Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

CAPES-M2 **Année 2010-2011**

Préparation écrit 2010, séance n$^{\text{o}}$ 2
Variables aléatoires, lois usuelles

Ex 1. *La queue de la loi de Poisson*[1]

1) Si X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, montrer que :

$$\forall k > \lambda - 1, \qquad P(X \geq k) < P(X = k)\frac{k+1}{k+1-\lambda}.$$

Indication : On part de :

$$\sum_{j=k}^{+\infty} \frac{\lambda^j}{j!} = \frac{\lambda^k}{k!}\Big(1 + \frac{\lambda}{k+1} + \frac{\lambda^2}{(k+1)(k+2)} + \frac{\lambda^3}{(k+1)(k+2)(k+3)} + \cdots\cdots\Big)$$

et on majore la parenthèse par la somme d'une série géométrique...

2) En déduire que :

$$\forall k \geq 2\lambda - 1, \qquad P(X > k) < P(X = k).$$

Ex 2. *Contrôle de l'erreur dans l'approximation poissonienne*
On se propose de donner des résultats quantitatifs sur l'approximation de la probabilité binomiale $b(k, n, p) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ par $\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^k/k!$ où $\lambda = np$.

1) Justifier l'encadrement suivant :

$$\forall u \in [0, 1[, \qquad \exp\Big(-u - \frac{u^2}{2(1-u)}\Big) \leq 1 - u \leq \exp(-u). \tag{1}$$

Indication : Dans le développement en série entière de $\ln(1-u)$, contrôler le reste de rang 2 par une série géométrique.

2) En déduire que si $0 \leq k \leq n$,

$$C_n^k = \frac{n^k}{k!}\prod_{j=1}^{k-1}\Big(1 - \frac{j}{n}\Big) \leq \frac{n^k}{k!}\exp\Big(-\frac{(k-1)k}{2n}\Big).$$

3) En déduire que si $n \geq 2$ et $0 \leq k \leq n$:

$$b(k, n, p) \leq \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^k}{k!}\exp\Big(\frac{k}{2n}(2\lambda + 1 - k)\Big).$$

1. La « queue » de la loi d'une v.a. X est la fonction $t \mapsto P(X > t)$.

En particulier :

$$\forall k \geq 2\lambda + 1, \qquad b(k, n, p) \leq \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^k}{k!}.$$

En combinant cette inégalité avec le résultat de l'exercice 1, on en déduit la majoration suivante de la queue de la loi binomiale :

$$\forall k \geq 2\lambda + 1, \qquad \sum_{j=k+1}^{n} b(j, n, p) \leq \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^k}{k!}. \tag{2}$$

Ex 3. *Modèle de Galton-Watson* (cf. Foata-Fuchs, chap. 9, ex. 10)

Dans une réaction nucléaire, une particule élémentaire provoque l'apparition de d'un nombre aléatoire X_1 de particules de même nature, dites de première génération. La i^{e} particule de la première génération engendre, indépendamment des autres, ξ_i^1 particules $(i = 1, \dots, X_1)$; le nombre de particules de la deuxième génération est donc $X_2 = \xi_1^1 + \dots + \xi_{X_1}^1$. Les variables aléatoires X_n et ξ_i^n sont définies par récurrence de la même façon : la taille de la n^{e} génération est X_n et ξ_i^n est le nombre d'« enfants » de la i^{e} particule de la n^{e} génération.

Pour $n \geq 1$, on a donc la relation : $X_{n+1} = \xi_1^n + \dots + \xi_{X_n}^n$. On fait l'hypothèse que pour tout $n \geq 1$, les variables aléatoires $X_n, \xi_1^n, \dots, \xi_{X_n}^n$ sont indépendantes et que les ξ_i^n ont toutes même loi que X_1. On désigne par $G(s)$ la fonction génératrice de X_1.

1) Soit G_n la fonction génératrice de X_n. Montrez que

$$\forall n \geq 1, \quad G_{n+1}(s) = G_n(G(s)) = G(G_n(s)).$$

2) Montrez que G est croissante et convexe sur $[0, 1]$.

3) On pose $x_n = P(X_n = 0) = G_n(0)$; montrez que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est croissante et que sa limite x est la plus petite solution comprise entre 0 et 1 de l'équation

$$G(t) = t. \tag{3}$$

4) Soit $\mu = \mathbf{E}X_1$ (en supposant son existence). On suppose que G n'est pas l'identité sur $[0, 1]$ (qu'est-ce que cela signifie pour X_1 ?). À l'aide de la question 2), montrez que :

1. si $\mu \leq 1$, la seule solution de l'équation 3 sur $[0, 1]$ est $t = 1$, donc $x = 1$.
2. si $\mu > 1$, l'équation 3 admet une solution unique $t_0 \in [0, 1[$, donc $x = t_0$.

5) Interprétez x et le résultat précédent.

6) Soit $\sigma^2 = \operatorname{Var} X_1$. En établissant des formules de récurrence, calculez $\mathbf{E}X_n$ et $\operatorname{Var} X_n$ en fonction de μ et σ^2.

7) Calculez G_n dans le cas où X_1 suit une loi de Bernoulli de paramètre p.

Ex 4. *La tige brisée*

On brise aléatoirement une tige en 3 morceaux. Quelle est la probabilité de pouvoir construire un triangle avec les 3 morceaux obtenus ? Après avoir cherché, vous pourrez consulter :

`http://math.univ-lille1.fr/~ipeis/Divers/probabilites-geom.pdf`