aussi $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$, $S_n^* := (S_n - \mathbf{E}S_n)(\operatorname{Var} S_n)^{-1/2}$. Il existe alors une constante universelle $C > 0$ telle que pour tout $n \geq 1$,

$$\Delta_n := \sup_{x\in\mathbb{R}} \bigl|\mathbf{P}(S_n^* \leq x) - \Phi(x)\bigr| \leq C \frac{\rho^3}{\sigma^3} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

On peut prendre $C = 0,798$.

1) On considère maintenant une suite $((\Omega_n, \mathcal{F}_n, P_n))_{n\geq 1}$ d'espaces probabilisés et sur chaque Ω_n une suite finie $(X_{n,i})_{1\leq i\leq n}$ de variables aléatoires P_n-i.i.d. ayant un moment absolu d'ordre 3 fini ($\mathbf{E}_n|X_{n,1}|^3 < +\infty$). On pose $S_n := \sum_{i=1}^n X_{n,i}$ et on définit S_n^* comme ci-dessus. En utilisant l'inégalité de Berry-Esséen, donnez une condition suffisante pour que S_n^* converge en loi vers vers $\mathfrak{N}(0, 1)$.

2) On suppose désormais que S_n est une variable aléatoire de loi binomiale de paramètres n et p_n. En utilisant ce qui précède montrez que S_n^* converge en loi vers $\mathfrak{N}(0, 1)$ si p_n converge vers $p \in]0, 1[$ ou si p_n tend vers zéro mais pas trop vite (précisez comment). Que se passe-t-il si $p_n \sim cn^{-1}$?

Ex 5. *Différence de sommes*

On suppose que les deux suites de variables aléatoires $(X_i)_{i\geq 1}$ et $(Y_i)_{i\geq 1}$ sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et vérifient les hypothèses suivantes :

a) chacune de ces suites est i.i.d. ;
b) X_i et Y_i sont de carré intégrable, $\mathbf{E}X_i =: m_1$, $\mathbf{E}Y_i =: m_2$, $\operatorname{Var} X_i =: \sigma_1^2 > 0$, $\operatorname{Var} Y_i =: \sigma_2^2 > 0$;
c) les suites $(X_i)_{i\geq 1}$ et $(Y_i)_{i\geq 1}$ sont indépendantes l'une de l'autre, ce qui implique notamment que pour toute fonction mesurable $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(g(X_i, Y_i))_{i\geq 1}$ est une suite de v.a. indépendantes et aussi que pour tout $i \geq 1$, X_i et Y_i sont indépendantes.

On pose pour tout $n \geq 1$, $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$, $\quad T_n := \sum_{i=1}^n Y_i$.

1) On suppose que $m_2 > m_1$. Expliquez pourquoi

$$W_n := \frac{1}{\sqrt{n}}\bigl(T_n - S_n\bigr) \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} +\infty.$$

Indication : pensez à la loi forte des grands nombres.

2) On suppose maintenant que $m_1 = m_2$. On pose $Z_1 := Y_1 - X_1$. Quelle est la variance de Z_1 ? Montrez que W_n converge en loi vers une v.a. gaussienne dont on précisera les paramètres.

Table des valeurs de Φ, f.d.r. de la loi normale standard $\mathfrak{N}(0,1)$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5754
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6627	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7122	0.7156	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7356	0.7389	0.7421	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7703	0.7734	0.7764	0.7793	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8079	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8414	0.8438	0.8461	0,8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8622
1.1	0.8643	0.8665	0.8687	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0,8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9083	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9193	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9485	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9648	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9874	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9895	0.9898	0.9901	0.9903	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9924	0.9926	0.9928	0.9930	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9944	0.9946	0.9948	0.9949	0,9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9958	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986

Table pour les grandes valeurs de x

x	3.0	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.8	4.0	4.5
$\Phi(x)$	0.99865	0.99904	0.99931	0.99952	0.99966	0.99976	0.999841	0.999928	0.999968	0.999997