Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

CAPES-M2 **Année 2010-2011**

Préparation écrit 2010, séance n° 1
Propriétés des probabilités, conditionnement et indépendance

Ex 1. *Sur la probabilité qu'un entier tiré au hasard soit un multiple...*
Il n'est pas difficile de vérifier qu'il n'existe pas de probabilité uniforme sur $\mathbb{N}$ (faites le !). L'objet de cet exercice est de donner une réponse négative à la question moins naïve suivante : existe-t-il une probabilité P sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ telle qu'un entier tiré au hasard suivant cette loi P soit pair avec une probabilité 1/2, multiple de 3 avec une probabilité 1/3, multiple de 4 avec probabilité 1/4, etc. Plus formellement, notons $n\mathbb{N}$ l'ensemble des multiples de l'entier n (y compris 0). On suppose qu'il existe une probabilité P vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(n\mathbb{N}) = \frac{1}{n}.$$

et on souhaite réfuter cette conjecture.

1) Montrer que nécessairement $P(\{0\}) = 0$.

2) Prouver la relation

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right)^{-1}\left(1 - \frac{1}{3}\right)^{-1} = \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{k_1+k_2=m} \frac{1}{2^{k_1}3^{k_2}}.$$

3) Soit p_i le i-ème *nombre premier* ($\mathsf{p}_1 = 2$, $\mathsf{p}_2 = 3$, $\mathsf{p}_3 = 5$, ...). On pose pour $1 \leq k \leq n$:

$$\pi_{k,n} = \prod_{i=k}^{n}\left(1 - \frac{1}{\mathsf{p}_i}\right)$$

et on se propose d'en trouver la limite lorsque n tend vers $+\infty$, k restant fixé. Justifier les écritures suivantes :

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{\mathsf{p}_i}\right)^{-1} &= \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{k_1+\cdots+k_n=l} \frac{1}{\mathsf{p}_1^{k_1}\cdots\mathsf{p}_n^{k_n}} \\ &\geq \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}.\end{aligned}$$

4) En déduire $\lim_{n\to+\infty} \pi_{1,n}$, puis $\lim_{n\to+\infty} \pi_{k,n}$ (k fixé).

5) Montrer que si les entiers a et b sont premiers entre eux :

$$P(\mathsf{a}\mathbb{N} \cap \mathsf{b}\mathbb{N}) = P(\mathsf{a}\mathbb{N})P(\mathsf{b}\mathbb{N}).$$

En déduire

$$P(\mathsf{a}\mathbb{N}^c \cap \mathsf{b}\mathbb{N}^c) = P(\mathsf{a}\mathbb{N}^c)P(\mathsf{b}\mathbb{N}^c).$$

6) On note pour alléger $E_i = \mathsf{p}_i\mathbb{N}$. Montrer que pour tout $n \geq 2$,

$$P\Big(\bigcap_{i=1}^{n} E_i^c\Big) = \prod_{i=1}^{n} P(E_i^c).$$

En déduire la valeur de $P\Big(\bigcap_{i=k}^{+\infty} E_i^c\Big)$ pour tout $k \geq 1$.

7) Montrer que $P\Big(\bigcup_{i=k}^{+\infty} E_i\Big) = 1$ pour tout k et en déduire que

$$P(\{0, 1, \dots, k-1\}) = 0 \quad \text{pour tout } k,$$

ce qui est manifestement absurde (pourquoi ?).

Ex 2. Trois personnes nommées A, B, C lancent à tour de rôle la même pièce de monnaie (ABCABCABC...). La probabilité d'obtenir pile lors d'un lancer est p ($0 < p < 1$). Le gagnant est le premier qui obtient pile (la partie *s'arrête* alors).

1) On note A_n (resp. B_n, C_n) l'événement *A gagne la partie lors du n-ième lancer* (resp. B, C). Calculer $P(A_1)$, $P(B_2)$, $P(C_3)$. Les événements A_1 et B_2 sont-ils indépendants ?

2) En discutant suivant les valeurs de n, calculer $P(A_n)$, $P(B_n)$, $P(C_n)$.

3) Calculer la probabilité de gagner de chacun des trois joueurs.

4) Quelle est la probabilité qu'il y ait un vainqueur ? Conclure.

Ex 3. On rappelle que si A est un événement, la variable aléatoire indicatrice de A est la fonction définie sur Ω par :

$$\mathbf{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Autrement dit, $\mathbf{1}_A$ vaut 1 si A est réalisé et 0 sinon.

Soit $(A_i)_{i\geq 1}$ une suite d'événements *indépendants*. On note $p_i = P(A_i)$ et on suppose que :

$$a := \sum_{i=1}^{+\infty} p_i < +\infty.$$

Le but de cet exercice est de prouver l'inégalité

$$\forall n, k \in \mathbb{N}^*, \quad P\Big(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{A_i} \geq k\Big) \leq \frac{a^k}{k!}.$$

La dernière question propose une application de cette inégalité.

1) Que peut-on dire du cas $k > n$? On suppose dans la suite $k \leq n$.

2) On note $B_{n,k} := \{\omega \in \Omega;\ \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{A_i}(\omega) \geq k\}$. Justifier l'inclusion

$$B_{n,k} \subset \bigcup_{\substack{F \subset \{1,\dots,n\} \\ \operatorname{card} F = k}} \bigcap_{i \in F} A_i.$$

3) En déduire que

$$P(B_{n,k}) \leq \sum_{\substack{F \subset \{1,\dots,n\} \\ \operatorname{card} F = k}} \prod_{i \in F} p_i.$$

4) On note $a_n = \sum_{i=1}^{n} p_i$. Montrer que

$$a_n^k \geq k! \sum_{\substack{F \subset \{1,\dots,n\} \\ \operatorname{card} F = k}} \prod_{i \in F} p_i.$$

Indication : On remarquera que

$$a_n^k = \sum_{(i_1,\dots,i_k) \in \{1,\dots,n\}^k} p_{i_1} \cdots p_{i_k}.$$

5) Conclure.

6) *Application à un problème de tir.* Dans un stand de tir, une cible mobile traverse le champ visuel d'un tireur (une traversée par épreuve). À chaque épreuve, le tireur tire un coup sur la cible. D'une épreuve à la suivante, la vitesse de la cible augmente de 20%. On suppose que pour un tireur donné, la probabilité de toucher la cible est *inversement proportionnelle* à la vitesse de la cible. Elle vaut ainsi $p \in]0, 1[$ pour le premier tir, $\frac{5}{6}p$ pour le second (pourquoi ?), etc. Les tirs sont supposés indépendants, le tireur dispose d'autant de cartouches qu'il le souhaite et le défi qu'il doit relever est celui de toucher au moins 20 fois la cible. En utilisant le résultat démontré ci-dessus, majorer sa probabilité de réussir (indépendamment de p).

Ex 4. *Loi de Zipf* $\downarrow 5$
Soit $a \in]1, +\infty[$. On définit le réel $\zeta(a)$ par :

$$\zeta(a) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^a}.$$

On peut alors définir une probabilité P_a sur $\mathbb{N}^*$ en posant :

$$p_k = \frac{1}{\zeta(a) k^a}, \qquad k \in \mathbb{N}^*.$$

On dit que P_a est la loi de Zipf de paramètre a. Si $m \in \mathbb{N}^*$, on note $m\mathbb{N}^*$ l'ensemble $\{km,\ k \in \mathbb{N}^*\}$ de ses multiples non nuls. Calculer $P_a(2\mathbb{N}^*)$. Généraliser.

Ex 5. Lois de Zipf (suite)$\uparrow 4$
On travaille avec l'espace probabilisé $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*), P_a)$ où P_a est la loi ζ de paramètre $a > 1$ (voir la définition exercice 4 page 3).

1) Donner une CNS sur les entiers $j > 1$ et $m > 1$ pour que les événements $A = j\mathbb{N}^*$ et $B = m\mathbb{N}^*$ soient P_a-indépendants.

2) Soit p_i le i-ème *nombre premier* ($\mathsf{p}_1 = 2$, $\mathsf{p}_2 = 3$, $\mathsf{p}_3 = 5, \ldots$). On note $A_i = \mathsf{p}_i\mathbb{N}^*$. Montrer que $(A_i)_{i\geq 1}$ est une suite d'événements indépendants.

3) Soit C_n l'ensemble des entiers de $\mathbb{N}^*$ divisibles par aucun des nombres premiers p_i pour $1 \leq i \leq n$. Calculer $P_a(C_n)$.

4) Déterminer $\bigcap\limits_{n\geq 1} C_n$.

5) En déduire la formule d'Euler :

$$\forall a > 1, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^a} = \zeta(a) = \lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{n} \Big(1 - \frac{1}{\mathsf{p}_i^a}\Big)^{-1} = \prod_{i=1}^{+\infty} \Big(1 - \frac{1}{\mathsf{p}_i^a}\Big)^{-1}.$$

6) On peut retrouver cette formule par une calcul direct sur la série définissant $\zeta(a)$. En voici le début :

$$\begin{aligned} \zeta(a) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^a} &= \sum_{2|k} \frac{1}{k^a} + \sum_{2\not|k} \frac{1}{k^a} \\ &= \frac{1}{2^a}\zeta(a) + \sum_{2\not|k} \frac{1}{k^a} \end{aligned}$$

On recommence avec la série $(1 - 2^{-a})\zeta(a)$ en séparant les termes dont l'indice est un multiple de 3 des autres… Expliciter cette méthode et résoudre le problème de convergence sous-jacent.

Ex 6. Un buveur impénitent décide d'essayer de ne plus boire. On admet que s'il ne boit pas un jour donné, alors il y a une probabilité $0,4$ qu'il ne boive pas le lendemain. Tandis que s'il succombe un jour, il ne boira le lendemain par remords qu'avec une probabilité $0,2$. Quelle est la probabilité que ce buveur ne boive pas le $n$ième jour ? Que se passe-t-il quand n tend vers l'infini ? Interpréter.

Ex 7. *Gain et perte au casino*

Dans un casino, un joueur dispose d'une fortune initiale. Il joue une série de coups (indépendants) d'un jeu comme pile ou face où, à chaque fois, la probabilité de gagner 1 F est $p \in]0,1[$ et celle de perdre 1 F est $1-p$. Il décide de s'arrêter soit s'il est ruiné, soit si sa fortune atteint le niveau N F. On note $P_N(i)$ la probabilité que sa fortune atteigne N F si sa fortune initiale est i F ($i \in \mathbb{N}$, $i \leq N$).

1) Que vaut $P_N(N)$?

2) Calculer $P_N(0)$ en fonction de $P_N(1)$.

3) En conditionnant par des événements adaptés, exprimer $P_N(i)$ en fonction de $P_N(i+1)$ et $P_N(i-1)$ pour $i \in \{1, \ldots, N-1\}$.

4) Déduire des questions 1–3 la valeur de $P_N(i)$ en fonction de p, N et i. On distinguera les cas $p = 1/2$ et $p \neq 1/2$.
Indication : On rappelle comment expliciter le terme général d'une suite $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ donnée par une relation de récurrence du type :

$$au_{i+1} + bu_i + cu_{i-1} = 0.$$

Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, u_i s'écrit sous la forme $u_i = \lambda x_1^i + \mu x_2^i$ où λ et μ restent à déterminer par des conditions particulières et x_1, x_2 sont les racines de l'équation caractéristique associée :

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Si $\Delta = 0$, u_i s'écrit $u_i = (\lambda + \mu i)x_0^i$ où x_0 est la racine double de l'équation caratéristique et λ et μ sont des paramètres à préciser.

5) Que se passe-t-il quand N tend vers l'infini ? On distinguera les trois cas $p < 1/2$, $p = 1/2$, $p > 1/2$ et on interprétera les résultats.

Ex 8. *Les dés truqués*
On rappelle que la fonction génératrice d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ est définie par la série :

$$G_X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n)z^n$$

Pour $|z| \leq 1$, le terme général de la série des modules est majoré par $P(X = n)$ qui est le terme général d'une série convergente. La série définissant $G_X(z)$ converge donc au moins pour tout z dans le disque unité fermé du plan complexe. Son domaine de convergence peut être plus grand si $P(X = n)$ tend suffisamment vite vers 0 pour compenser $|z|^n$ qui tend vers $+\infty$ lorsque $|z| > 1$ (c'est le cas notamment pour la loi géométrique et la loi de Poisson). Lorsque l'ensemble des valeurs possibles de X est fini, G_X se réduit à un polynôme et est défini sur tout le plan complexe (exemple : loi uniforme, loi binomiale,...).

1) Soit X une variable aléatoire discrète dont l'ensemble des valeurs possibles $X(\Omega)$ est inclus dans $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Vérifier que l'on a la factorisation :

$$\forall z \in \mathbf{C}, \qquad G_X(z) = zQ_X(z),$$

où Q_X est un polynôme. Expliquer pourquoi si $P(X = 6) \neq 0$, Q_X a au moins une racine réelle. Expliciter $Q_X(z)$ et donner sa factorisation complète lorsque X suit la loi uniforme sur $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

2) Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendantes (ce qui équivaut à l'indépendance des événements $\{X = i\}$ et $\{X = j\}$ pour tout couple d'entiers (i, j)). Montrer que pour tout z de module inférieur ou égal à 1 on a :

$$G_{X+Y}(z) = G_X(z)G_Y(z)$$

et que cette relation est valable pour tout complexe z lorsque $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ sont des parties finies de $\mathbb{N}$.

3) On dispose de deux dés et on aimerait truquer individuellement chacun d'eux de façon que la somme des points suive la loi uniforme sur $\{2, 3, \ldots, 12\}$. Déduire des questions précédentes que ceci est impossible.
Indication : On utilisera en le redémontrant le fait que la fonction génératrice de la loi uniforme sur $\{2, 3, \ldots, 12\}$ n'admet aucune racine dans $\mathbb{R}^*$.