Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

CAPES-M2 **Année 2010-2011**

Préparation écrit 2010, séance n^o 3

Ex 1.

Soit X une variable aléatoire discrète dont l'ensemble des valeurs est $X(\Omega) = \{x_k; k \in \mathbb{N}\}$, où $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante de réels positifs. Vérifiez la formule :

$$\sum_{j=0}^{+\infty} x_j P(X = x_j) = x_0 + \sum_{k=0}^{+\infty}(x_{k+1} - x_k)P(X > x_k).$$

Que pouvez dire sans l'hypothèse de positivité des x_k ?

Ex 2. L'avancement de certains jeux se fait selon la règle suivante : le joueur lance deux dés et avance son pion d'un nombre de cases donné par la somme des points obtenus. S'il a obtenu un double, il peut rejouer et avancer encore et ainsi de suite tant qu'il obtient des doubles. Après le premier lancer sans double, il passe la main au joueur suivant. On s'intéresse à la somme S des points obtenus par cette procédure par un joueur lors d'un tour. Pour $i \geq 1$, on note D_i l'événement *le i-ème lancer a lieu et donne un double* (on a donc $D_i \subset D_{i-1}$). On note X_i la variable aléatoire égale à 0 si le i-ème lancer n'a pas lieu et à la somme des points du i-ème lancer sinon.

1) Donner *brièvement* la loi de X_1 et son espérance.

2) Calculer $P(D_1)$, $P(D_i \mid D_{i-1})$ et trouver une relation de récurrence entre $P(D_i)$ et $P(D_{i-1})$. En déduire l'expression explicite de $P(D_i)$ en fonction de i.

3) Pour $i \geq 2$, donner les valeurs des probabilités conditionnelles

$$P(X_i = k \mid D_{i-1}) \quad \text{et} \quad P(X_i = k \mid D_{i-1}^c),$$

en distinguant les cas $k = 0$ et $k \in \{2, \dots, 12\}$.

4) En déduire une relation simple entre $P(X_i = k)$ et $P(X_1 = k)$ pour $k \in \{2, \dots, 12\}$ puis entre $\mathbf{E}X_i$ et $\mathbf{E}X_1$. Quelle est la loi de X_i ?

5) On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Montrer que $\mathbf{E}S_n$ converge en croissant vers $8,4$ lorsque n tend vers $+\infty$.

6) On note N le nombre aléatoire de lancers effectués selon la procédure ci-dessus. Calculer $P(N \geq n)$ et en déduire que $P(N = +\infty) = 0$. On admet alors que l'on peut remplacer Ω par $\Omega' = \{\omega \in \Omega;\ N(\omega) < +\infty\}$. C'est ce que nous ferons désormais. On peut alors considérer N comme une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Quelle est sa loi ?

7) On définit la variable aléatoire S sur Ω' par :

$$S(\omega) = \sum_{i=1}^{+\infty} X_i(\omega).$$

Notons que puisque ω est dans Ω', tous les termes de la série sont nuls à partir du rang (aléatoire) $N(\omega)+1$, il n'y a donc pas de problème de convergence. S est le nombre total de points obtenus, sauf dans le cas où il y a une infinité de lancers. Comme celui-ci a une probabilité nulle, le fait de le laisser tomber n'affecte pas la loi du nombre total de points obtenus qui est donc celle de S.

Après avoir justifié l'inclusion :

$$\{S = k\} \subset \{12N \geq k\},$$

valable pour tout $k \in \mathbb{N}$, montrer que :

$$P(S = k) \leq 36q^k \quad \text{où} \quad q = 6^{-1/12}.$$

En déduire l'existence de $\mathbf{E}S$.

8) On définit sur Ω' la variable aléatoire $R_n = S - S_{n-1}$. Montrer qu'elle vérifie :

$$R_n \leq S\mathbf{1}_{\{S \geq 2n\}}.$$

En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$0 \leq \mathbf{E}S - \mathbf{E}S_{n-1} \leq \mathbf{E}(S\mathbf{1}_{\{S \geq 2n\}}).$$

9) Exprimer $\mathbf{E}(S\mathbf{1}_{\{S \geq 2n\}})$ à l'aide des $P(S = k)$ et montrer qu'il tend vers 0.

10) Conclure.