On déduit de (9.21), (9.23) et (9.25) que

$$\forall n \geqslant n_0 := \max(n_1, n_2), \quad \mathbf{E}(Z_n^p) < 3\varepsilon.$$

Comme $\varepsilon \in]0,1[$ était arbitraire, $\mathbf{E}(Z_n^p)$ tend bien vers 0 quand n tend vers $+\infty$. □

Remarque 9.18. La démonstration classique de la proposition 9.17 est plus rapide que celle présentée ci-dessus puisqu'elle est une conséquence immédiate de l'inégalité

$$(\mathbf{E}|X|^p)^{1/p} \leqslant (\mathbf{E}|X|^r)^{1/r}, \quad \forall 1 \leqslant p < r < +\infty.$$

On pourra éventuellement voir cette inégalité en exercice. La preuve proposée ci-dessus, certes moins élégante, a néanmoins l'avantage de donner comme sous-produit le résultat suivant qui a son intérêt propre.

Proposition 9.19. *Si la suite de variables aléatoires Y_n est bornée par une constante positive c (ou plus largement si pour tout n, $P(|Y_n| \leqslant c) = 1$) et converge en probabilité vers Y, alors Y_n converge au sens L^p vers Y, pour tout $p \geqslant 1$. En particulier pour $p = 1$, on en déduit l'interversion limite espérance : $\lim_{n\to+\infty} \mathbf{E}Y_n = \mathbf{E}Y$.*

L'argument de la preuve est essentiellement le même que ci-dessus, *modulo* quelques adaptations mineures que l'on vous laisse le soin de rédiger en exercice.

Nous allons maintenant établir le célèbre théorème de *convergence dominée* qui est très utile pour l'interversion limite espérance.

Théorème 9.20 (convergence dominée)**.** *On suppose que les variables aléatoires réelles Y_n $(n \geqslant 1)$, Y et Z définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vérifient*

a) Y_n converge presque-sûrement vers Y ;

b) pour tout $n \geqslant 1$, $|Y_n| \leqslant Z$ p.s. ;

c) Z est intégrable.

Dans ces conditions,

1. *les Y_n et Y sont intégrables ;*
2. *Y_n converge vers Y au sens L^1 : $\mathbf{E}|Y_n - Y| \to 0$;*
3. *on a l'interversion limite espérance : $\lim_{n\to+\infty} \mathbf{E}Y_n = \mathbf{E}Y$.*

Preuve. En utilisant a), b) et le lemme 9.2, on vérifie facilement l'existence d'un évènement $\Omega' \in \mathcal{F}$ de probabilité 1 tel que

$$\forall \omega \in \Omega', \forall n \geqslant 1, \quad |Y_n(\omega)| \leqslant Z(\omega) \text{ et } |Y(\omega)| \leqslant Z(\omega). \tag{9.26}$$

Remarquons que pour tout évènement A, $P(A \cap \Omega'^c) \leqslant P(\Omega'^c)$, d'où :

$$\text{quand } P(\Omega') = 1, \quad \forall A \in \mathcal{F}, \quad P(A \cap \Omega'^c) = 0 \quad \text{et} \quad P(A \cap \Omega') = P(A). \tag{9.27}$$

On en déduit de (9.26) et (9.27) que

$$\forall t \geqslant 0, \quad P(|Y_n| > t) = P(\{|Y_n| > t\} \cap \Omega') \leqslant P(\{Z > t\} \cap \Omega') = P(Z > t)$$

et de même avec Y à la place de Y_n. En intégrant sur $\mathbb{R}_+$ relativement à t, on obtient grâce à c) les inégalités

$$\mathbf{E}|Y_n| \leqslant \mathbf{E}Z < +\infty, \quad \mathbf{E}|Y| \leqslant \mathbf{E}Z < +\infty,$$

qui établissent l'intégrabilité des Y_n et de Y.

Une fois établie cette intégrabilité et donc l'existence de $\mathbf{E}Y_n$ et $\mathbf{E}Y$, l'interversion limite espérance sera une conséquence immédiate de la convergence L^1 puisque :

$$|\mathbf{E}Y_n - \mathbf{E}Y| = |\mathbf{E}(Y_n - Y)| \leqslant \mathbf{E}|Y_n - Y|.$$

Il nous reste donc à prouver la convergence L^1, autrement dit, en posant $Z_n := |Y_n - Y|$, la convergence vers 0 de $\mathbf{E}Z_n$.

Pour cela on utilise comme dans la preuve de la proposition 9.17 un découpage en trois de l'intégrale définissant $\mathbf{E}Z_n$ en écrivant pour $\varepsilon > 0$ arbitraire et $b = b(\varepsilon)$ convenablement choisi, $\int_0^{+\infty} = \int_0^{\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{b} + \int_b^{+\infty}$. Voyons d'abord le choix de b. Par inégalité triangulaire, $Z_n \leqslant 2Z$ sur Ω', ce qui grâce à (9.27) nous donne pour tout $t > 0$, $P(Z_n > t) \leqslant P(2Z > t)$. La variable aléatoire Z étant intégrable par hypothèse c), il en est de même pour $2Z$, ce qui implique la convergence dans $\mathbb{R}_+$ de l'intégrale de Riemann généralisée $\int_0^{+\infty} P(2Z > t)\,\mathrm{d}t$. On peut donc choisir b assez grand (et supérieur à ε) pour que $\int_b^{+\infty} P(2Z > t)\,\mathrm{d}t < \varepsilon$. On a alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_b^{+\infty} P(Z_n > t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_b^{+\infty} P(2Z > t)\,\mathrm{d}t < \varepsilon. \tag{9.28}$$

Ensuite on contrôle l'intégrale $\int_0^b P(Z_n > t)\,\mathrm{d}t$ en écrivant

$$\int_0^b P(Z_n > t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\varepsilon} \mathrm{d}t + \int_{\varepsilon}^{b} P(Z_n > t)\,\mathrm{d}t \leqslant \varepsilon + (b-\varepsilon)P(Z_n > \varepsilon) \leqslant \varepsilon + bP(Z_n > \varepsilon).$$

Par l'hypothèse a), Z_n converge presque-sûrement vers 0, donc converge aussi en probabilité vers 0. On peut donc trouver un entier $n_0 = n_0(\varepsilon)$ tel que $bP(Z_n > \varepsilon) < \varepsilon$ pour tout [7] $n \geqslant n_0$. On a alors

$$\forall n \geqslant n_0, \quad \int_0^b P(Z_n > t)\,\mathrm{d}t < 2\varepsilon. \tag{9.29}$$

En recollant les morceaux à partir de (9.28) et (9.29), on obtient

$$\forall n \geqslant n_0, \quad \mathbf{E}Z_n = \int_0^b P(Z_n > t)\,\mathrm{d}t + \int_b^{+\infty} P(Z_n > t)\,\mathrm{d}t < 3\varepsilon.$$

Comme $\varepsilon > 0$ était arbitraire, ceci établit la convergence vers 0 de $\mathbf{E}Z_n$ et achève la preuve. □

7. Noter que b dépend de ε et peut très bien tendre vers $+\infty$ quand ε tend vers 0, mais que l'on travaille avec un ε arbitraire fixé, donc aussi avec b fixé.