Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

CAPES-M1 **Année 2010-2011**

Fiche de T.D. n° 1

Ex 1. *Conditionnements multiples*
Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé et $H \in \mathcal{F}$ un évènement tel que $P(H) \neq 0$. On note P_H la fonction d'ensembles définie par

$$\forall A \in \mathcal{F}, \quad P_H(A) := P(A \mid H).$$

On sait que P_H est une nouvelle probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$, on peut donc l'utiliser pour construire de nouvelles probabilités conditionnelles. On définit ainsi :

$$P(A \mid H_2 \mid H_1) := P_{H_1}(A \mid H_2).$$

1) Quelle condition doivent vérifier H_1 et H_2 pour que cette définition soit légitime ?

2) Exprimer $P(A \mid H_2 \mid H_1)$ sous la forme d'une probabilité conditionnelle relative à un seul évènement.

3) En déduire que $P(A \mid H_2 \mid H_1) = P(A \mid H_1 \mid H_2)$.

4) Généraliser la question 2) au cas de n évènements $H_1, \dots, H_n$ et justifier à l'aide de ces nouvelles notations l'appellation règle des conditionnements successifs vue en cours.

Ex 2. *Code de la Route I*
Pour l'examen du Code de la Route, les candidats doivent remplir un questionnaire de 40 questions en choisissant pour chacune d'elles l'une des 4 réponses proposées, dont une seule est exacte. Un candidat totalement ignorant décide de tenter sa chance en cochant complètement au hasard une réponse pour chaque question.

1) Quelle est la loi du nombre S de bonnes réponses du candidat ? Justifiez votre réponse.

2) Calculer $\mathbf{P}(S \geq 36)$.

Ex 3. *Code de la Route II*
Le modèle précédent est trop simpliste, en voici un plus réaliste. Le candidat n'est pas complètement ignorant et il arrive qu'il connaîsse la réponse à certaines questions. Il répond alors à coup sûr. S'il ignore la réponse, il choisit au hasard entre les 4 réponses proposées. On suppose toutes les questions indépendantes et que pour chacune de ces questions, la probabilité que le candidat connaisse la vraie réponse est p. Ce paramètre p mesure donc le vrai niveau du candidat. Malheureusement il n'est pas connu de l'examinateur. On définit les variables aléatoires suivantes :

S nombre de réponses connues du candidat ;
T nombre de bonnes réponses obtenues au hasard ;
U nombre total de bonnes réponses ($U = S + T$) ;
V nombre de mauvaises réponses ($S + T + V = 40$).

1) Quelle est la loi de S ?

2) On note B_i l'évènement « le candidat donne la bonne réponse à la $i^{\text{ième}}$ question ». Calculer $\mathbf{P}(B_i)$ en fonction de p (on conditionnera par les deux cas possibles).

3) En déduire la loi de U, puis celle de V.

4) Utiliser une méthode analogue pour trouver la loi de T.

Ex 4. *Épreuves répétées à trois issues.*

On considère une suite de n épreuves répétées indépendantes avec pour chaque épreuve trois résultats possibles : A avec probabilité a, B avec probabilité b ou C avec probabilité c ($a + b + c = 1$). On notera respectivement A_i, B_i et C_i les événements obtention du résultat A (respectivement, B, C) à la i-ème épreuve.

1) Dans cette question, $n = 5$. Quelle est la probabilité d'obtenir dans cet ordre 2 A suivis d'un B et de 2 C ? Quelle est celle d'obtenir (sans condition d'ordre) 2 A, 1 B et 2 C ?

2) Généraliser en montrant que la probabilité d'obtenir au cours des n épreuves (et sans condition d'ordre) i résultats A, j résultats B et k résultats C ($i+j+k = n$) vaut :

$$\frac{n!}{i!\,j!\,k!}a^i b^j c^k.$$

Ex 5. *Code de la Route III*

On reprend les notations et les hypothèses de l'exercice 3. Ce que peut réellement observer l'examinateur, c'est la valeur prise par U (ou ce qui revient au même par V). Les quantités intéressantes pour tirer des conclusions sur le niveau réel du candidat sont les $\mathbf{P}(S = i \mid U = m)$ pour $i \leq m \leq 40$. Par exemple si le candidat a obtenu 38 bonnes réponses, on aimerait évaluer $\mathbf{P}(S \geq 36 \mid U = 38)$.

1) Expliquer pourquoi pour $i \leq m \leq 40$,

$$\mathbf{P}(S = i, U = m) = \mathbf{P}(S = i, T = m - i, V = 40 - m).$$

2) En utilisant le résultat de l'exercice 4, en déduire en fonction de i, m et p, l'expression de $\mathbf{P}(S = i \mid U = m)$.

3) En déduire l'expression de $\mathbf{P}(S \geq 36 \mid U = 38)$.

Ex 6. Trois personnes nommées A, B, C lancent à tour de rôle la même pièce de monnaie (ABCABCABC...). La probabilité d'obtenir pile lors d'un lancer est p ($0 < p < 1$). Le gagnant est le premier qui obtient pile (la partie *s'arrête* alors).

1) On note A_n (resp. B_n, C_n) l'événement *A gagne la partie lors du n-ième lancer* (resp. B, C). Calculer $P(A_1)$, $P(B_2)$, $P(C_3)$. Les événements A_1 et B_2 sont-ils indépendants ?

2) En discutant suivant les valeurs de n, calculer $P(A_n)$, $P(B_n)$, $P(C_n)$.

3) Calculer la probabilité de gagner de chacun des trois joueurs.

4) Quelle est la probabilité qu'il y ait un vainqueur ? Conclure.

Ex 7. *La loi multinomiale*

1) Montrer que le nombre N de façons de répartir une population de n individus en k groupes d'effectifs respectifs $n_1, \dots, n_k$ où $n_1 + \dots + n_k = n$ est :

$$N = \frac{n!}{n_1! \dots n_k!}$$

2) En déduire la formule du multinôme : $\forall (a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{R}^k$:

$$(a_1 + \dots + a_k)^n = \sum_{n_1 + \dots + n_k = n} \frac{n!}{n_1! \dots n_k!} a_1^{n_1} \dots a_k^{n_k}.$$

Indication : Considérer le premier membre comme un produit de n facteurs et examiner la forme générale d'un terme du développement de ce produit.

3) Soient $p_1, \dots, p_k$ des réels positifs tels que $p_1 + \dots + p_k = 1$.

a) Montrer que l'on définit bien une loi de probabilité sur $\mathbf{N}^k$ en posant :

$$P\left(\{(n_1, \dots, n_k)\}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } n_1 + \dots + n_k \neq n, \\ \frac{n!}{n_1! \dots n_k!} p_1^{n_1} \dots p_k^{n_k} & \text{si } n_1 + \dots + n_k = n. \end{cases}$$

On dit que P est la loi multinomiale de paramètres $(n, p_1, \dots, p_k)$.

b) Soit $X = (X_1, \dots, X_k)$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}^k$ suivant la loi multinomiale P définie ci-dessus. Montrer que X_i suit la loi binomiale de paramètres n, p_i.

c) Montrer que $X_1 + X_2$ suit la loi binomiale de paramètres $n, (p_1 + p_2)$. Généraliser au cas de : $Y = \sum_{i \in I} X_i$ où I est une partie de $\{1, \dots, k\}$.

d) On effectue une série de n épreuves répétées dans des conditions identiques avec pour chacune d'elles k résultats possibles de probabilités respectives $p_1, \dots, p_k$. On note X_l le nombre total de résultats du type $l, (1 \leq l \leq k)$. Quelle est la loi de $(X_1, \dots, X_k)$?

4) On lance $6n$ fois un dé, quelle est la probabilité d'obtenir exactement n fois chacune des faces ? Majorer cette probabilité à l'aide de la formule de Stirling :

$$\forall n \geq 1, \qquad n! = \sqrt{2\pi n}\, n^n \mathrm{e}^{-n} \mathrm{e}^{\theta_n}, \qquad \frac{1}{12n+1} < \theta_n < \frac{1}{12n}.$$

Application numérique : $n = 100$.

Ex 8. *Sondage téléphonique.*

Un enquêteur d'un institut de sondage dispose d'une liste de n personnes à interroger par téléphone. On suppose qu'à chaque appel d'un correspondant la probabilité de le contacter est p. L'enquêteur compose successivement les n numéros (première vague d'appels). On note X_1 la variable aléatoire nombre de correspondants contactés au cours de cette première vague. Lors de la deuxième vague d'appels l'enquêteur compose les $n - X_1$ numéros non obtenus et parvient à contacter X_2 correspondants. . .On demande de trouver les lois des variables aléatoires :

a) $X_l \quad (l \in \mathbf{N}^*)$;

b) $S_k = X_1 + \cdots + X_k \quad (k \geq 2)$;

c) V nombre de vagues nécessaires à l'obtention de tous les correspondants ;

d) Y nombre d'appels nécessaires à l'obtention d'un correspondant donné ;

e) T nombre total d'appels nécessaires à l'obtention de tous les correspondants.

Indications : On fera une hypothèse raisonnable d'indépendance entre les correspondants. Pour $k \geq 2$, on notera $E_{i,l}$ l'événement *le i^e correspondant est contacté lors de la l^e vague d'appels* $(1 \leq i \leq n, 1 \leq l \leq k-1)$ et par $F_{i,k}$ l'événement *le i^e correspondant n'est pas contacté lors des $k-1$ premières vagues d'appels.* Pour k fixé, on peut alors considérer une série de n épreuves répétées indépendantes de résultats possibles $(E_1, \ldots, E_{k-1}, F_k)$ et utiliser l'exercice 7 pour trouver la loi de $(X_1, \ldots, X_{k-1}, R_k)$ avec $R_k = n - S_{k-1}$.