Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

CAPES-M1 **Année 2010-2011**

Fiche de T.D. n° 3

Ex 1. *Escargot aléatoire*

Soit $(X_i)_{i\in\mathbf{N}^*}$ une suite de variables aléatoires, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, indépendantes et de même loi, de carré intégrable ($\mathbf{E}(X_1^2) < +\infty$). On définit par récurrence la suite de variables aléatoires positives $(R_n)_{n\geq 1}$ par

$$R_1 = |X_1|, \quad R_n = \sqrt{R_{n-1}^2 + X_n^2}, \quad n \geq 2.$$

1) Montrer que $(n^{-1/2}R_n)_{n\geq 1}$ converge presque sûrement vers une limite constante τ que l'on exprimera en fonction de $\mathbf{E}(X_1^2)$.

2) Pour illustrer graphiquement cette convergence, on prend les X_i de même loi uniforme sur $[0,1]$ et on construit dans un repère orthonormé du plan la suite $(M_n)_{n\geq 1}$ de points aléatoires par la récurrence suivante. On pose d'abord $M_1 = (X_1, 0)$, puis connaissant M_{n-1} on obtient M_n comme l'unique point tel que $M_{n-1}M_n = X_n$ et que l'angle $(\overrightarrow{M_{n-1}M_n}, \overrightarrow{M_{n-1}O})$ ait pour mesure $+\pi/2$. En d'autre termes, on construit M_n tel que le triangle $OM_{n-1}M_n$ soit rectangle en M_{n-1}, de côtés de l'angle droit $OM_{n-1} = R_{n-1}$ et $M_{n-1}M_n = X_n$ et en tournant toujours dans le sens trigonométrique. On trace ainsi la ligne polygonale $\mathcal{E}_n$ de sommets $M_1, M_2, \ldots, M_n$ (l'escargot aléatoire, cf. figure 1).

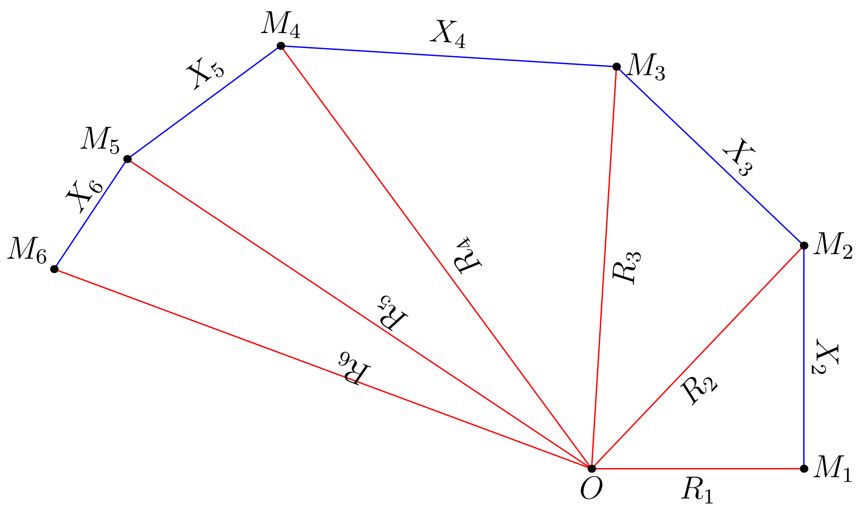

Figure 1 – Construction de l'escargot aléatoire $\mathcal{E}_6$

On fixe un $\varepsilon > 0$. Montrer que presque sûrement, $\mathcal{E}_n$ est inclus dans le disque de centre O et de rayon $(1+\varepsilon)\sqrt{n/3}$ pour tout n assez grand (cf. figure 2).

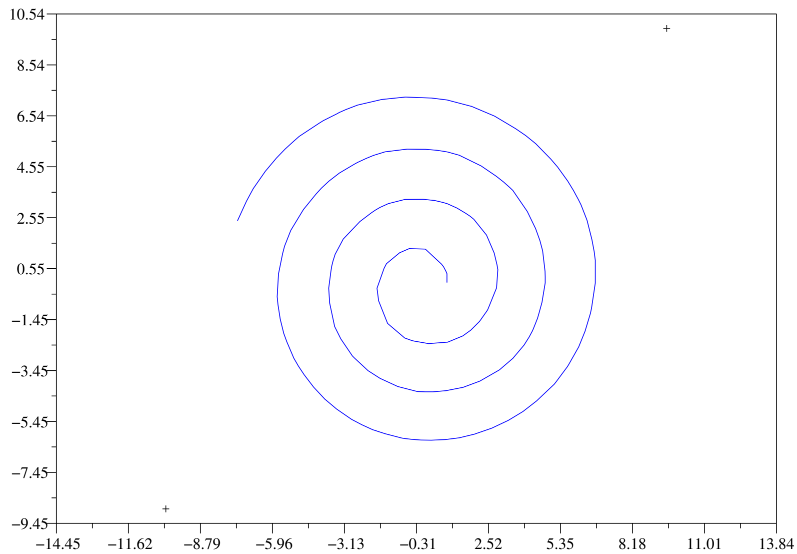

FIGURE 2 – Escargot aléatoire $\mathcal{E}_{200}$ (simulation en Scilab)

Ex 2.

Soit $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, indépendantes et de même loi. Montrez que

$$Y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{X_k}{1+|X_k|}$$

converge presque-sûrement quand n tend vers l'infini vers une constante $c \in [-1,1]$.

Ex 3.

Toutes les variables aléatoires considérées dans cet exercice sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

1) Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$ et $X := \ln U$. Trouver la fonction de répartition et la densité de la variable aléatoire X. Calculer $\mathbf{E}X$.

2) Soit $(U_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi uniforme sur $[0,1]$. On note

$$T_1 = U_1,\ T_2 := \sqrt{U_1U_2}, \ldots\ldots,\ T_n := (U_1U_2\ldots U_n)^{1/n}.$$

En utilisant la loi forte des grands nombres, montrer que T_n converge presque sûrement vers $\exp(\mathbf{E}X)$.

3) En déduire que la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} U_1U_2\ldots U_n$$

converge presque sûrement. *Indication* : on pourra comparer avec une série géométrique en remarquant que $\mathbf{E}X < 0$.

4) Soit S la somme de cette série. Calculer $\mathbf{E}S$ (en justifiant votre réponse).

Ex 4. *Convergence en probabilité de gaussiennes*

Soit $(Y_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, gaussiennes de loi $\mathfrak{N}(c, \sigma_n)$, où la constante c ne dépend pas de n. Montrez que Y_n converge en probabilité vers c si et seulement si σ_n tend vers 0.

Ex 5. *Questions élémentaires sur la convergence en loi*

1) Montrez que si X_n converge en loi vers une constante c, elle converge aussi en probabilité.

2) Soit $(U_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires où chaque U_n suit la loi uniforme sur l'ensemble fini $\{k/n,\, 0 < k \leq n\}$. Étudiez la convergence en loi de U_n, de deux façons (avec la définition par les f.d.r. et avec celle par les moments fonctionnels).

3) Soit $(U_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires où chaque U_n suit la loi uniforme sur l'intervalle $[1, 1 + 1/n]$. Étudiez la convergence en loi de U_n.

4) Soit $(Y_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires gaussiennes de loi $\mathfrak{N}(0, \sigma_n)$, avec σ_n tendant vers l'infini. Étudiez la convergence de la suite des fonctions de répartitions. Y-a-t-il convergence en loi ?

Ex 6.

Soit $(c_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels tendant vers $+\infty$, a une constante et $(Y_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires telle que $c_n(Y_n - a)$ converge en loi.

1) Montrez qu'une fonction de répartition quelconque a des points de continuité aussi grands que l'on veut en valeur absolue.

2) Montrez que Y_n converge en probabilité vers a.

3) Application : le théorème de de Moivre Laplace implique la loi faible des grands nombres pour les fréquences.

Ex 7. *Estimation d'un paramètre de loi uniforme*

Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de varaibles aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $[0, \theta]$, $\theta > 0$. On pose $M_n = \max_{1\leq i\leq n} X_i$.

1) Montrez que M_n converge presque-sûrement vers θ.

2) Montrez que $n(\theta - M_n)$ converge en loi et déterminez la loi limite par sa f.d.r.

Ex 8.

On considère la variable aléatoire X (non p.s. constante) et une suite $(X_k)_{k\geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes et de même loi que X. On suppose de plus que X est de carré intégrable et que

$$\frac{1}{\sqrt{2}}X_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}X_2 \text{ a même loi que } X. \tag{1}$$

Le but de cet exercice est de montrer que ces propriétés caractérisent une loi classique.

1) Montrez que nécessairement, $\mathbf{E}X = 0$.

2) Expliquez pourquoi

$$T_n := 2^{-n/2} \sum_{k=1}^{2^n} X_k$$

a même loi que X.

3) On pose $\sigma^2 = \mathbf{E}X^2$, $\sigma > 0$. Montrez que $\sigma^{-1}T_n$ converge en loi et précisez la loi limite. Même question pour T_n.

4) Quelle est la loi de X ?