Présentation

Ce polycopié résulte de l'assemblage séparé de deux chapitres annexes du cours d'*Intégration et Probabilités Élémentaires* (IPE Math306) 2005–2006. Il regroupe ce qu'un étudiant de 3^{e} année devrait connaître sur l'intégrale de Riemann pour suivre un cours de probabilités qui contourne la construction de l'intégrale de Lebesgue. Au delà de ce lectorat naturel, ce document peut aussi servir de mise au point pour des étudiants préparant le CAPES, ou ayant entrepris l'étude de la théorie de la mesure et de l'intégrale au sens de Lebesgue.

L'intégrale de Riemann est définie ici à partir des sommes de Darboux. On ne prétend pas donner une présentation complète de l'intégrale de Riemann. En particulier on ne dit rien sur les sommes de Riemann ni sur les techniques de calcul d'intégrales par primitivation. Un troisième chapitre sur l'intégrale multiple reste à écrire.

Villeneuve d'Ascq, octobre 2005
Charles Suquet

Chapitre 1

Intégrale de Riemann sur $[a,b]$

1.1 Construction

Soit $[a,b]$ un intervalle *fermé borné* de $\mathbb{R}$. On appelle subdivision de $[a,b]$ toute suite finie du type $\Delta = \{x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b\}$. Pour une fonction *bornée* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $(-\infty < a < b < +\infty)$, on définit ses sommes de Darboux inférieure $S_\Delta(f)$ et supérieure $S^\Delta(f)$ par

$$S_\Delta(f) := \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \inf_{[x_{k-1},x_k]} f, \qquad S^\Delta(f) := \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \sup_{[x_{k-1},x_k]} f.$$

Pour une illustration, voir les figures 1.1 et 1.2.

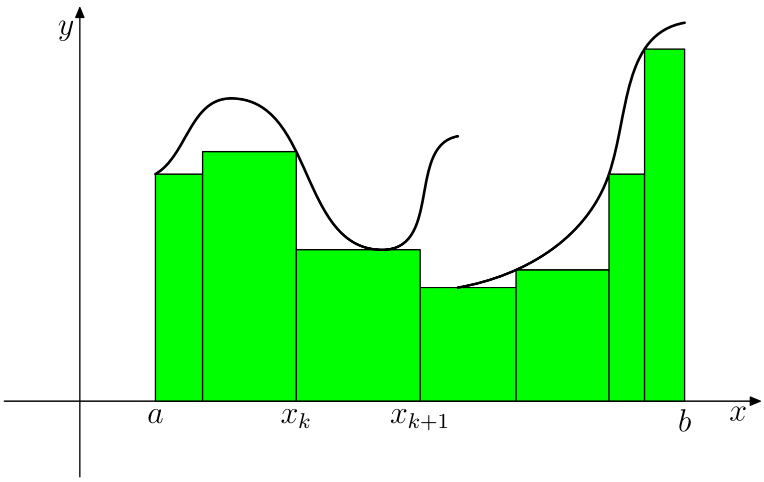

Fig. 1.1 – $S_\Delta(f)$

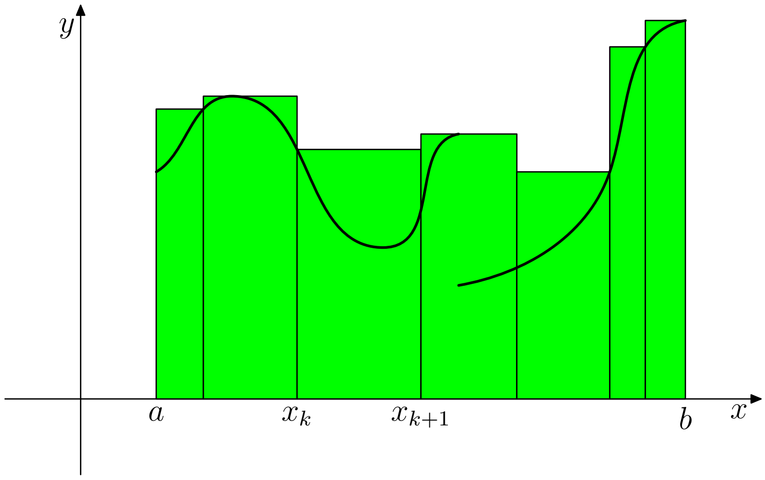

FIG. 1.2 – $S^{\Delta}(f)$

On dit que la subdivision Δ' est un raffinement de Δ si l'ensemble des valeurs de la suite finie Δ est inclus dans celui des valeurs de la suite Δ', ce que nous noterons avec un léger abus $\Delta \subset \Delta'$. Il est facile de vérifier que

$$\Delta \subset \Delta' \quad \Rightarrow \quad S_{\Delta}(f) \leq S_{\Delta'}(f) \text{ et } S^{\Delta}(f) \geq S^{\Delta'}(f).$$

Les figures 1.3 et 1.4 illustrent l'effet de l'adjonction à la subdivision Δ des figures 1.1 et 1.2 de deux nouveaux points.

Les intégrales de Riemann *inférieure* $I_*(f)$ et *supérieure* $I^*(f)$ sont définies par

$$I_*(f) := \sup_{\Delta} S_{\Delta}(f), \quad I^*(f) := \inf_{\Delta} S^{\Delta}(f),$$

le supremum et l'infimum étant pris sur toutes les subdivisions Δ de $[a, b]$.

Pour Δ_1 et Δ_2 subdivisions de $[a, b]$ on a clairement

$$S_{\Delta_1}(f) \leq S_{\Delta_1 \cup \Delta_2}(f) \leq S^{\Delta_1 \cup \Delta_2}(f) \leq S^{\Delta_2}(f),$$

d'où $S_{\Delta_1}(f) \leq S^{\Delta_2}(f)$. En prenant successivement le sup sur tous les Δ_1, puis l'inf sur tous les Δ_2, on en déduit

$$I_*(f) \leq I^*(f),$$

inégalité vérifiée par toute fonction bornée $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

Définition 1.1. *On dit que f bornée $[a, b] \to \mathbb{R}$ est* Riemann intégrable *si avec les notations ci-dessus, $I_*(f) = I^*(f)$. Dans ce cas on définit son intégrale au sens de Riemann notée $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ par*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := I_*(f) = I^*(f).$$

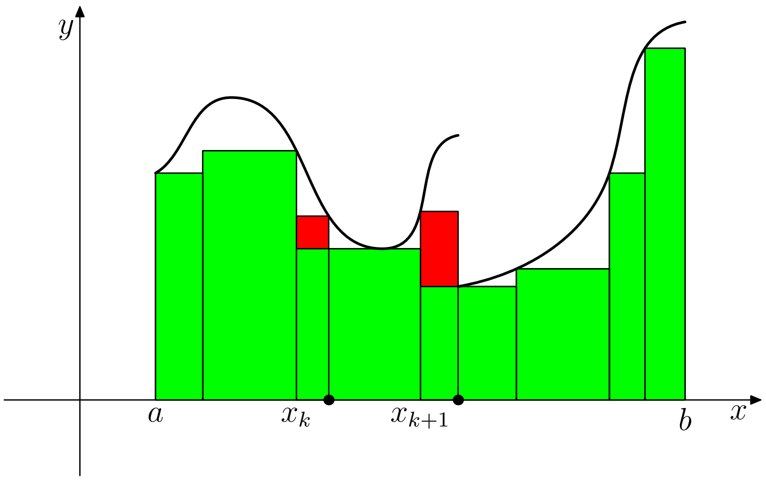

FIG. 1.3 – Si $\Delta \subset \Delta'$, $S_\Delta(f) \leq S_{\Delta'}(f)$

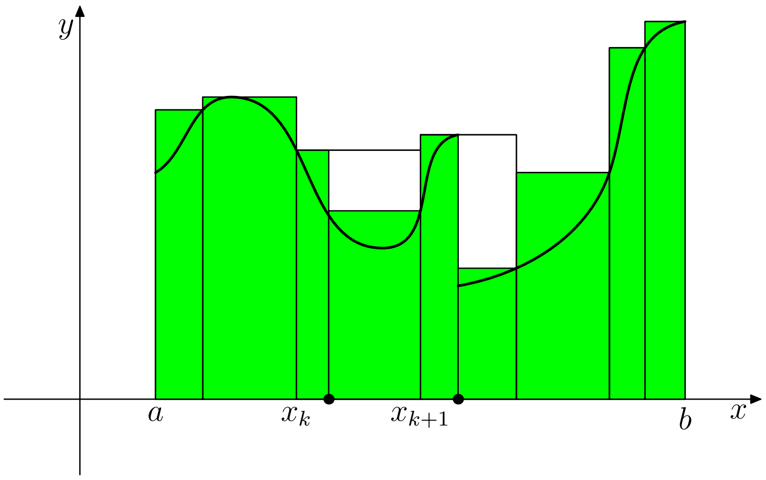

FIG. 1.4 – Si $\Delta \subset \Delta'$, $S^\Delta(f) \geq S^{\Delta'}(f)$

Il est commode de donner aussi une définition de $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ lorsque $b < a$. Cette définition peut se justifier en reprenant toute l'étude précédente avec des subdivisions Δ de $[b, a]$ par des suites finies décroissantes[1] $a = x_0 > x_1 > \cdots > x_{n-1} > x_n = b$. En conservant les mêmes définitions de $S^\Delta(f)$ et $S_\Delta(f)$, le seul changement par rapport aux subdivisions croissantes de $[b, a]$ est que les $(x_k - x_{k-1})$ sont négatifs ce qui implique une inversion des inégalités entre $S^\Delta(f)$ et $S_\Delta(f)$, on a maintenant $S^\Delta(f) \leq S_\Delta(f)$. Associons à chaque subdivision décroissante Δ de $[b, a]$, la subdivision *retournée* $\Delta' = \{x'_0, x'_1, \dots, x'_n\}$ définie par $x'_0 = x_n$, $x'_1 = x_{n-1}, \dots, x'_n = x_0$. Alors Δ' est une subdivision croissante de $[b, a]$ et $S^{\Delta'}(f) = -S^\Delta(f)$, $S_{\Delta'}(f) = -S_\Delta(f)$. On en déduit immédiatement que

$$I_*(f, a, b) := \sup_\Delta S^\Delta(f) = -\inf_{\Delta'} S^{\Delta'}(f) =: -I^*(f, b, a), \tag{1.1}$$

$$I^*(f, a, b) := \inf_\Delta S_\Delta(f) = -\sup_{\Delta'} S_{\Delta'}(f) =: -I_*(f, b, a), \tag{1.2}$$

les infima et suprema indexés par Δ s'entendant pour toute subdivision décroissante de a à b et ceux indexés par Δ' pour toute subdivision croissante de $[b, a]$. On définit alors l'intégrabilité de f de a à b par la condition $I_*(f, a, b) = I^*(f, a, b)$, dont on voit par (1.1) et (1.2) qu'elle équivaut à $I^*(f, b, a) = I_*(f, b, a)$, c'est-à-dire à l'intégrabilité de f sur $[b, a]$. En définissant enfin $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ comme la valeur commune de $I_*(f, a, b)$ et $I^*(f, a, b)$, on obtient $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$, cette dernière intégrale relevant de la définition 1.1. Tout ceci légitime la définition formelle suivante.

Définition 1.2. *Si $-\infty < b < a < +\infty$, on dit que f est Riemann intégrable de a à b si elle est Riemann intégrable sur $[b, a]$ et on pose dans ce cas :*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1.3}$$

Remarque 1.3 (variable d'intégration). Dans l'écriture $\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$, la « variable d'intégration » x est « muette », on peut la remplacer par n'importe quelle autre lettre (sauf *ici* a, b ou f). Cette variable joue le même rôle que l'indice i de sommation dans $\sum_{i=1}^n u_i$ qui est lui aussi muet.

Remarque 1.4 (intégrale de Riemann et aire). Soit f une fonction positive et Riemann intégrable sur $[a, b]$. On interprète classiquement $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ comme *l'aire de l'hypographe* de f entre a et b, *i.e.* de la région du plan délimitée par l'axe des abscisses, les droites verticales d'équation $x = a$ ou $x = b$ et le graphe[2] de f, la courbe d'équation $y = f(x)$, $x \in [a, b]$. Voici une justification informelle de cette affirmation, dont on pourra se contenter en première lecture. Reprenons la fonction f des figures 1.1 et 1.2. L'hypographe H de f est représenté figure 1.5. On peut se convaincre « visuellement »,

[1] Rappelons que pour tous réels a et b, $[a, b]$ est défini comme l'ensemble des x réels tels que $a \leq x \leq b$. Ainsi pour $b < a$, $[a, b]$ est l'ensemble vide. C'est pour cela que l'on subdivise ici $[b, a]$ et non $[a, b]$. De même on parlera d'intégrale de f de a à b mais pas d'intégrale de f sur $[a, b]$ quand $b < a$.

[2] D'où le nom « hypographe », littéralement ce qui est sous le graphe.

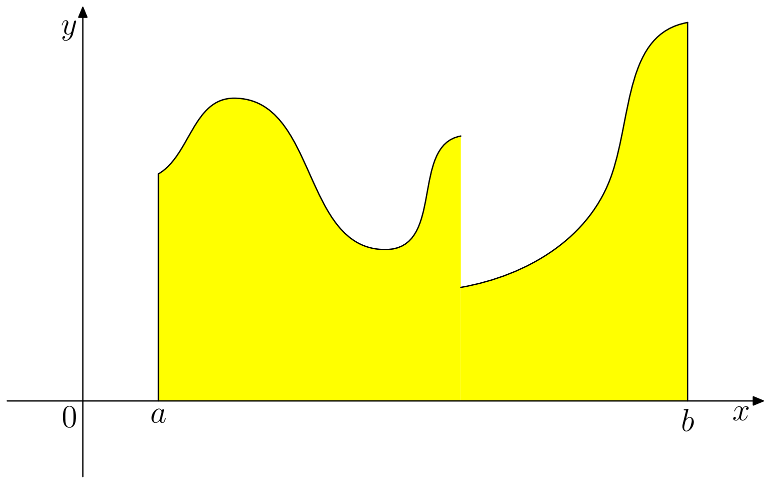

FIG. 1.5 – Hypographe H de f entre a et b

cf. figure 1.1, que pour toute somme de Darboux inférieure l'aire des rectangles coloriés égale à $S_\Delta(f)$ est inférieure à l'aire de l'hypographe de f. De même cf. figure 1.2, pour toute somme de Darboux supérieure, l'aire des rectangles coloriés égale à $S^\Delta(f)$ est supérieure à l'aire de l'hypographe. L'aire de H est donc un majorant de toute S_Δ et un minorant de toute S^Δ. D'où

$$I_*(f) = \sup_\Delta S_\Delta(f) \leq \text{aire}(H) \leq \inf_\Delta S_\Delta(f) = I^*(f).$$

Par Riemman intégrabilité de f, $I_*(f) = I^*(f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, d'où $\text{aire}(H) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Pour les lecteurs exigeants que la remarque 1.4 laisserait insatisfaits, nous proposons et démontrons ci-dessous un énoncé plus précis. Pour cela, il convient d'abord de s'interroger sur la définition mathématique de l'aire de H. Dans le cadre de ce cours, nous avons admis l'existence de la mesure de Lebesgue λ_2 sur $\mathbb{R}^2$, définie comme l'unique mesure μ sur la tribu borélienne de $\mathbb{R}^2$ vérifiant $\mu(]x_1, x_2]\times]y_1, y_2]) = (x_2 - x_1)(y_2 - y_1)$ pour tout pavé semi-ouvert $]x_1, x_2]\times]y_1, y_2]$ de $\mathbb{R}^2$, voir l'exemple A.12 p. 61. C'est cette mesure de Lebesgue qui donne un sens mathématique précis à la notion d'aire. On se propose donc de montrer que $\lambda_2(H) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Pour que cela ait un sens, encore faut-il que H soit un borélien de $\mathbb{R}^2$. Une condition suffisante pour que H soit un borélien de $\mathbb{R}^2$ est que la fonction f soit borélienne, c'est-à-dire mesurable (voir def. A.7 59) pour les tribus boréliennes de $[a, b]$ et de $\mathbb{R}$. La preuve de cette affirmation sort du programme de ce cours[3]. Signalons simplement que tous les exemples de fonctions Riemman intégrables donnés dans la suite de ce document — fonctions monotones, continues, réglées — sont boréliennes. Les seules propriétés de λ_2 utilisées dans ce qui suit sont la croissance et l'additivité finie — propriétés vérifiées par toute mesure, voir p. 57 — et le fait que les

[3]Voir le cours d'IFP 2003-2004 chapitre 5.

frontières des pavés sont de λ_2-mesure nulle[4], voir la proposition A.13 v).

Proposition 1.5. *Soit* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *une fonction positive et Riemann intégrable sur* $[a, b]$*. On suppose de plus que son hypographe entre* a *et* b

$$H := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ a \le x \le b \textit{ et } 0 \le y \le f(x)\} \tag{1.4}$$

est un borélien de $\mathbb{R}^2$*. Alors*

$$\lambda_2(H) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, \tag{1.5}$$

autrement dit l'intégrale de f *entre* a *et* b *est l'aire de l'hypographe de* f *entre* a *et* b*.*

Preuve. Soit $\Delta = \{x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ une subdivision quelconque de $[a, b]$. Notons pour $k = 1, \dots, n$,

$$m_k := \inf_{[x_{k-1}, x_k]} f, \quad M_k := \sup_{[x_{k-1}, x_k]} f.$$

Définissons les « rectangles » $R_{\Delta,k}$ par

$$R_{\Delta,1} := [a, x_1] \times [0, m_1], \quad R_{\Delta,k} :=]x_{k-1}, x_k] \times [0, m_k] \text{ pour } k = 2, \dots, n,$$

et notons $R^{\Delta,k}$ les rectangles obtenus en remplaçant m_k par M_k, $k = 1, \dots, n$. Posons enfin

$$R_\Delta := \bigcup_{k=1}^{n} R_{\Delta,k}, \quad R^\Delta := \bigcup_{k=1}^{n} R^{\Delta,k}.$$

Commençons par justifier la double inclusion

$$\forall \Delta, \qquad R_\Delta \subset H \subset R^\Delta. \tag{1.6}$$

Soit (x', y') un élément quelconque de la *réunion* R_Δ. Il appartient donc à un $R_{\Delta,k'}$ d'où $x_{k'-1} \le x' \le x_{k'}$ et $0 \le y' \le m_{k'} \le f(x')$ car $m_{k'}$ est l'infimum de f sur $[x_{k'-1}, x_{k'}]$. Le couple (x', y') vérifie ainsi les inégalités $a \le x_{k'-1} \le x \le x_{k'} \le b$ et $0 \le y' \le f(x)$, donc appartient à H. Ceci justifie la première inclusion dans (1.6). Soit maintenant (x'', y'') un élément quelconque de H, donc vérifiant $a \le x'' \le b$ et $0 \le y'' \le f(x'')$. La subdivision Δ induit la partition de $[a, b]$ en les intervalles $J_1 := [a, x_1]$, $J_k :=]x_{k-1}, x_k]$, $k = 2, \dots, n$. Il existe donc un unique indice k'' entre 1 et n tel que $J_{k''}$ contienne x''. On a alors $0 \le y'' \le f(x'') \le M_{k''}$ car $M_{k''}$ est le supremum de f sur $[x_{k''-1}, x_{k''}]$. Ainsi (x'', y'') appartient à $R^{\Delta,k''}$, donc aussi à R^Δ, ce qui justifie la deuxième inclusion dans (1.6).

Comme R_Δ, H et R^Δ sont des boréliens de $\mathbb{R}^2$, on deduit de (1.6) par croissance de λ_2 que

$$\forall \Delta, \qquad \lambda_2(R_\Delta) \le \lambda_2(H) \le \lambda_2(R^\Delta). \tag{1.7}$$

[4] En réalité on a seulement besoin de savoir que si J est un segment vertical $\{a\} \times [y1, y_2]$, $\lambda_2(J) = 0$ et de même pour un segment horizontal. Ceci se démontre facilement en exercice en utilisant la croissance de λ. Faites le !

Calculons maintenant $\lambda_2(R_\Delta)$. Les $R_{\Delta,k}$ étant deux à deux disjoints, on a par additivité finie de λ_2 :

$$\lambda_2(R_\Delta) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_2(R_{\Delta,k}). \tag{1.8}$$

Par la proposition A.13 v) ou par la note 4 p. 8, on a pour tout $k = 1, \dots, n$, $\lambda_2(R_{\Delta,k}) = (x_k - x_{k-1})m_k$, d'où en reportant dans (1.8), $\lambda_2(R_\Delta) = S_\Delta(f)$. De même il est clair que $\lambda_2(R^\Delta) = S^\Delta(f)$. On déduit alors de (1.7) que

$$\forall \Delta, \qquad S_\Delta(f) \leq \lambda_2(H) \leq \lambda_2(R^\Delta). \tag{1.9}$$

La première inégalité dans (1.9) nous dit que le réel $\lambda_2(H)$ qui ne dépend pas de Δ majore toutes les sommes de Darboux inférieures $S_\Delta(f)$. Il majore donc aussi leur supremum $I_*(f)$. Par la deuxième inégalité, $\lambda_2(H)$ minore toutes les $S^\Delta(f)$, donc minore aussi leur infimum $I^*(f)$. Nous obtenons ainsi l'encadrement

$$I_*(f) \leq \lambda_2(H) \leq I^*(f).$$

Comme f est Riemann intégrable, $I_*(f) = I^*(f)$, donc $\lambda_2(H) = I_*(f) = I^*(f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. $\square$

Remarque 1.6. La mesure λ_2 étant invariante par la symétrie $(x, y) \mapsto (x, -y)$ cf. prop. A.13 ii), on obtient immédiatement une version de la proposition 1.5 pour une fonction g négative sur $[a, b]$ en remplaçant H par

$$H' := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ a \leq x \leq b \text{ et } g(x) \leq y \leq 0\}.$$

En effet en posant $f = -g$, il vient

$$\lambda_2(H') = \lambda_2(H) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b |g(x)|\,\mathrm{d}x. \tag{1.10}$$

1.2 Riemann intégrabilité

Dans cette section nous examinons la Riemann intégrabilité de certaines familles de fonctions. Les deux plus importantes en pratique sont celle des fonctions monotones et celle des fonctions continues. On généralise la Riemann intégrabilité des fonctions continues au cas des fonctions bornées continues sur $[a, b]$ sauf en un nombre fini de points, comme celle de la figure 1.1. Enfin nous établissons que toute limite uniforme sur $[a, b]$ d'une suite de fonctions Riemann intégrables sur $[a, b]$ est encore Riemann intégrable. Ceci nous donne notamment la Riemann intégrabilité de toutes les fonction *réglées*, *i.e.* limites uniformes de fonctions en escalier. Les fonctions en escaliers sont les plus simples de toutes les fonctions Riemann intégrables et c'est par elles que nous commençons cette étude.

Définition 1.7 (fonction en escalier). *Une application $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est appelée* fonction en escalier *sur $[a, b]$, s'il existe une subdivision $\Delta_0 = \{t_0 = a < t_1 < \cdots < t_j = b\}$ telle que f soit constante sur chaque intervalle* ouvert $]t_{i-1}, t_i[$, $i = 1, \dots, j$.

Il est clair que Δ_0 n'est pas unique, en particulier pour tout raffinement Δ_0' de Δ_0, f est constante sur chacun des intervalles ouverts ayant pour extrêmités deux points consécutifs de Δ_0'. Il y a donc une infinité de subdivisions Δ telles que f en escalier soit constante sur chacun des intervalles ouverts de Δ (*i.e.* les intervalles ayant pour extrêmités deux points consécutifs de Δ). Nous appelerons *subdivision* associée à f en escalier, toute subdivision Δ telle que f soit constante sur chacun des intervalles ouverts de Δ. La moins fine des subdivisions associées à f en escalier est constituée des points a et b et des points de discontinuité de f dans $]a, b[$.

Proposition 1.8 (intégrabilité d'une fonction en escalier). *Soit f une fonction en escalier sur $[a, b]$ et $\Delta_0 = \{t_0 = a < t_1 < \cdots < t_j = b\}$ une subdivision associée à f, la valeur constante de f sur $]t_{i-1}, t_i[$ étant notée c_i. Alors f est Riemann intégrable sur $[a, b]$ et on a*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{j}(t_i - t_{i-1})c_i. \tag{1.11}$$

Remarquons que comme $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ ne dépend, lorsqu'elle existe, que de f, (1.11) implique que si $\Delta_1 = \{s_0 = a < s_1 < \cdots < s_l = b\}$ est une autre subdivision associée à f et en notant d_k la valeur constante de f sur $]s_{k-1}, s_k[$, $k = 1, \dots, l$, on a

$$\sum_{i=1}^{j}(t_i - t_{i-1})c_i = \sum_{k=1}^{l}(s_k - s_{k-1})d_k.$$

Preuve. D'abord, f est bornée puisque $f([a, b]) = \{c_1, \dots, c_j\} \cup \{f(t_0), \dots, f(t_j)\}$ qui est fini (de cardinal *au plus* $2j + 1$) donc borné dans $\mathbb{R}$. Pour chaque δ vérifiant

$$0 < \delta < \frac{1}{2}\min_{1 \leq i \leq j}(t_i - t_{i-1}), \tag{1.12}$$

notons Δ_δ la subdivision construite en adjoignant à Δ_0 les points $t_0 + \delta, t_1 - \delta, t_1 + \delta, t_2 - \delta, t_2 + \delta, \dots, t_{j-1} + \delta, t_j - \delta$. Notons en outre

$$m := \inf_{x \in [a,b]} f(x), \quad M := \sup_{x \in [a,b]} f(x),$$

$$m_i' := \inf_{|t_i - x| \leq \delta} f(x) = \min(c_i, c_{i+1}, f(t_i)), \quad M_i' := \sup_{|t_i - x| \leq \delta} f(x) = \max(c_i, c_{i+1}, f(t_i)),$$

avec l'adaptation évidente pour $i = j$. On a bien sûr $M_i' \leq M$ et $m_i' \geq m$ pour tout i. Avec ces notations on a

$$\begin{aligned} S^{\Delta_\delta}(f) &= \sum_{i=1}^{j}(t_i - t_{i-1} - 2\delta)c_i + \delta M_0' + \delta M_j' + 2\delta\sum_{i=1}^{j-1} M_i' \\ &\leq \sum_{i=1}^{j}(t_i - t_{i-1})c_i + 2j\delta(M - m). \end{aligned} \tag{1.13}$$

De même avec les m'_i à la place de M'_i on obtient

$$S_{\Delta_\delta}(f) \geq \sum_{i=1}^{j}(t_i - t_{i-1})c_i - 2j\delta(M-m). \tag{1.14}$$

Soit $\varepsilon > 0$ quelconque, en choisissant $\delta = \delta(\varepsilon)$ vérifiant à la fois (1.12) et $2j\delta(M-m) < \varepsilon$, on dispose ainsi par (1.13) et (1.14) d'une subdivision $\Delta_{\delta(\varepsilon)}$ telle que

$$\sum_{i=1}^{j}(t_i - t_{i-1})c_i - \varepsilon < S_{\Delta_{\delta(\varepsilon)}} \leq S^{\Delta_{\delta(\varepsilon)}} < \sum_{i=1}^{j}(t_i - t_{i-1})c_i + \varepsilon.$$

On en déduit pour tout $\varepsilon > 0$ l'encadrement :

$$\sum_{i=1}^{j}(t_i - t_{i-1})c_i - \varepsilon < I_*(f) \leq I^*(f) < \sum_{i=1}^{j}(t_i - t_{i-1})c_i + \varepsilon,$$

puis en faisant tendre ε vers 0 que

$$I_*(f) = I^*(f) = \sum_{i=1}^{j}(t_i - t_{i-1})c_i,$$

ce qui établit l'intégrabilité de f et (1.11). □

Proposition 1.9 (intégrabilité d'une fonction monotone). *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est monotone sur $[a,b]$, elle est Riemann intégrable sur $[a,b]$.*

Preuve. Supposons pour fixer les idées que f est décroissante, l'adaptation de ce qui suit au cas f croissante étant immédiate. Alors f est bornée puisque pour tout $x \in [a,b]$, $f(b) \leq f(x) \leq f(a)$. Pour $\Delta = \{x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ subdivision quelconque de $[a,b]$, notons m_k et M_k les bornes inférieure et supérieure de f sur $[x_{k-1}, x_k]$ et remarquons que par décroissance de f, $m_k = f(x_k)$ et $M_k = f(x_{k-1})$. On a alors

$$\begin{aligned}
0 \leq S^\Delta(f) - S_\Delta(f) &= \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})(M_k - m_k)\\
&= \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})\big(f(x_{k-1}) - f(x_k)\big)\\
&\leq \max_{1\leq k\leq n}(x_k - x_{k-1})\sum_{k=1}^{n}\big(f(x_{k-1}) - f(x_k)\big)\\
&= \max_{1\leq k\leq n}(x_k - x_{k-1})\big(f(a) - f(b)\big).
\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. En choisissant une subdivision Δ de pas au plus ε, *i.e.* telle que $\max_{1\leq k\leq n}(x_k - x_{k-1}) \leq \varepsilon$, on a

$$0 \leq S^\Delta(f) - S_\Delta(f) \leq \varepsilon\big(f(a) - f(b)\big).$$

On en déduit que $I^*(f) - I_*(f) \leq \varepsilon\big(f(a) - f(b)\big)$, puis comme ε est quelconque que $I^*(f) - I_*(f) = 0$. La fonction f est donc Riemann intégrable. □

Proposition 1.10 (intégrabilité d'une fonction continue). *Si* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *est continue, elle est Riemann intégrable sur* $[a,b]$*. De plus si* F *est une primitive de* f *sur* $[a,b]$*,*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b)-F(a). \tag{1.15}$$

Preuve. Sur le *compact* $[a,b]$, la fonction f est bornée et *uniformément* continue :

$$\forall\varepsilon>0,\quad \exists\delta>0,\quad \forall x,x'\in[a,b],\quad |x-x'|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(x')|<\varepsilon.$$

Pour chaque $\varepsilon>0$, on peut trouver une subdivision $\Delta=\{x_0=a<x_1<\dots<x_n=b\}$ (dépendant de δ) telle que pour $k=1,\dots,n$, $x_k-x_{k-1}<\delta$. Comme les bornes inférieure m_k et supérieure M_k de f sur le compact $[x_{k-1},x_k]$ sont atteintes, on a pour tout k $0\le M_k-m_k<\varepsilon$. On a alors

$$0\le S^\Delta(f)-S_\Delta(f)=\sum_{k=1}^n(x_k-x_{k-1})(M_k-m_k)\le\varepsilon\sum_{k=1}^n(x_k-x_{k-1})=\varepsilon(b-a).$$

En raison de l'encadrement $S_\Delta(f)\le I_*(f)\le I^*(f)\le S^\Delta(f)$, nous avons ainsi établi que

$$\forall\varepsilon>0,\quad 0\le I^*(f)-I_*(f)\le\varepsilon(b-a).$$

Comme $I^*(f)-I_*(f)$ ne dépend pas de ε, on en déduit que $I^*(f)-I_*(f)=0$, d'où la Riemann intégrabilité de f sur $[a,b]$.

Rappelons que F est une primitive de f sur $[a,b]$ si elle est dérivable en tout point de $[a,b]$ (à droite en a et à gauche en b) et pour tout $x\in[a,b]$, $F'(x)=f(x)$. Soit $\Delta=\{x_0=a<x_1<\dots<x_n=b\}$ une subdivision *quelconque* de $[a,b]$. Par le théorème des accroissements finis[5], il existe dans chaque $]x_{k-1},x_k[$ un c_k tel que $F(x_k)-F(x_{k-1})=(x_k-x_{k-1})F'(c_k)=(x_k-x_{k-1})f(c_k)$. En écrivant

$$F(b)-F(a)=\sum_{k=1}^n\big(F(x_k)-F(x_{k-1})\big)=\sum_{k=1}^n(x_k-x_{k-1})f(c_k)$$

et en encadrant $f(c_k)$ entre les bornes inférieure et supérieure de f sur $[x_{k-1},x_k]$, on en déduit

$$S_\Delta(f)\le F(b)-F(a)\le S^\Delta(f).$$

Cet encadrement est valide pour toute subdivision Δ et $F(b)-F(a)$ ne dépend pas de Δ. Par conséquent

$$I_*(f)\le F(b)-F(a)\le I^*(f)$$

et comme nous savons déjà que f est Riemann intégrable on en déduit $F(b)-F(a)=I_*(f)=I^*(f)$, ce qui établit (1.15). □

[5] Appelé aussi *formule des accroissements finis* : si f est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, il existe $c\in]a,b[$ tel que $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$.

La preuve de (1.15) s'étend immédiatement au cas où F est dérivable sur $]a, b[$, continue à droite en a et à gauche en b et $F' = f$ sur $]a, b[$. D'autre part on peut utiliser l'intégrale de Riemann pour montrer que toute fonction continue sur $[a, b]$ admet des primitives sur $[a, b]$.

Proposition 1.11. *Toute fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, bornée sur $[a, b]$ et continue sur $[a, b]$, sauf en un nombre fini de points est Riemann intégrable sur $[a, b]$.*

Preuve. Nous nous contenterons de le montrer dans le cas où f présente un seul point de discontinuité $c \in]a, b[$, la généralisation ne coûtant qu'un alourdissement de notations. L'adaptation de ce qui suit au cas $c = a$ ou $c = b$ est aussi immédiate.

Fixons $\varepsilon > 0$ arbitraire et soit $\eta > 0$ assez petit pour que $[c - \eta, c + \eta] \subset]a, b[$ et dont le choix en fonction de ε sera précisé ultérieurement. Soit Δ une subdivision de $[a, b]$ ayant comme points *consécutifs* $c - \eta$ et $c + \eta$ (*i. e.* $x_{k_0} = c - \eta$ et $x_{k_0+1} = c + \eta$ pour un certain indice k_0). Cette subdivision Δ peut se construire comme réunion d'une subdivision quelconque Δ_1 de $[a, c - \eta]$ et d'une subdivision quelconque Δ_2 de $[c + \eta, b]$. Comme f est continue sur $[a, c - \eta]$ et $[c + \eta, b]$, elle est Riemann intégrable sur chacun de ces deux segments (prop. 1.10), ce qui nous autorise à choisir Δ_1 et Δ_2 telles que

$$0 \leq S^{\Delta_1}(f) - S_{\Delta_1}(f) \leq \frac{\varepsilon}{3}, \quad 0 \leq S^{\Delta_2}(f) - S_{\Delta_2}(f) \leq \frac{\varepsilon}{3}. \tag{1.16}$$

Notons m et M, m_η et M_η les bornes inférieure et supérieure de f sur respectivement $[a, b]$ et $[c-\eta, c+\eta]$. On a clairement $m \leq m_\eta \leq M_\eta \leq M$, d'où $2\eta(M_\eta - m_\eta) \leq 2\eta(M - m)$, de sorte qu'en choisissant

$$\eta < \frac{\varepsilon}{6(M - m)},$$

on ait

$$2\eta(M_\eta - m_\eta) < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{1.17}$$

Avec le choix de Δ opéré ci-dessus, nous avons

$$\begin{aligned} S^{\Delta}(f) &= S^{\Delta_1}(f) + 2\eta M_\eta + S^{\Delta_2}(f) \\ S_{\Delta}(f) &= S_{\Delta_1}(f) + 2\eta m_\eta + S_{\Delta_2}(f), \end{aligned}$$

d'où compte-tenu de (1.16) et (1.17),

$$0 \leq S^{\Delta}(f) - S_{\Delta}(f) \leq S^{\Delta_1}(f) - S_{\Delta_1}(f) + 2\eta(M_\eta - m_\eta) + S^{\Delta_2}(f) - S_{\Delta_2}(f) < \varepsilon.$$

On en déduit que $0 \leq I^*(f) - I_*(f) < \varepsilon$, puis par arbitrarité de ε que $I^*(f) = I_*(f)$, *i.e.* que f est Riemann intégrable sur $[a, b]$. □

Nous allons maintenant établir que la Riemann intégrabilité se conserve par convergence uniforme sur $[a, b]$. Le lemme suivant nous sera utile.

Lemme 1.12. *Soit E une partie quelconque de $\mathbb{R}$. On suppose que chaque fonction f_n est définie et bornée sur E et que la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge vers f uniformément sur E. Alors f est bornée sur E et*

$$\begin{aligned} m_n(E) &:= \inf_{x\in E} f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \inf_{x\in E} f(x) =: m(E),\\ M_n(E) &:= \sup_{x\in E} f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sup_{x\in E} f(x) =: M(E). \end{aligned}$$

Plus précisément, si pour tout $n\geq n_\varepsilon$, on a pour tout $x\in E$, $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$, alors

$$\forall n\geq n_\varepsilon,\quad |m_n(E)-m(E)|\leq\varepsilon \quad \textit{et} \quad |M_n(E)-M(E)|\leq\varepsilon. \tag{1.18}$$

Preuve. La convergence uniforme de (f_n) vers f sur E, s'écrit

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists n_\varepsilon\in\mathbb{N},\ \forall n\geq n_\varepsilon,\ \forall x\in E,\quad |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon. \tag{1.19}$$

En réécrivant cette inégalité sous la forme $f_n(x)-\varepsilon<f(x)<f_n(x)+\varepsilon$ on en déduit :

$$\forall n\geq n_\varepsilon,\ \forall x\in E,\quad m_n(E)-\varepsilon<f(x)<M_n(E)+\varepsilon,$$

puis en prenant l'infimum et le supremum en $x\in E$ dans cette double inégalité[6] :

$$\forall n\geq n_\varepsilon,\qquad m_n(E)-\varepsilon\leq m(E) \quad \text{et} \quad M(E)\leq M_n(E)+\varepsilon. \tag{1.20}$$

En choisisssant un n particulier, par exemple $n=n_\varepsilon$, on en déduit que f est bornée sur E $(-\infty<m_n(E)-\varepsilon\leq m(E)\leq M(E)\leq M_n(E)+\varepsilon<+\infty)$.

En réécrivant l'inégalité (1.19) sous la forme $f(x)-\varepsilon<f_n(x)<f(x)+\varepsilon$, on obtient de la même façon :

$$\forall n\geq n_\varepsilon,\qquad m(E)-\varepsilon\leq m_n(E) \quad \text{et} \quad M_n(E)\leq M(E)+\varepsilon. \tag{1.21}$$

En regroupant (1.20) et (1.21), on voit ainsi que pour tout $n\geq n_\varepsilon$,

$$m(E)-\varepsilon\leq m_n(E)\leq m(E)+\varepsilon \quad \text{et} \quad M(E)-\varepsilon\leq M_n(E)\leq M(E)+\varepsilon,$$

ce qui nous donne (1.18) et donc les convergences de $m_n(E)$ et $M_n(E)$ vers respectivement $m(E)$ et $M(E)$ puisque $\varepsilon>0$ est ici arbitraire. □

Proposition 1.13. *Si f est limite uniforme sur $[a,b]$ d'une suite $(f_n)_{n\geq 1}$ de fonctions Riemann intégrables sur $[a,b]$, alors f est elle-même Riemann intégrable sur $[a,b]$.*

Preuve. D'abord, f est bornée sur $[a,b]$ comme limite uniforme d'une suite de fonctions bornées (lemme 1.12 avec $E=[a,b]$). On peut donc bien définir les sommes de Darboux $S_\Delta(f)$ et $S^\Delta(f)$ pour toute subdivision Δ de $[a,b]$.

Notons qu'il y a une difficulté supplémentaire dans cette démonstration par rapport aux preuves de la Riemann intégrabilité des fonctions monotones ou continues. Dans

[6] Noter ici le passage des inégalités *strictes* aux inégalité larges.

ces deux cas, f atteignait ses bornes inférieure et supérieure sur chaque intervalle de la subdivision, ce qui facilitait le traitement des sommes de Darboux. Ici, nous n'avons plus ce confort et c'est le lemme 1.12 qui arrange les choses.

Par convergence uniforme de f_n vers f sur $[a, b]$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier n_ε tel que

$$\forall n \geq n_\varepsilon,\ \forall x \in [a, b], \quad |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

En appliquant le lemme 1.12, on a alors *avec le même* n_ε,

$$\forall n \geq n_\varepsilon,\ \forall E \subset [a, b], \quad |m_n(E) - m(E)| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}, \quad |M_n(E) - M(E)| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}. \tag{1.22}$$

Soit $\Delta = \{x_0 = a < x_1 < \cdots < x_j = b\}$ une subdivision quelconque de $[a, b]$. En appliquant (1.22) avec pour E chacun des intervalles $[x_{k-1}, x_k]$ de la subdivision, on vérifie immédiatement que :

$$\forall \Delta,\ \forall n \geq n_\varepsilon, \quad S_\Delta(f_n) - \varepsilon \leq S_\Delta(f) \leq S^\Delta(f) \leq S^\Delta(f_n) + \varepsilon. \tag{1.23}$$

La fonction f_{n_ε} étant par hypothèse Riemann intégrable sur $[a, b]$, il existe une subdivision Δ_ε telle que

$$S_{\Delta_\varepsilon}(f_{n_\varepsilon}) > S^{\Delta_\varepsilon}(f_{n_\varepsilon}) - \varepsilon. \tag{1.24}$$

En choisissant dans (1.23) $n = n_\varepsilon$ et $\Delta = \Delta_\varepsilon$ et en combinant l'encadrement ainsi obtenu avec l'inégalité (1.24), il vient :

$$S^{\Delta_\varepsilon}(f_{n_\varepsilon}) - 2\varepsilon < S_{\Delta_\varepsilon}(f) \leq S^{\Delta_\varepsilon}(f) \leq S^{\Delta_\varepsilon}(f_{n_\varepsilon}) + \varepsilon,$$

d'où l'on tire $0 \leq S^{\Delta_\varepsilon}(f) - S_{\Delta_\varepsilon}(f) < 3\varepsilon$, puis $0 \leq I^*(f) - I_*(f) < 3\varepsilon$. Par arbitrarité de ε, on en déduit $I_*(f) = I^*(f)$, ce qui établit la Riemann intégrabilité de f. □

Définition 1.14 (fonction réglée). *On dit que f est réglée sur $[a, b]$ si elle est limite uniforme sur $[a, b]$ d'une suite de fonctions en escalier.*

Corollaire 1.15 (intégrabilité d'une fonction réglée). *Toute fonction réglée $[a, b] \to \mathbb{R}$ est Riemann intégrable sur $[a, b]$.*

Preuve. C'est une conséquence immédiate des propositions 1.8 et 1.13. □

Pour finir cette section, nous donnons un exemple de fonction Riemann intégrable qui ne soit pas réglée (les fonctions monotones ou continues sont toutes réglées, exercice !) et un exemple de fonction bornée et borélienne qui ne soit pas Riemann intégrable.

Exemple 1.16 (une fonction intégrable non réglée). Soit $E := \{2^{-k};\ k \in \mathbb{N}^*\}$ et $f := \mathbf{1}_E$. La fonction f est bornée et Riemann intégrable sur $[0, 1]$, mais pas réglée. Vérifions ces deux affirmations. Soit $\Delta_n := \{0, 2^{-n}\} \cup \{2^{-k} \pm 2^{-2n};\ 1 \leq k < n\}$. On voit immédiatement que pour tout $n \geq 2$:

$$0 = S_{\Delta_n}(f) \leq I_*(f) \leq I^*(f) \leq S^{\Delta_n}(f) = 2^{-n} + 2(n-1)2^{-2n}.$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on en déduit que $I_*(f) = I^*(f) = 0$, ce qui prouve que f est Riemann intégrable sur $[0,1]$ et que $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Notons au passage qu'on a ainsi un exemple de fonction f positive d'intégrale de Riemann nulle sur $[0,1]$ sans que f soit identiquement nulle sur $[0,1]$. Cette situation ne pourrait pas se produire avec une f *continue* (exercice).

Supposons que $f = \mathbf{1}_E$ soit réglée. Ceci implique que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction en escalier g telle que $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$ pour tout $x \in [0,1]$. Prenons $\varepsilon = 1/3$, choisissons une telle g, notons $\Delta_0 = \{x_0 = 0 < x_1 < \cdots < x_j = 1\}$ une subdivision associée à g (cf. la définition 1.7) et c_1 la valeur constante de g sur $]0, x_1[$. Comme f prend au moins une fois la valeur 1 (en fait une infinité de fois) sur $]0, x_1[$, on a $|1 - c_1| < 1/3$ et de même f prenant au moins une fois la valeur 0 (en fait une infinité de fois) sur $]0, x_1[$, on a $|0 - c_1| < 1/3$. Ces deux inégalités sont incompatibles, donc f ne peut pas être réglée.

Exemple 1.17 (une fonction bornée non intégrable). Soit $E := [0,1] \cap \mathbb{Q}$ et $f := \mathbf{1}_E$. La fonction f est bornée et borélienne (comme indicatrice d'un ensemble borélien de $\mathbb{R}$), mais n'est pas Riemann intégrable sur $[0,1]$. En effet en notant que dans tout intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ il y a au moins un rationnel et un irrationnel, on vérifie facilement que pour *toute* subdivision Δ de $[0,1]$,

$$S_\Delta(f) = 0 \quad \text{et} \quad S^\Delta(f) = 1.$$

On en déduit que $I_*(f) = 0$ et $I^*(f) = 1$, donc f n'est pas Riemann intégrable sur $[0,1]$.

1.3 Propriétés de l'intégrale de Riemann

Cette section regroupe les propriétés générales de l'intégrale de Riemann, à l'exception de celles relatives à l'interversion limite intégrale. Nous étudiaons d'abord les propriétés relatives aux fonctions à intégrer (les intégrandes), autrement dit la structure de l'ensemble $\mathcal{R}[a,b]$. Nous verrons ensuite les propriétés concernant l'intervalle d'intégration.

1.3.1 Propriétés de l'ensemble $\mathcal{R}[a,b]$

Proposition 1.18 (additivité). *Si f et g sont Riemann intégrables sur $[a,b]$, $f+g$ l'est aussi et*

$$\int_a^b (f+g)(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1.25}$$

Preuve. Notons en préliminaire que si f et g sont bornées sur l'intervalle I, $f+g$ l'est aussi et on a

$$\inf_{x\in I} f(x) + \inf_{x\in I} g(x) \le \inf_{x\in I} (f+g)(x), \quad \sup_{x\in I}(f+g)(x) \le \sup_{x\in I} f(x) + \sup_{x\in I} g(x),$$

ces inégalités pouvant être strictes[7].

Fixons $\varepsilon > 0$ quelconque. La Riemann intégrabilité de f et g nous fournissent des subdivisions Δ_1 et Δ_2 telles que $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \varepsilon < S_{\Delta_1}(f) \leq S^{\Delta_1}(f) < \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \varepsilon$ et $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x - \varepsilon < S_{\Delta_2}(g) \leq S^{\Delta_2}(g) < \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x + \varepsilon$. Avec leur raffinement commun $\Delta := \Delta_1 \cup \Delta_2$, on a ainsi :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \varepsilon < S_\Delta(f) \quad\leq\quad S^\Delta(f) < \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \varepsilon, \tag{1.26}$$

$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x - \varepsilon < S_\Delta(g) \quad\leq\quad S^\Delta(g) < \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x + \varepsilon. \tag{1.27}$$

Notons x_i, $0 \leq i \leq n$ les points de Δ, m_i, m_i', m_i'', M_i, M_i', M_i'' les infima et suprema respectifs de $f+g$, f et g sur $[x_{i-1}, x_i]$ pour $i = 1, \dots, n$. Par la remarque faite en préliminaire, on a pour tout $i = 1, \dots, n$,

$$m_i' + m_i'' \leq m_i \leq M_i \leq M_i' + M_i''.$$

On en déduit que

$$S_\Delta(f) + S_\Delta(g) \leq S_\Delta(f+g) \leq S^\Delta(f+g) \leq S^\Delta(f) + S^\Delta(g). \tag{1.28}$$

En combinant (1.26), (1.27) et (1.28), on obtient

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x - 2\varepsilon < S_\Delta(f+g) \leq S^\Delta(f+g) < \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x + 2\varepsilon,$$

d'où

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x - 2\varepsilon < I_*(f+g) \leq I^*(f+g) < \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x + 2\varepsilon.$$

Ce dernier encadrement étant vérifié pour tout $\varepsilon > 0$, on peut y faire tendre ε vers 0 pour obtenir finalement

$$I_*(f+g) = I^*(f+g) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x,$$

ce qui établit l'intégrabilité de $f+g$ et (1.25). □

Proposition 1.19. *Si f est intégrable sur $[a,b]$ et $c \in \mathbb{R}$ est une constante, cf est intégrable sur $[a,b]$ et*

$$\int_a^b cf(x)\,\mathrm{d}x = c\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1.29}$$

[7]Par exemple $f : x \mapsto x$ et $g : x \mapsto 1 - x$ sur $I = [0,1]$.

Preuve. Le résultat est trivial si $c = 0$, puisqu'alors cf est la fonction identiquement nulle sur $[a, b]$, Riemann intégrable d'intégrale 0. Supposons $c \neq 0$. Si f est bornée sur l'ensemble E, cf est bornée sur E. On vérifie facilement que

$$\text{si } c > 0, \quad \inf_{x \in E}(cf)(x) = c \inf_{x \in E} f(x), \quad \sup_{x \in E}(cf)(x) = c \sup_{x \in E} f(x), \tag{1.30}$$

et que

$$\text{si } c < 0, \quad \inf_{x \in E}(cf)(x) = c \sup_{x \in E} f(x), \quad \sup_{x \in E}(cf)(x) = c \inf_{x \in E} f(x). \tag{1.31}$$

Pour $c > 0$, on déduit de (1.30) que pour toute subdivision Δ de $[a, b]$,

$$S_\Delta(cf) = cS_\Delta(f), \quad S^\Delta(cf) = cS^\Delta(f),$$

d'où $I_*(cf) = cI_*(f)$ et $I^*(cf) = cI^*(f)$. Ces deux égalités sont valables pour n'importe quelle fonction bornée f sur $[a, b]$. Ici f est de plus intégrable sur $[a, b]$, donc $I_*(f) = I^*(f) = \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x$, d'où $I_*(cf) = I^*(cf) = c \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x$, ce qui prouve l'intégrabilité de cf et établit (1.29). Pour $c < 0$, on déduit de (1.31) que pour toute subdivision Δ de $[a, b]$,

$$S_\Delta(cf) = cS^\Delta(f), \quad S^\Delta(cf) = cS_\Delta(f),$$

d'où $I_*(cf) = cI^*(f)$ et $I^*(cf) = cI_*(f)$. Par intégrabilité de f, on en déduit comme ci-dessus que $I_*(cf) = I^*(cf) = c \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x$, ce qui complète la preuve. □

On peut synthétiser les propositions 1.18 et 1.19 dans l'énoncé suivant.

Proposition 1.20 (linéarité). *L'ensemble* $\mathcal{R}[a, b]$ *des applications* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, *Riemann intégrables sur* $[a, b]$ *est un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel et l'application* $\Psi : \mathcal{R}[a, b] \to \mathbb{R}$, $f \mapsto \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x$ *est une forme linéaire sur cet espace.*

Proposition 1.21 (croissance de l'intégrale). *L'intégrale de Riemann sur* $[a, b]$ *possède les trois propriétés suivantes relativement à la relation d'ordre partiel* $\leq$ *définie sur* $\mathcal{R}[a, b]$ *par* $f \leq g$ *si* $\forall x \in [a, b]$, $f(x) \leq g(x)$.

i) Positivité :

$$\textit{si } f \in \mathcal{R}[a, b] \textit{ et } f \geq 0 \textit{ sur } [a, b], \quad \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x \geq 0. \tag{1.32}$$

ii) Croissance :

$$\textit{si } f, g \in \mathcal{R}[a, b] \textit{ et } f \leq g \textit{ sur } [a, b], \quad \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x) \, \mathrm{d}x. \tag{1.33}$$

iii) Si $f \in \mathcal{R}[a, b]$, *l'application* $|f| : x \mapsto |f(x)|$ *est elle aussi Riemann intégrable sur* $[a, b]$ *et*

$$\left| \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x \right| \leq \int_a^b |f(x)| \, \mathrm{d}x. \tag{1.34}$$

Preuve. Rappelons que lorsqu'on parle d'intégrale sur $[a,b]$, on suppose implicitement $a \leq b$. Dans le cas $a > b$, on aurait $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq 0$ dans (1.32) et $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ dans (1.33).

Pour prouver i), on remarque que si $f \geq 0$ sur $[a,b]$ et Δ est une subdivision (croissante) quelconque de $[a,b]$, on a $m_k \geq 0$ pour chaque intervalle $[x_{k-1}, x_k]$ de Δ, donc $S_\Delta(f) \geq 0$ et par conséquent $I^*(f) \geq I_*(f) \geq 0$. Ce raisonnement est valable pour toute f positive bornée sur $[a,b]$. Comme ici f est de plus Riemann intégrable sur $[a,b]$, $I_*(f) = I^*(f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ et (1.32) est vérifiée.

On vérifie ii) en notant que si f, g sont dans $\mathcal{R}[a,b]$, $h := g - f$ aussi (prop. 1.20) et $h \geq 0$. En utilisant i) et la proposition 1.20, on obtient

$$0 \leq \int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

ce qui nous donne (1.33).

Admettons un instant que l'intégrabilité de f implique celle de $|f|$. En appliquant ii) avec l'encadrement $-|f| \leq f \leq |f|$, il vient[8] :

$$-\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x,$$

ce qui équivaut à (1.34).

Il reste à montrer que $|f|$ hérite de l'intégrabilité de f. Pour toute subdivision $\Delta = \{x_0 = a < x_1 < \dot{<} x_n = b\}$, notons

$$m_k := \inf_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x), \quad m'_k := \inf_{x\in[x_{k-1},x_k]} |f(x)|,$$

$$M_k := \sup_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x), \quad M'_k := \sup_{x\in[x_{k-1},x_k]} |f(x)|.$$

Par le lemme 1.22 ci-dessous, on a pour tout $k = 1, \dots, n$, $0 \leq M'_k - m'_k \leq M_k - m_k$, d'où

$$0 \leq I^*(|f|) - I_*(|f|) \leq S^\Delta(|f|) - S_\Delta(|f|) \leq S^\Delta(f) - S_\Delta(f)$$

Comme f est Riemann intégrable sur $[a,b]$, on peut choisir pour tout ε une subdivision Δ telle que $S^\Delta(f) - S_\Delta(f) < \varepsilon$ et l'encadrement ci-dessus appliqué à cette subdivision nous donne $0 \leq I^*(|f|) - I_*(|f|) < \varepsilon$, d'où $I^*(|f|) = I_*(|f|)$ par arbitrarité de ε. □

Lemme 1.22. *Si f est bornée sur $E \subset \mathbb{R}$, alors $|f|$ est bornée sur E et en notant $m := \inf_E f$, $m' := \inf_E |f|$, $M := \sup_E f$, $M' := \sup_E |f|$, on a $0 \leq M' - m' \leq M - m$, l'inégalité pouvant être stricte.*

Preuve. Si $M' - m' = 0$, c'est trivial[9]. Supposons désormais que $M' - m' > 0$. Alors pour tout ε tel que $0 < \varepsilon < (M' - m')/2$, on peut trouver $x_1, x_2 \in E$, dépendants de ε, tels que :

$$m' \leq |f(x_1)| < m' + \varepsilon < M' - \varepsilon < |f(x_2)| \leq M'. \tag{1.35}$$

[8]En utilisant aussi $\int_a^b -|f(x)|\,\mathrm{d}x = -\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$ par linéarité.

[9]Cette situation peut se produire, par exemple $E = [-1,1]$ et $f(x) = \mathbf{1}_{[-1,0]}(x) - \mathbf{1}_{]0,1]}(x)$, on a dans ce cas $0 = M' - m' < M - m = 2$.

Par inégalité triangulaire, $|f(x_2)| - |f(x_1)| \leq |f(x_2) - f(x_1)|$. D'autre part $f(x_1)$ et $f(x_2)$ sont des réels du segment $[m, M]$, d'où $|f(x_2) - f(x_1)| \leq M - m$ et donc

$$|f(x_2)| - |f(x_1)| \leq M - m.$$

En combinant cette dernière inégalité avec (1.35), il vient :

$$M' - m' - 2\varepsilon \leq M - m.$$

Faisant tendre ε vers 0 dans cette inégalité *large*, on obtient $M' - m' \leq M - m$. □

Remarque 1.23. La Riemann intégrabilité de $|f|$ n'implique pas celle de f. Voici un contre exemple avec $[a, b] = [0, 1]$, $f(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q}$ et -1 si $x \notin \mathbb{Q}$. Alors, comme dans l'exemple 1.17, f n'est pas Riemann intégrable sur $[0, 1]$, tandis que $|f|$ l'est (comme fonction constante).

Voici une conséquence immédiate de l'implication $f \in \mathcal{R}[a, b] \Rightarrow |f| \in \mathcal{R}[a, b]$ dans la proposition 1.21 iii).

Corollaire 1.24. *Si f est Riemann intégrable sur $[a, b]$, les fonctions $f^+ := \max(f, 0)$ et $f^- := \max(-f, 0) = -\min(f, 0)$ le sont aussi. On a de plus*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f^+(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f^-(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1.36}$$

Preuve. On commence par remarquer que

$$f^+ = \frac{1}{2}(|f| + f), \quad f^- = \frac{1}{2}(|f| - f).$$

Par la proposition 1.21 iii) l'intégrabilité de f implique celle de $|f|$. L'ensemble $\mathcal{R}[a, b]$ étant un espace vectoriel (prop. 1.20), on en déduit la Riemann intégrabilité sur $[a, b]$ de f^+ et f^-. La linéarité de l'intégrale et l'égalité $f = f^+ - f^-$ nous donnent (1.36). □

Remarque 1.25 (semi norme sur $\mathcal{R}[a, b]$). Grâce au point iii) de la proposition 1.21, on peut définir l'application

$$N : \mathcal{R}[a, b] \to \mathbb{R}_+, \quad f \mapsto N(f) := \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Cette application est une *semi norme* sur $\mathcal{R}[a, b]$ car elle vérifie $N(cf) = |c|N(f)$ pour toute constante c et $N(f + g) \leq N(f) + N(g)$. Elle n'est pas une norme car on peut avoir $\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x = 0$ sans que f soit la fonction nulle sur $[a, b]$, voir l'exemple 1.16.

Proposition 1.26 (Intégrabilité d'un produit). *Si f et g sont Riemann intégrables sur $[a, b]$, leur produit fg l'est aussi.*

Preuve. En écrivant $fg = (f^+ - f^-)(g^+ - g^-) = f^+g^+ - f^-g^+ - f^+g^- + f^-g^-$ et en utilisant le corollaire 1.24 et la linéarité de l'intégrale de Riemann, on voit qu'il suffit de traiter le cas où f et g sont toutes deux *positives* sur $[a, b]$.

Fixons $\varepsilon > 0$ quelconque. La Riemann intégrabilité de f et g nous fournissent des subdivisions Δ_1 et Δ_2 telles que $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \varepsilon < S_{\Delta_1}(f) \leq S^{\Delta_1}(f) < \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \varepsilon$ et $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x - \varepsilon < S_{\Delta_2}(g) \leq S^{\Delta_2}(g) < \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x + \varepsilon$. Avec leur raffinement commun $\Delta := \Delta_1 \cup \Delta_2$, on a ainsi :

$$0 \leq S^{\Delta}(f) - S_{\Delta}(f) \leq 2\varepsilon, \tag{1.37}$$

$$0 \leq S^{\Delta}(g) - S_{\Delta}(g) \leq 2\varepsilon. \tag{1.38}$$

Rappelons ici que f et g Riemann intégrables sur $[a, b]$ sont *ipso facto bornées* sur cet intervalle, donc fg est aussi bornée sur $[a, b]$. Notons x_i, $0 \leq i \leq n$ les points de Δ, m_i, m'_i, m''_i, M_i, M'_i, M''_i les infima et suprema respectifs de fg, f et g sur $[x_{i-1}, x_i]$ pour $i = 1, \dots, n$. Par positivité on a pour tout $i = 1, \dots, n$,

$$\forall x \in [x_{i-1}, x_i], \quad 0 \leq m'_i m''_i \leq f(x)g(x) \leq M'_i M''_i,$$

d'où

$$0 \leq m'_i m''_i \leq m_i \leq M_i \leq M'_i M''_i.$$

Notons c un majorant commun sur $[a, b]$ aux fonctions positives bornées f et g . On alors on a pour tout $i = 1, \dots, n$,

$$\begin{aligned} 0 \leq M_i - m_i \leq M'_i M''_i - m'_i m''_i &= (M'_i - m'_i)M''_i + m'_i(M''_i - m''_i) \\ &\leq c(M'_i - m'_i) + c(M''_i - m''_i). \end{aligned}$$

En reportant cette majoration dans le calcul de $S^{\Delta}(fg) - S_{\Delta}(fg)$ et en tenant compte de (1.37) et (1.38), on obtient

$$0 \leq S^{\Delta}(fg) - S_{\Delta}(fg) \leq 4c\varepsilon.$$

Comme ε était arbitraire, on en déduit la Riemann intégrabilité de fg. □

Contrairement à ce qui se passe pour la Riemann intégrabilité d'une somme $f + g$, il n'y a pas de formule permettant de calculer $\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ en fonction de $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$. La formule « $\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ » est *grossièrement fausse*. Voici un contre exemple élémentaire avec des fonctions en escalier. Prenons $a = 0$, $b = 2$, $f = \mathbf{1}_{[0,1]}$, $g = \mathbf{1}_{]1,2]}$. Alors fg est la fonction nulle sur $[0, 2]$ et donc $\int_0^2 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = 0$, alors que $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x \int_0^2 g(x)\,\mathrm{d}x = 1$ parce que $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_0^2 g(x)\,\mathrm{d}x$ valent chacune 1.

Proposition 1.27 (inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathcal{R}[a, b]$). *Si f et g sont Riemann intégrables sur $[a, b]$, on a l'inégalité*

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \right| \leq \left\{ \int_a^b f(x)^2\,\mathrm{d}x \right\}^{1/2} \left\{ \int_a^b g(x)^2\,\mathrm{d}x \right\}^{1/2}. \tag{1.39}$$

Preuve. Soit t un réel quelconque. Par les propositions 1.20 et 1.26, les fonctions f^2, g^2, fg et $(tf + g)^2$ héritent de la Riemann intégrabilité de f et g. Posons

$$P(t) := \int_a^b \bigl(tf(x) + g(x)\bigr)^2 \, \mathrm{d}x.$$

Il est clair que $P(t)$ est positif ou nul pour tout t réel. Or en développant le carré $(tf+g)^2$ et en utilisant la linéarité de l'intégrale, on obtient

$$P(t) = \left\{ \int_a^b f(x)^2 \, \mathrm{d}x \right\} t^2 + 2 \left\{ \int_a^b f(x)g(x) \, \mathrm{d}x \right\} t + \int_a^b g(x)^2 \, \mathrm{d}x.$$

On reconnaît là un trinôme du second degré At^2+Bt+C dont les coefficients A, B, C sont des intégrales. Ce trinôme ne peut avoir de signe constant, celui de $A = \int_a^b f(x)^2 \, \mathrm{d}x \geq 0$, que si son discriminant $\Delta = B^2 - 4AC$ est négatif ou nul. Remplaçant A, B et C par leurs expressions sous forme d'intégrales, on en déduit (1.39). □

1.3.2 Propriétés relatives à l'intervalle d'intégration

L'intégrale de Riemann se laisse volontiers découper en morceaux. Voici les énoncés précis dont la vérification est laissée au lecteur.

Proposition 1.28 (additivité relative aux intervalles). *Soit* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *et* $c \in]a, b[$. *Pour que* f *soit Riemann intégrable sur* $[a, b]$, *il faut et il suffit qu'elle soit Riemann intégrable sur* $[a, c]$ *et sur* $[c, b]$. *On a alors*

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = \int_a^c f(x) \, \mathrm{d}x + \int_c^b f(x) \, \mathrm{d}x. \tag{1.40}$$

En combinant la proposition 1.28 avec la définition 1.2, on obtient la formule classique suivante.

Proposition 1.29 (relation de Chasles). *Pour tous réels* a, b, c, *on a*

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = \int_a^c f(x) \, \mathrm{d}x + \int_c^b f(x) \, \mathrm{d}x,$$

pourvu que f *soit Riemann intégrable sur* $[\min(a, b, c), \max(a, b, c)]$.

Une autre application de l'additivité relative aux intervalles est la généralisation de la formule (1.10) pour le calcul de l'aire du domaine H délimité par le graphe de f, l'axe des abscisses et les deux droites verticales d'équations $x = a$ et $x = b$, voir figure 1.6. Plus précisément, H est défini par

$$H := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ a \leq x \leq b \text{ et } -f^-(x) \leq y \leq f^+(x)\}, \tag{1.41}$$

en notant que $-f^-(x) = f(x)$ ou 0 selon que $f(x) < 0$ ou non et que $f^+(x) = f(x)$ ou 0 selon que $f(x) > 0$ ou non. En combinant la proposition 1.5, la remarque 1.6, l'additivité relative aux intervalles de l'intégrale de Riemann et l'additivité finie de λ_2, on obtient le résultat suivant pour les fonctions n'ayant qu'un nombre fini de changements de signe sur $[a, b]$.

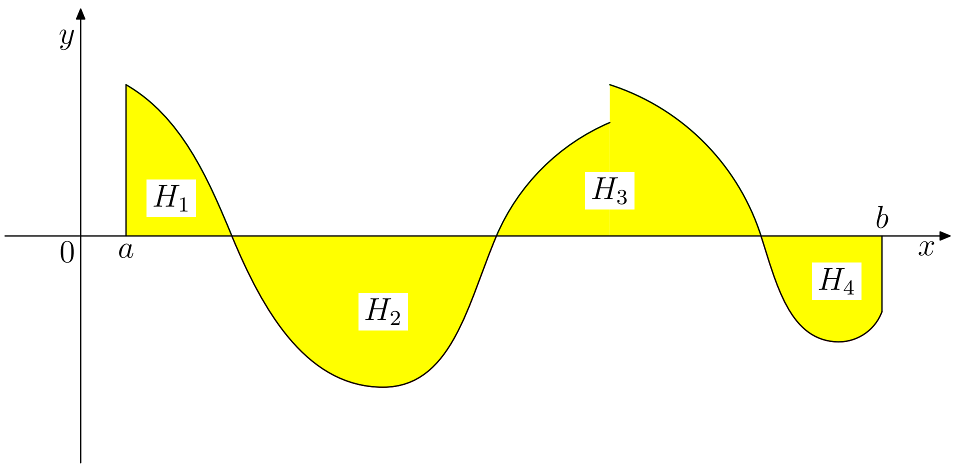

FIG. 1.6 – Domaine H délimité par f entre a et b

Proposition 1.30. *Soit f une fonction borélienne sur $[a,b]$ et Riemann intégrable sur $[a,b]$. On suppose qu'il existe une subdivision $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b$ telle que le signe de f soit constant sur chacun des $[x_{i-1}, x_i]$, $1 \leq i \leq n$. Alors l'aire du domaine H défini par (1.41) est donnée par*

$$\lambda_2(H) = \int_a^b |f(x)| \,\mathrm{d}x. \tag{1.42}$$

Dans cet énoncé, « signe constant » s'entend au sens large : ou bien $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [x_{i-1}, x_i]$ ou bien $f(x) \leq 0$ pour tout $x \in [x_{i-1}, x_i]$. L'hypothèse f borélienne assure que sa restriction à chacun des $[x_{i-1}, x_i]$ est encore borélienne (pour les tribus adéquates) et donc que chaque $H_i := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x_{i-1} \leq x \leq x_i \text{ et } -f^-(x) \leq y \leq f^+(x)\}$ est un borélien de $\mathbb{R}^2$ (admis). Bien entendu en écrivant cet énoncé, on a en tête le cas où le signe de f change à la traversée de chaque x_i, $0 < i < n$, mais la formule (1.42) reste évidemment vraie sans cette hypothèse. Si f a le même signe sur deux intervalles consécutifs, on peut trouver une subdivision « plus économique » en les fusionnant.

Nous pouvons maintenant donner une interprétation géométrique de l'intégale de Riemann, au moins pour les fonctions f vérifiant les hypothèses de la proposition 1.30. Pour cela on appelle « aire algébrique », la somme des $\lambda_2(H_i)$, *chacun étant compté avec le signe de f* sur l'intervalle correspondant. L'aire algébrique du domaine H représenté à la figure 1.6 vaut ainsi $\lambda_2(H_1) - \lambda_2(H_2) + \lambda_2(H_3) - \lambda_2(H_4)$. Plus formellement, posons

$$s_i := \begin{cases} +1 & \text{si } f(t) > 0 \text{ pour au moins un } t \in]x_{i-1}, x_i[, \\ -1 & \text{si } f(t) < 0 \text{ pour au moins un } t \in]x_{i-1}, x_i[, \\ 0 & \text{si } f(t) = 0 \text{ pour tout } t \in]x_{i-1}, x_i[. \end{cases}$$

L'argumentation esquissée pour la proposition 1.30 nous donne

$$\text{aire algébrique}(H) := \sum_{i=1}^n s_i \lambda_2(H_i) = \int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x. \tag{1.43}$$

Nous regroupons dans le théorème suivant les propriétés de « l'intégrale indéfinie », c'est à dire de la *fonction* $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

Théorème 1.31. *Soit f Riemann intégrable sur $[a,b]$. Alors elle est aussi Riemann intégrable sur $[a,x]$ pour tout $x \in [a,b]$, ce qui permet de définir l'application $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ par*

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

i) F est continue sur $[a,b]$ et même lipschitzienne.

ii) Si f a une limite ℓ au point c de $[a,b]$ (resp. une limite à droite, resp. à gauche), F est dérivable au point c (resp. à gauche, resp. à droite) et $F'(c) = \ell$.

iii) Si f est continue sur $[a,b]$, F est dérivable sur $[a,b]$ et a pour fonction dérivée f. C'est l'unique primitive de f sur $[a,b]$ qui s'annule au point a.

Preuve de i). Notons $C := \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|$. En utilisant la relation de Chasles et la proposition 1.21, on a pour tous $a \leq x \leq y \leq b$,

$$|F(y) - F(x)| = \left|\int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_x^y |f(t)|\,\mathrm{d}t \leq \int_x^y C\,\mathrm{d}t = C|y-x|.$$

Ceci montre que F est lipschitzienne de rapport C sur $[a,b]$, donc *a fortiori* continue. □

Preuve de ii). Commençons par noter que pour tout $x \neq c$ dans $[a,b]$,

$$\frac{F(x)-F(c)}{x-c} = \frac{1}{x-c}\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t, \quad \text{et} \quad \ell = \frac{1}{x-c}\int_c^x \ell\,\mathrm{d}t. \tag{1.44}$$

Comme f a pour limite ℓ au point c, on a :

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0,\ 0 \leq |t-c| \leq |x-c| < \delta \Rightarrow |f(t) - \ell| < \varepsilon. \tag{1.45}$$

En combinant (1.44) et (1.45), on voit que pour tout $x \in [a,b]$ vérifiant $|x-c| < \delta$,

$$\left|\frac{F(x)-F(c)}{x-c} - \ell\right| = \left|\frac{1}{x-c}\int_c^x (f(t)-\ell)\,\mathrm{d}t\right| \leq \frac{1}{|x-c|}\int_c^x |f(t)-\ell|\,\mathrm{d}t \leq \varepsilon,$$

ce qui montre que F est dérivable au point c, de nombre dérivé $F'(c) = \ell$. L'adaptation au cas d'une limite à droite ou à gauche (avec dérivée à droite ou à gauche) est immédiate. □

Preuve de iii). Si f est continue sur $[a,b]$, elle a pour limite $f(c)$ en tout point c de $[a,b]$ et donc d'après ii), F est dérivable sur $[a,b]$ et $F'(c) = f(c)$. Cette dernière égalité ayant lieu maintenant pour tout $c \in [a,b]$, on a $F' = f$, autrement dit F est *une primitive* de f sur $[a,b]$. On sait que toutes les primitives de f sur *l'intervalle* $[a,b]$ diffèrent entre elles d'une constante[10] Il y en a donc une seule qui s'annule au point a, c'est F. □

[10] C'est une conséquence de la formule des accroissements finis (cf. p.12) : si une fonction continue sur $[a,b]$ a une dérivée nulle sur $]a,b[$, elle est constante sur $[a,b]$ et on applique ceci à la différence de deux primitives quelconques de f sur $[a,b]$.

Proposition 1.32 (changement de variable).

i) Translation. Soit $c \in \mathbb{R}$. Pour toute f Riemann intégrable sur $[a+c, b+c]$, l'application $g : [a,b] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x+c)$ est Riemann intégrable sur $[a,b]$ et

$$\int_a^b f(x+c)\,\mathrm{d}x = \int_{a+c}^{b+c} f(y)\,\mathrm{d}y. \tag{1.46}$$

ii) Changement d'échelle. Soit $c \in \mathbb{R}^*$. Pour toute f Riemann intégrable sur l'intervalle fermé d'extrêmités[11] ac et bc, l'application $h : [a,b] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(cx)$ est Riemann intégrable sur $[a,b]$ et

$$\int_a^b f(cx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{c}\int_{ac}^{bc} f(y)\,\mathrm{d}y. \tag{1.47}$$

iii) Classique. Soit $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$, une fonction ayant une dérivée continue sur $[a,b]$ (autrement dit $\varphi \in C^1[a,b]$). Pour toute fonction f continue *sur l'intervalle fermé borné $\varphi([a,b])$, on a*

$$\int_a^b f\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y)\,\mathrm{d}y. \tag{1.48}$$

Bien sûr i) et ii) sont contenus dans iii) si f est *continue*, mais l'intérêt de ces deux énoncés séparés est qu'ils sont valables avec *n'importe quelle* fonction f Riemann intégrable.

Preuve de i). À chaque subdivision $\Delta = \{x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ de $[a,b]$, associons la subdivision translatée $\Delta' = \{y_0 = a+c < \cdots < y_k = x_k + c < \cdots < y_n = b+c\}$. Comme f est bornée sur $[a+c, b+c]$, g est bornée sur $[a,b]$ avec mêmes bornes. De plus en notant m_k, m'_k les infima respectifs de f sur $[x_{k-1}, x_k]$ et de g sur $[y_{k-1}, y_k]$, et en définissant de même M_k et M'_k pour les suprema, on $m_k = m'_k$ et $M_k = M'_k$ pour $k = 1, \dots, n$. Par conséquent $S_\Delta(g) = S_{\Delta'}(f)$ et $S^\Delta(g) = S^{\Delta'}(f)$, pour toute subdivision Δ de $[a,b]$. Comme la transformation $\Delta \mapsto \Delta'$ réalise une bijection entre l'ensemble des subdivisions de $[a,b]$ et l'ensemble des subdivisions de $[a+c, b+c]$, on en déduit que

$$I^*(g) = \inf_\Delta S^\Delta(g) = \inf_{\Delta'} S^{\Delta'}(f) = I^*(f) \tag{1.49}$$

et de même

$$I_*(g) = \sup_\Delta S_\Delta(g) = \sup_{\Delta'} S_{\Delta'}(f) = I_*(f). \tag{1.50}$$

Comme on sait de plus que f est Riemann intégrable sur $[a+c, b+c]$, on a $I^*(f) = I^*(f)$. Compte-tenu de (1.49)–(1.50), on en déduit $I^*(g) = I_*(g) = I^*(f) = \int_{a+c}^{b+c} f(y)\,\mathrm{d}y$, ce qui nous donne la Riemann intégrabilité de g sur $[a,b]$ et l'égalité (1.46). □

[11] Il s'agit de $[ac, bc]$ si $c > 0$ et de $[bc, ac]$ si $c < 0$.

Preuve de ii). La méthode étant essentiellement la même que pour le i), nous nous contenterons d'indiquer les adaptations nécessaires. Si $c > 0$, on associe à $\Delta = \{x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ la subdivision Δ' dont les points sont les $y_k = cx_k$. Alors Δ' est une subdivision croissante de $[ac, bc]$ et comme $y_k - y_{k-1} = c(x_k - x_{k-1})$, on voit que $S_\Delta(h) = \frac{1}{c}S_{\Delta'}(f)$ et $S^\Delta(h) = \frac{1}{c}S^{\Delta'}(f)$. On en déduit comme ci-dessus l'intégrabilité de h et (1.47).

Si $c < 0$, $bc \leq ac$ et on prend pour subdivision croissante Δ' associée à Δ la subdivision de $[bc, ac]$ ayant pour points les $y_k = cx_{n-k}$. Alors pour $k = 1, \dots, n$, $y_k - y_{k-1} = c(x_{n-k} - x_{n-k+1}) = -c(x_{n-k+1} - x_{n-k})$. On en déduit que $S_\Delta(h) = \frac{-1}{c}S_{\Delta'}(f)$ et $S^\Delta(h) = \frac{-1}{c}S^{\Delta'}(f)$ puis, que h est Riemann intégrable et

$$\int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x = \frac{-1}{c}\int_{bc}^{ac} f(y)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{c}\int_{ac}^{bc} f(y)\,\mathrm{d}y,$$

en utilisant la définition 1.2. □

Preuve de iii). D'abord, φ étant continue, l'image J de $[a, b]$ par φ est un *intervalle* (théorème des valeurs intermédiaires) et comme $[a, b]$ est *compact*, $J = \varphi([a, b])$ est aussi compact (l'image d'un compact par une application continue est un compact). Ainsi J est un intervalle compact, donc un intervalle fermé borné. Cet intervalle contient évidemment l'intervalle I d'extrêmités $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$ (pas forcément dans cet ordre), l'inclusion pouvant être stricte. La fonction f étant continue sur J l'est aussi par restriction sur I et l'intégrale au second membre de (1.48) est donc bien définie. L'intégrale du premier membre l'est tout autant puisque $(f \circ \varphi)\varphi'$ est continue sur $[a, b]$.

Introduisons les fonctions F, G, H suivantes :

$$F : J \to \mathbb{R}, s \mapsto \int_{\varphi(a)}^s f(y)\,\mathrm{d}y, \quad G : [a, b] \to \mathbb{R}, s \mapsto \int_a^s f\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x, \quad H := F \circ \varphi.$$

Par le théorème 1.31, F est dérivable sur J et $F' = f$. De même G est dérivable sur $[a, b]$ et $G' = (f \circ \varphi)\varphi'$. D'autre part H est dérivable comme fonction composée et

$$H' = (F' \circ \varphi)\varphi' = (f \circ \varphi)\varphi' = G'.$$

Les fonctions H et G ont ainsi même dérivée sur $[a, b]$, leur différence est donc constante sur $[a, b]$. Or $H(a) = 0$ et $G(a) = 0$, donc $H = G$. En particulier, $H(b) = G(b)$, ce qui établit (1.48). □

1.4 Interversion limite intégrale

Théorème 1.33. *Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions Riemann intégrables sur $[a, b]$. On suppose que cette suite converge uniformément vers f sur $[a, b]$. Alors f est Riemann intégrable sur $[a, b]$ et on a*

$$\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t. \tag{1.51}$$

Preuve. Dans la preuve de ce théorème la partie difficile est d'établir la Riemann intégrabilité de f, mais nous l'avons déjà vue par la proposition 1.13. Une fois que l'on sait que f est Riemann intégrable, on peut écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \Big| \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t \Big| \leq \int_a^b |f(t) - f_n(t)|\,\mathrm{d}t. \tag{1.52}$$

Par convergence uniforme, on a pour tout $\varepsilon > 0$ un entier n_ε tel que

$$\forall n \geq n_\varepsilon,\ \forall t \in [a,b], \quad |f(t) - f_n(t)| = |f - f_n|(t) < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

En reportant cette inégalité dans (1.52), en utilisant la linéarité de l'intégrale et la proposition 1.21 iii), on en déduit que pour tout $n \geq n_\varepsilon$,

$$\Big| \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t \Big| = \Big| \int_a^b (f - f_n)(t)\,\mathrm{d}t \Big| \leq \int_a^b |f - f_n|(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}\,\mathrm{d}t = \varepsilon.$$

Ceci étant valable pour tout $\varepsilon > 0$, la convergence (1.51) est établie. □

Théorème 1.34. *Soit* $(f_n)_{n\geq 1}$ *une suite de* fonctions toutes décroissantes sur $[a,b]$*. On suppose de plus que :*

$$\forall t \in [a,b], \quad f_n(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(t) \in \mathbb{R}.$$

Alors la fonction f *ainsi définie est Riemann intégrable sur* $[a,b]$ *et*

$$\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Il est clair que le théorème reste vrai si toutes les f_n d'indice $n \geq n_0$ sont décroissantes ou si elles sont croissantes pour tout $n \geq n_0$. Attention à ne pas confondre « suite de *fonctions décroissantes* sur $[a,b]$ » avec « *suite décroissante* de fonctions définies sur $[a,b]$ ». Ici on est dans le premier cas et on ne suppose rien sur le sens de variation des suites de réels $\big(f_n(t)\big)_{n\geq 1}$, $t \in [a,b]$.

Preuve. Remarquons d'abord que la fonction limite f est décroissante sur $[a,b]$ comme limite d'une suite de fonctions décroissantes puisque le passage à la limite conserve les inégalités larges. Par la proposition 1.9, f est donc elle aussi Riemann intégrable.

Cette Riemann intégrabilité de f nous assure de l'existence pour $\varepsilon > 0$ arbitraire fixé d'une subdivision $\Delta = \{t_0 = a < t_1 < \cdots < t_j = b\}$ telle que

$$S^\Delta(f) - \varepsilon < \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t < S_\Delta(f) + \varepsilon. \tag{1.53}$$

Notons que par *décroissance* de f et de f_n, ces fonctions *atteignent* sur $[t_{k-1}, t_k]$ leur supremum au point t_{k-1} et leur infimum [12] au point t_k. On peut donc expliciter comme suit pour f et f_n les sommes de Darboux supérieures

$$S^\Delta(f) = \sum_{k=1}^{j} f(t_{k-1})(t_k - t_{k-1}), \quad S^\Delta(f_n) = \sum_{k=1}^{j} f_n(t_{k-1})(t_k - t_{k-1}),$$

[12] Donc le supremum et l'infimum sont ici respectivement un maximum et un minimum.

et les sommes de Darboux inférieures :

$$S_\Delta(f) = \sum_{k=1}^{j} f(t_k)(t_k - t_{k-1}), \quad S_\Delta(f_n) = \sum_{k=1}^{j} f_n(t_k)(t_k - t_{k-1}).$$

Par convergence simple de f_n vers f sur $[a, b]$, on peut trouver n_ε tel que

$$\forall n \geq n_\varepsilon,\ \forall k = 0, 1, \ldots, j, \quad |f(t_k) - f_n(t_k)| < \frac{\varepsilon}{b - a}. \tag{1.54}$$

En effet on n'a qu'un nombre fini $j+1$ d'écarts à contrôler (rappelons que pour l'instant ε est fixé et donc j aussi) et par convergence de $f_n(t_k)$ vers $f(t_k)$, on trouve pour chaque $k = 0, 1, \ldots, j$ un rang $n_{\varepsilon,k}$ à partir duquel l'inégalité ci-dessus est toujours réalisée. On prend alors $n_\varepsilon = \max_{0 \leq k \leq j} n_{\varepsilon,k}$. En utilisant (1.54) et la positivité des $(t_k - t_{k-1})$, on en déduit immédiatement que

$$S^\Delta(f) > S^\Delta(f_n) - \varepsilon, \quad S_\Delta(f) < S_\Delta(f_n) + \varepsilon. \tag{1.55}$$

En reportant ces inégalités dans (1.53), on obtient

$$S^\Delta(f_n) - 2\varepsilon < \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t < S_\Delta(f_n) + 2\varepsilon,$$

puis

$$\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t - 2\varepsilon < \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t < \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t + 2\varepsilon.$$

Autrement dit, nous avons trouvé un entier n_ε tel que

$$\forall n \geq n_\varepsilon, \quad \left| \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \right| < 2\varepsilon.$$

Comme ε était arbitraire, ceci exprime précisément la convergence quand n tend vers l'infini, de $\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t$ vers $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. $\square$

Chapitre 2

Intégrale généralisée

L'intégrale de Riemann étudiée dans l'annexe 1 concerne des fonctions f définies en tout point d'un intervalle *fermé borné* $[a, b]$ et *bornées* sur cet intervalle. Il est utile de généraliser cette notion au cas de fonctions définies sur un intervalle quelconque, sauf peut-être en un nombre fini de points, et pas forcément bornées. Dans le cadre de ce cours, les principales applications de cette notion d'intégrale généralisée concernent les lois à densité, l'espérance et les moments de variables aléatoires.

2.1 Construction

Commençons par examiner cette généralisation de l'intégrale de Riemann sur quelques exemples simples.

Exemple 2.1. *Peut-on définir* $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ *?*

Ici l'intervalle d'intégration est $[0, +\infty[$ et l'intégrande $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ est définie et continue sur cet intervalle, donc en particulier Riemann intégrable sur tout sous-intervalle fermé borné de la forme $[0, b]$. L'intégrale $\int_0^b \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ a bien un sens. Elle se calcule d'ailleurs immédiatement par primitivation de f et vaut $[-\mathrm{e}^{-x}]_0^b = 1 - \mathrm{e}^{-b}$. Cette valeur a pour limite 1 quand b tend vers l'infini et il est naturel de prendre cette limite comme définition de l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$. L'interprétation géométrique de ce résultat est que l'aire de l'hypographe $H := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x \in \mathbb{R}_+,\ 0 \leq y \leq \mathrm{e}^{-x}\}$ vaut 1, cf. figure 2.1. Pour le justifier, on remarque que H est la réunion de la suite croissante pour l'inclusion $(H_n)_{n \geq 1}$, où H_n est l'hypographe de f entre 0 et n. Par continuité séquentielle croissante de la mesure de Lebesgue λ_2, cf. proposition A.14 page 62, on a $\lambda_2(H) = \lim_{n \to +\infty} \lambda_2(H_n) = \lim_{n \to +\infty} \int_0^n \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = 1$.

Exemple 2.2. *Peut-on définir* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{1 + x^2}\,\mathrm{d}x$ *?*

Comme dans l'exemple 2.1, l'intégrale sur $[0, b]$ a un sens pour tout $b \in \mathbb{R}_+$. Elle se calcule par changement de variable $u = x^2$ et primitivation :

$$\int_0^b \frac{x}{1 + x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{b^2} \frac{\mathrm{d}u}{1 + u} = \frac{1}{2}\big[\ln(1 + u)\big]_0^{b^2} = \frac{1}{2}\ln(1 + b^2).$$

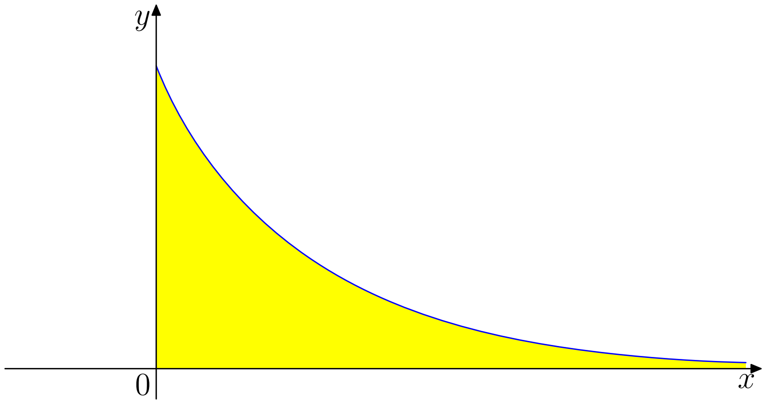

FIG. 2.1 – Hypographe H de $f : x \mapsto e^{-x}$ entre 0 et $+\infty$

Cette quantité tend vers $+\infty$ lorsque b tend vers $+\infty$. On conviendra donc que

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} \, dx = +\infty.$$

L'interprétation géométrique est que l'aire de l'hypographe de $x \mapsto x(1+x^2)^{-1}$ entre 0 et $+\infty$ est infinie. La justification repose sur la continuité séquentielle croissante de λ_2 comme pour l'exemple 2.1.

Exemple 2.3. *Peut-on définir l'intégrale* $\int_0^{+\infty} \cos x \, dx$ *?*

La fonction cosinus est continue sur $\mathbb{R}$, donc Riemann intégrable sur tout intervalle $[0, b]$. Le calcul par primitivation de cette intégrale donne

$$\forall b > 0, \qquad \int_0^b \cos x \, dx = \big[\sin x \big]_0^b = \sin b.$$

Lorsque b tend vers $+\infty$, $\sin b$ n'a pas de limite, même dans $\overline{\mathbb{R}}$, on ne peut donc pas définir $\int_0^{+\infty} \cos x \, dx$. Géométriquement, le domaine H délimité par le demi-axe des abscisses positives, l'axe des ordonnées et la courbe $y = \cos x$, $x \geq 0$, n'a pas d'aire algébrique.

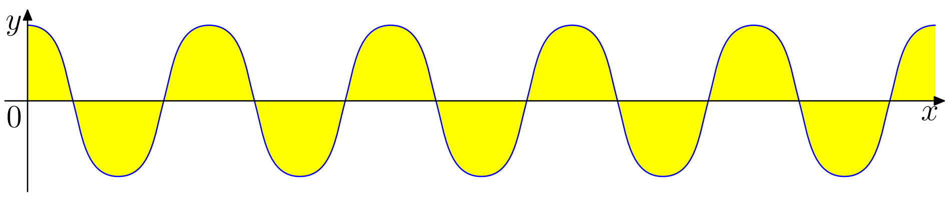

FIG. 2.2 – Domaine H délimité par le graphe de $f : x \mapsto \cos x$ entre 0 et $+\infty$

Exemple 2.4. *Peut-on définir les intégrales* $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$, $\alpha > 0$ *?*

Notons en préalable que si $\alpha \leq 0$, la réponse est immédiate puisque sur $[0, 1]$ la fonction $f : t \mapsto t^{-\alpha}$ est continue donc Riemann intégrable. Par contre si $\alpha > 0$, f n'est pas définie en 0, est continue sur $]0, 1]$ et tend vers $+\infty$ à droite en 0.

Puisque f est continue sur $]0,1]$, elle est Riemann intégrable sur tout intervalle $[a,1]$ pour $a>0$. On va donc regarder la convergence éventuelle de $I(a) := \int_a^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ lorsque a tend vers 0 par valeurs supérieures. L'intégrale $I(a)$ se calcule par primitivation. Si $\alpha \neq 1$, on obtient

$$\forall a>0, \quad I(a) = \int_a^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_a^1 = \frac{1-a^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}$$

Quand a tend vers 0 par la droite, $I(a)$ tend vers une limite finie $1/(1-\alpha)$ si $-\alpha+1>0$, *i.e.* si $\alpha<1$. Par contre si $-\alpha+1<0$, $I(a)$ tend vers $+\infty$, compte tenu du signe négatif du dénominateur constant $-\alpha+1$. Dans le cas particulier $\alpha=1$, une primitive de f est la fonction logarithme néperien, d'où

$$\forall a>0, \quad I(a) = \int_a^1 \frac{\mathrm{d}t}{t} = \big[\ln t\big]_a^1 = -\ln a,$$

ce qui tend vers $+\infty$ quand a tend vers 0 par la droite.

Finalement nous pouvons écrire

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & \text{si } \alpha<1, \\ +\infty & \text{si } \alpha \geq 1. \end{cases}$$

À nouveau on peut interpréter géométriquement ce résultat. Soit $H_\alpha := \{(t,y) \in \mathbb{R}^2;\ 0<t\leq 1 \text{ et } 0\leq y\leq t^{-\alpha}\}$ l'hypographe de f entre 0 et 1, cf. figure 2.3. Si $\alpha<1$, son aire est finie et vaut $(1-\alpha)^{-1}$. Si $\alpha \geq 1$, son aire est infinie. Pour la justification, on peut utiliser la suite, croissante pour l'inclusion, des hypographes de f entre $1/n$ et 1.

Exemple 2.5. *Peut-on définir* $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}t}{t}$ *?*

L'intégrande $f : t \mapsto t^{-1}$ est définie et continue sur l'intervalle « troué » $[-1,1]\setminus\{0\}$. Elle est donc Riemann intégrable sur chacun des intervalles fermés bornés $[-1,a]$ et $[b,+1]$ pour $-1<a<0$ et $0<b<1$. Ceci nous amène à étudier la limite quand a et b tendent vers respectivement 0 à gauche ou à droite de

$$I(a,b) := \int_{-1}^a \frac{\mathrm{d}t}{t} + \int_b^1 \frac{\mathrm{d}t}{t} = \big[\ln|t|\big]_{-1}^a + \big[\ln|t|\big]_b^1 = \ln|a| - \ln b.$$

Quand a et b tendent vers $0-$ et $0+$ respectivement, $\ln|a|$ et $\ln b$ tendent tous deux vers $+\infty$, donc leur différence $I(a,b)$ n'a pas de limite. Si vous n'en êtes pas convaincu, regardez ce problème de convergence avec les suites $a_n := 1/n$, $b_n = 1/n^2$, puis avec les suites $a'_n = -1/n^2$ et $b'_n = 1/n$. Dans le premier cas $I(a_n,b_n) = \ln n$ tend vers $+\infty$, tandis que dans le second, $I(a'_n,b'_n) = -\ln n$ tend vers $-\infty$. Ceci interdit à la *fonction de deux variables* $(a,b) \mapsto I(a,b)$ d'avoir une limite en $(0,0)$. On ne peut donc pas définir l'intégrale généralisée $\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}t}{t}$, *même comme élément de* $\overline{\mathbb{R}}$. Soit H le domaine délimité par le graphe de f et l'axe des abscisses entre -1 et 1, *i.e.*

$$H := \{(t,y)\in\mathbb{R}^2;\ t\in[-1,1]\setminus\{0\},\ -(1/t)^- \leq y \leq (1/t)^+\},$$

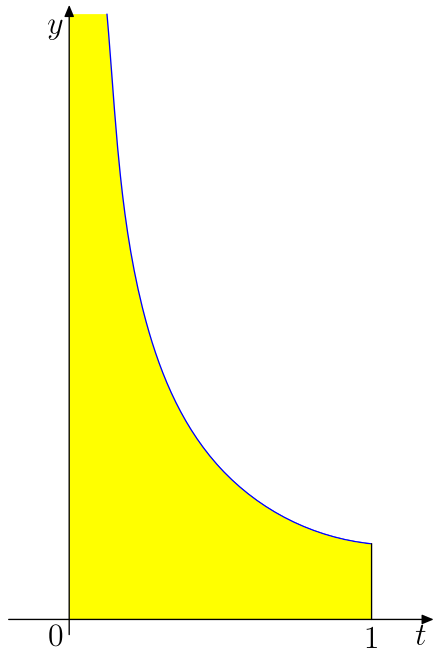

FIG. 2.3 – Hypographe H_α de $f : t \mapsto t^{-\alpha}$ entre 0 et 1

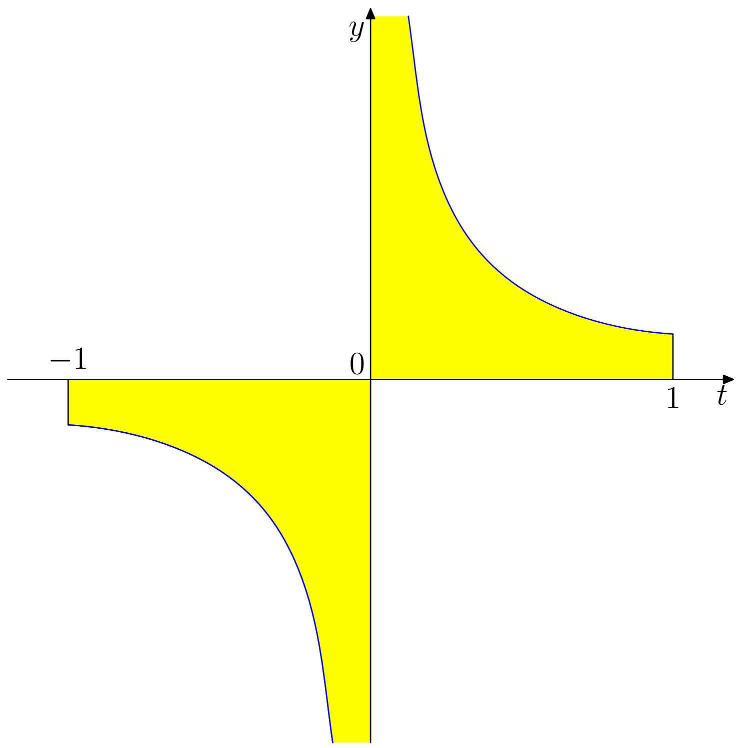

FIG. 2.4 – $H := \{(t, y) \in \mathbb{R}^2;\ t \in [-1, 1] \setminus \{0\},\ -(1/t)^- \leq y \leq (1/t)^+\}$

voir figure 2.4. Le fait que l'on ne puisse définir $\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ signifie que H *n'a pas* d'aire *algébrique*[1].

Attention, il peut paraître tentant au vu de l'imparité de f de définir $\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ comme valant 0 et de dire que l'aire algébrique de H est nulle. Il faut absolument résister à cette tentation. En effet, ceci reviendrait à dire que $I(a,b)$ tend vers 0 quand (a,b) tend vers $(0,0)$ simplement parce que $I(a,-a) = 0$ pour tout $a \in [-1, 0[$.

Après ces exemples introductifs, nous allons formaliser la définition de l'intégrale de Riemann généralisée. Il est commode de désigner les ensembles d'intégration considérés sous le nom [2] d'« intervalle troué ».

Définition 2.6 (intervalle troué). *Soit I un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$ et $T = \{t_1, \dots, t_d\}$ une partie de cardinal d de I, l'indexation des t_i vérifiant :*

$$-\infty \leq t_0 := \inf I < t_1 < \cdots < t_d < t_{d+1} := \sup I \leq +\infty.$$

On appelle intervalle troué I_T *l'ensemble $I \setminus T$. On a alors*

$$I_T = \bigcup_{i=0}^{d} I_i, \tag{2.1}$$

avec $I_i :=]t_i, t_{i+1}[$ pour $1 \leq i < d$, I_0 a pour bornes t_0 et t_1 et est ouvert à droite, I_d a pour bornes t_d et t_{d+1} et est ouvert à gauche. Nous engloberons dans cette définition et ces notations le cas particulier $d = 0$ où il n'y a pas de trous, la réunion ci-dessus se réduisant à $I_\emptyset = I = I_0$.

Les ensembles d'intégration utilisés dans les exemples 2.1–2.5 sont ainsi des intervalles troués avec $I = [0, +\infty[$ et $d = 0$ pour les exemples 2.1, 2.2 et 2.3, $I =]0, 1]$ et $d = 0$ pour l'exemple 2.4, $I = [-1, 1]$, $d = 1$, $t_1 = 0$ pour l'exemple 2.5.

Définition 2.7 (fonction localement Riemann intégrable). *Soient I_T un intervalle troué et f une fonction $I_T :\to \mathbb{R}$. On dit que f est* localement *Riemann intégrable sur I_T si elle est Riemann intégrable sur tout intervalle fermé borné $[\alpha, \beta]$ inclus dans I_T, donc nécessairement inclus dans l'un des intervalles I_i de la décomposition (2.1).*

Définition 2.8 (intégrale généralisée). *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, de bornes $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $T = \{t_1, \dots, t_d\}$ un ensemble de trous dans I et f localement Riemann intégrable sur l'intervalle troué I_T. On dit que l'intégrale généralisée de f entre a et b converge si on peut trouver une suite finie $c_0, c_1, \dots, c_d$ avec $c_i \in I_i$ pour $i = 0, \dots, d$ telle que chacune des limites suivantes existe et soit finie :*

$$\forall i = 0, \dots, d, \qquad \lim_{\substack{x_i \to t_{i+1}, \\ x_i < t_{i+1}}} \int_{c_i}^{x_i} f(t)\,\mathrm{d}t =: \ell_i, \qquad \lim_{\substack{x'_i \to t_i, \\ x'_i > t_i}} \int_{x'_i}^{c_i} f(t)\,\mathrm{d}t =: \ell'_i. \tag{2.2}$$

[1] Par contre il a une aire $\lambda_2(H) = +\infty$, ce qui correspond au fait que $\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{|t|} = +\infty$ (exercice).

[2] non standard.

On dit alors que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge *et on définit* $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *comme le réel*

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t := \sum_{i=0}^{d}(\ell_i' + \ell_i). \tag{2.3}$$

Si l'une au moins des conditions (2.2) n'est pas vérifiée, i.e. il n'y a pas de limite ou une limite infinie, on dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge. *Dans ce cas l'écriture* $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *ne représente pas un nombre réel.*

L'utilisation du symbole $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est analogue à celle de $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ qui désigne à la fois une série et lorsqu'elle converge dans $\mathbb{R}$, sa somme qui est le réel limite de la suite des sommes partielles $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. La série peut diverger parce que la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$), auquel cas on s'autorise l'écriture $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = +\infty$ (resp. $= -\infty$). Mais elle peut aussi diverger parce que $(S_n)_{n\geq 1}$ *n'a pas* de limite, *même infinie*. Dans ce cas l'écriture $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ est *purement formelle* et ne représente pas un élément de $\overline{\mathbb{R}}$. Pour l'intégrale généralisée divergente $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, on s'autorisera l'écriture $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = +\infty$ si certains des ℓ_i, ou ℓ_i' valent $+\infty$, les autres étant *finis*. De même on écrira $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = -\infty$ si certains des ℓ_i, ou ℓ_i' valent $-\infty$, les autres étant *finis*. Dans tous les autres cas de divergence[3], le symbole $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est seulement une écriture formelle et ne représente pas un élément de $\overline{\mathbb{R}}$.

Le lecteur attentif n'aura pas manqué de noter que la définition 2.8 pose un problème de cohérence car l'existence et la valeur de $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ semblent dépendre du choix de la suite $c_0, c_1, \dots, c_d$. Le lemme suivant répond à cette légitime inquiétude.

Lemme 2.9. *Avec les notations de la définition 2.8, on suppose que la suite finie* $c_0, c_1, \dots, c_d$ *vérifie (2.2). Soit* $\tilde{c}_0, \tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_d$ *une suite telle que* $\tilde{c}_i \in I_i$ *pour* $i = 0, \dots, d$. *Alors on a*

$$\forall i = 0, \dots, d, \qquad \lim_{\substack{x_i \to t_{i+1},\\ x_i < t_{i+1}}} \int_{\tilde{c}_i}^{x_i} f(t)\,\mathrm{d}t =: \tilde{\ell}_i = \ell_i + \int_{\tilde{c}_i}^{c_i} f(t)\,\mathrm{d}t \tag{2.4}$$

et

$$\forall i = 0, \dots, d, \qquad \lim_{\substack{x_i' \to t_i,\\ x_i' > t_i}} \int_{x_i'}^{\tilde{c}_i} f(t)\,\mathrm{d}t =: \tilde{\ell}_i' = \ell_i' + \int_{c_i}^{\tilde{c}_i} f(t)\,\mathrm{d}t. \tag{2.5}$$

Une conséquence immédiate de ce lemme est que

$$\sum_{i=0}^{d}(\ell_i' + \ell_i) = \sum_{i=0}^{d}(\tilde{\ell}_i' + \tilde{\ell}_i)$$

puisque $\ell_i' + \ell_i = \tilde{\ell}_i' + \tilde{\ell}_i$, la somme de $\int_{\tilde{c}_i}^{c_i}$ et $\int_{c_i}^{\tilde{c}_i}$ s'annihilant par la relation de Chasles. Ainsi ni la convergence de l'intégrale généralisée de f entre a et b ni la définition de sa valeur par (2.3) ne dépendent du choix de la suite $c_0, c_1, \dots, c_d$.

[3] *i.e.* si l'une au moins des intégrales de (2.2) n'a pas de limite même dans $\overline{\mathbb{R}}$ ou si elles ont toutes une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$, mais avec au moins une des limites valant $-\infty$ *et* au moins une valant $+\infty$.

Preuve du lemme 2.9. Puisque l'on fait tendre x_i vers t_{i+1} par valeurs inférieures, on peut toujours supposer que $\max(c_i, \tilde{c}_i) < x_i < t_{i+1}$. La fonction f est alors Riemann intégrable sur $[\min(c_i, \tilde{c}_i), x_i]$ et la relation de Chasles combinée avec (2.2) nous donne

$$\int_{\tilde{c}_i}^{x_i} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\tilde{c}_i}^{c_i} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{c_i}^{x_i} f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[\substack{x_i \to t_{i+1},\\ x_i < t_{i+1}}]{} \int_{\tilde{c}_i}^{c_i} f(t)\,\mathrm{d}t + \ell_i.$$

La vérification de (2.5) est analogue. □

Remarque 2.10. Dans le cas où l'intervalle I de la définition 2.8 est fermé en b (donc $b \in I$), la condition

$$\lim_{\substack{x_d \to b,\\ x_d < b}} \int_{c_d}^{x_d} f(t)\,\mathrm{d}t =: \ell_d \in \mathbb{R}$$

est automatiquement vérifiée. En effet, $[c_d, b]$ est inclus dans I_T, donc f est Riemann intégrable sur $[c_d, b]$ et la fonction $x_d \mapsto \int_{c_d}^{x_d} f(t)\,\mathrm{d}t$ est continue sur cet intervalle, cf. théorème 1.31 i), donc continue à gauche au point b, ce qui nous donne l'existence de la limite finie ℓ_d et sa valeur $\ell_d = \int_{c_d}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t$. En pratique on s'abstiendra donc de revérifier l'existence de cette limite. Par exemple si f est localement Riemann intégrable sur $]c, b]$, il faut seulement regarder ce qui se passe au voisinage de c.

Bien entendu si $a \in I$, on a une situation analogue, à savoir la convergence automatique quand $x_0' \to a+$ de $\int_{x_0'}^{c_0} f(t)\,\mathrm{d}t$ vers l'intégrale de Riemann ordinaire $\int_a^{c_0} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Nous définissons aussi les intégrales généralisées $\int_a^b$ avec $a > b$ en cohérence avec la définition 1.2.

Définition 2.11. *Si $a > b$ et si l'intégrale généralisée $\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, on pose*

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t := -\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t. \tag{2.6}$$

Remarque 2.12 (réduction du problème). Une fois payé notre tribut au formalisme avec la définition 2.8, il convient de se simplifier la vie en notant que l'étude de la convergence d'une intégrale généralisée se ramène à l'étude de limites du type $\int_{x'}^{c} f(t)\,\mathrm{d}t$ quand $x' \to a+$ avec f localement Riemann intégrable sur $]a, c]$ ou $\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$ quand $x \to b-$ avec f localement Riemann intégrable sur $[c, b[$. Nous nous contenterons la plupart du temps, d'énoncer des résultats relatifs au deuxième type, en laissant au lecteur le soin d'écrire leur adaptation immédiate au premier type et de recoller les morceaux par (2.3).

Définition 2.13 (notation $\mathcal{R}^{\mathrm{loc}}[a, b[$). *Soient a et b tels que $-\infty < a < b \leq +\infty$. Nous notons $\mathcal{R}^{\mathrm{loc}}[a, b[$ l'ensemble des fonctions localement Riemann intégrables sur $[a, b[$.*

Pour étudier la convergence d'une intégrale généralisée, on a souvent recours à une technique de comparaison avec une intégrale de référence. Les intégrales généralisées des fonctions puissances $t \mapsto t^{-\alpha}$ au voisinage de 0 ou de $+\infty$ sont les intégrales de référence les plus utilisées.

Proposition 2.14. *Soit α un réel.*

a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ *converge si $\alpha > 1$ et diverge si $\alpha \leq 1$.*

b) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ *converge si $\alpha < 1$ et diverge si $\alpha \geq 1$.*

Preuve. Le a) a déjà été traité à l'exemple 2.4 en rappelant que si $\alpha \leq 0$, on a affaire à l'intégrale de Riemann ordinaire d'une fonction continue sur $[0,1]$. Pour le b), on note que $f : t \mapsto t^{-\alpha}$ est continue sur $[1, +\infty[$ donc localement Riemann intégrable sur cet intervalle, donc Riemann intégrable sur tout intervalle $[1, x]$ pour $x \geq 1$. Par primitivation on a

$$\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \begin{cases} \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} - \frac{1}{1-\alpha} & \text{si } \alpha \neq 1, \\ \ln x & \text{si } \alpha \neq 1. \end{cases}$$

On en déduit que pour $\alpha \leq 1$, $\int_1^x t^{-\alpha}\,\mathrm{d}t$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ et que pour $\alpha > 1$, $\int_1^x t^{-\alpha}\,\mathrm{d}t$ tend vers la limite finie $1/(\alpha - 1)$ quand x tend vers $+\infty$. □

Corollaire 2.15. *Si $-\infty < a < b < +\infty$ et si α est un réel,*

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{(t-a)^\alpha} \qquad \text{converge si et seulement si } \alpha < 1, \tag{2.7}$$

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{(b-t)^\alpha} \qquad \text{converge si et seulement si } \alpha < 1. \tag{2.8}$$

Preuve. C'est une adaptation immédiate de la preuve du a) ci-dessus, voir exemple 2.4, *via* les changements de variable $u = t - a$ et $v = b - t$ respectivement. □

Dans la situation de la proposition 2.14, l'intégrale diverge lorsque f tend trop vite vers $+\infty$ en 0 dans le cas a) et tend trop lentement vers 0 en $+\infty$ dans le cas b)[4]. Dans le cas b), on peut penser à l'analogie avec la série de terme général $k^{-\alpha}$, cf. théorème A.15 p. 62. Pour autant il faut se garder de tirer des conclusions hâtives de cette analogie. Si la convergence d'une série implique toujours la convergence vers 0 de son terme général, la situation est plus compliquée pour les intégrales de la forme $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Remarque 2.16. La convergence de l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ *n'implique pas* que $f(t)$ ait pour limite 0 en $+\infty$. Voici un contre exemple. Prenons $a = 0$ et pour f la fonction continue affine par morceaux dont l'hypographe se réduit (en dehors des segments où f est nulle) à la réunion de la suite $(T_n)_{n\geq 1}$ des triangles isocèles de sommet principal $(n, 2^n)$ et de base $[n-4^{-n}, n+4^n]$, cf. figure[5] 2.5. La fonction f vérifie les deux propriétés suivantes.

[4]On pourrait d'ailleurs déduire le b) du a) par un argument géométrique sur les hypographes en notant que les fonctions $f : t \mapsto t^{-\alpha}$ et $g : t \mapsto t^{-1/\alpha}$ définies sur $]0, +\infty[$ sont réciproques l'une de l'autre, donc que leurs graphes en repère orthonormé se correspondent par la symétrie relativement à la première bissectrice du repère. Par conservation de λ_2, on en déduit que l'hypographe de g entre 1 et $+\infty$ a même aire que l'hypographe de f entre 0 et 1 privé du carré unité (faites le dessin !).

[5]Pour des raisons de lisibilité on a muni l'axe des ordonnées d'une échelle logarithmique et on a fortement exagéré la base de chaque triangle isocèle.

1. $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge (et vaut 1).
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(n) = 2^n$ et $f(n+1/2) = 0$. Par conséquent f n'a pas de limite en $+\infty$.

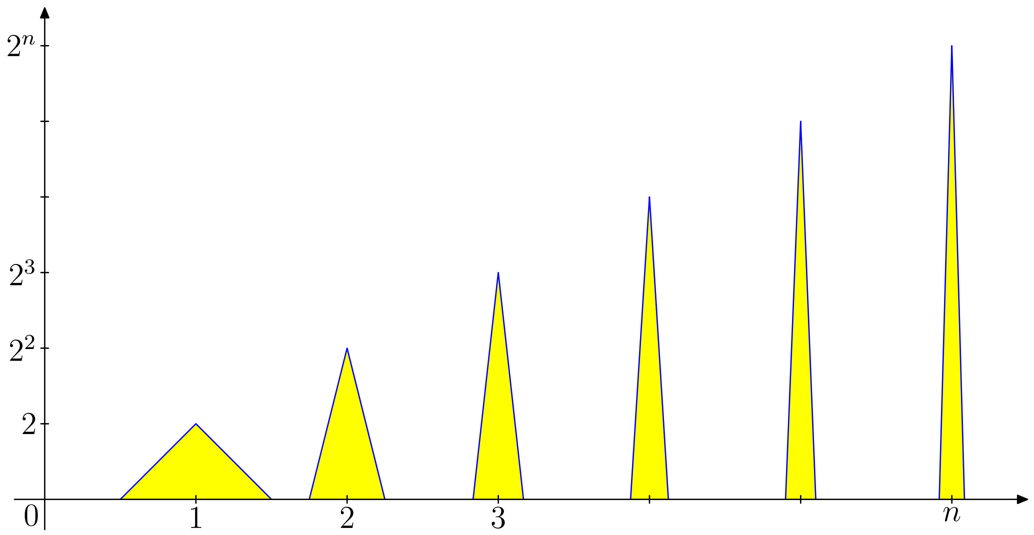

FIG. 2.5 – $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ peut converger sans que f ait une limite en $+\infty$

Preuve. Comme fonction continue, f appartient à $\mathcal{R}^{\mathrm{loc}}[0, +\infty[$ donc est Riemann intégrable sur tout intervalle $[0, x]$, $x \in \mathbb{R}_+$. Les triangles T_n sont deux à deux disjoints et l'aire $\lambda_2(T_n)$ se calcule par la formule classique demi-produit de la base par la hauteur [6], d'où

$$\lambda_2(T_n) = 4^{-n} \times 2^n = 2^{-n}.$$

On en déduit immédiatement que la série de terme général $\lambda_2(T_k)$ est géométrique convergente. Le calcul de sa somme partielle S_n est bien connu :

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} \lambda_2(T_k) = \sum_{k=1}^{n} 2^{-k} = 2^{-1} \sum_{j=0}^{n-1} 2^{-j} = 2^{-1} \frac{1 - 2^{-n}}{1 - 2^{-1}} = 1 - 2^{-n}.$$

Nous allons montrer la convergence de $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ en comparant $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ et S_n pour $n = [x]$, la partie entière de x. En effet, pour n fixé, $g_n : x \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - S_n$ est une fonction croissante puisque f est positive. Sur l'intervalle $[n, n+1]$, cette fonction a pour minimum $g_n(n) = -\frac{1}{2}\lambda_2(T_n)$ et pour maximum $g_n(n+1) = \frac{1}{2}\lambda_2(T_{n+1})$. Comme $\lambda_2(T_n) > \lambda_2(T_{n+1})$, on en déduit

$$\forall x \in [n, n+1], \qquad \left| \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - S_n \right| \leq \frac{1}{2}\lambda_2(T_n) < 2^{-n}.$$

[6] Si vous êtres sceptiques vous pouvez toujours chercher une expression analytique pour la restriction de f à $[n - 4^{-n}, n + 4^n]$ et l'intégrer sur ce segment pour voir si vous trouvez le même résultat.

Compte-tenu du calcul de S_n rappelé ci-dessus, ceci nous permet d'écrire

$$\forall x \geq 1, \qquad \left| \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - \left(1 - 2^{-[x]}\right) \right| < 2^{-[x]}.$$

En faisant tendre x vers $+\infty$, on en déduit que $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ tend vers 1. Donc $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut 1. Le point 2 est évident. □

Ce genre de pathologie n'est pas réservé aux intégrales généralisées de la forme $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$. À titre d'exercice, on vous laisse le soin de construire une fonction f continue sur $[0,1[$ telle que $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et qu'il existe 3 suites $(u_n)_{n\geq 1}$, $(v_n)_{n\geq 1}$ et $(w_n)_{n\geq 1}$ convergentes vers 1 dans $[0,1[$ telles que $f(u_n)$ tende vers $+\infty$, $f(v_n)$ tende vers 0 et $f(w_n)$ tende vers $-\infty$. Voici une suggestion parmi les multiples solutions possibles. Découper $[0,1[$ en trois segments de même longueur $[0,1/3[$, $[1/3,2/3[$ et $[2/3,1[$. Sur les deux premiers prendre pour graphe de f les triangles isocèles de base ces segments et de « hauteurs » respectives $+2$ et -2. Itérer ce partage en trois sur $[2/3,1[$ avec sur les deux premiers segments du partage des triangles isocèles de hauteur $+4$ et -4 et ainsi de suite jusqu'à l'infini.

Après ces contre exemples, voyons ce que l'on peut dire dans des situations moins pathologiques sur la relation entre convergence de $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ et comportement de f au voisinage de $+\infty$.

Proposition 2.17. *Soit $f \in \mathcal{R}^{\mathrm{loc}}[a,+\infty[$.*

i) On suppose qu'il existe $A \in [a,+\infty[$ et $m > 0$ tels que $f(t) \geq m$ pour tout $t \geq A$. Alors $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

ii) Cette divergence a lieu aussi s'il existe $m' < 0$ et $A \geq a$ tels que $f(t) \leq m'$ pour tout $t \geq A$.

iii) En conséquence, si f a une limite non nulle *$\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ en $+\infty$, $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.*

Preuve. Pour i), il suffit de remarquer que pour tout $x \geq A$,

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^A f(t)\,\mathrm{d}t + \int_A^x f(t)\,\mathrm{d}t \geq \int_a^A f(t)\,\mathrm{d}t + m(x-A),$$

par croissance de l'intégrale de Riemann sur $[A,x]$, voir la proposition 1.21 ii) et la figure 2.6. En faisant tendre x vers $+\infty$, on en déduit que $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ tend vers $+\infty$, d'où la divergence de $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

De même pour ii), on obtient la minoration $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^A f(t)\,\mathrm{d}t + m'(x-A)$ et donc $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

Supposons maintenant que f ait une limite *non nulle* $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ en $+\infty$. On peut distinguer 4 cas.

Cas 1. $\ell \in]0,+\infty[$, alors il existe un $A \geq a$ tel que pour tout $t \geq A$, $f(t) > \frac{\ell}{2}$. On applique i) avec $m = \frac{\ell}{2} > 0$.

Cas 2. $\ell = +\infty$, alors il existe un $A \geq a$ tel que pour tout $t \geq A$, $f(t) \geq 1$, on pourrait bien sûr remplacer ce minorant 1 par n'importe quel réel $B > 0$ choisi à l'avance[7]. On applique i) avec $m = 1$.

[7]Mais pas par $\frac{\ell}{2}$ qui a ici le mauvais goût de valoir $+\infty$!

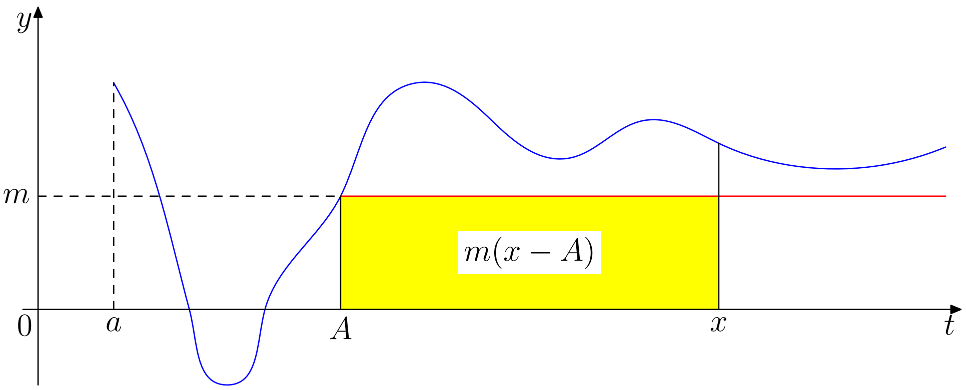

FIG. 2.6 – $\int_A^x f(t)\,\mathrm{d}t \geq m(x-A)$

Cas 3. $\ell \in]-\infty, 0[$, alors il existe un $A \geq a$ tel que pour tout $t \geq A$, $f(t) < \frac{\ell}{2}$. On applique ii) avec $m' = \frac{\ell}{2} < 0$.

Cas 4. $\ell = -\infty$, alors il existe un $A \geq a$ tel que pour tout $t \geq A$, $f(t) \leq -1$. On applique ii) avec $m = -1$.

□

Corollaire 2.18. *Soit a un réel et f une fonction positive et décroissante sur $[a, +\infty[$. Si $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors f tend vers 0 en $+\infty$.*

Preuve. Une fonction décroissante sur $[A, +\infty[$ est localement Riemann intégrable sur cet intervalle, cf. proposition 1.9. D'autre part comme fonction monotone, elle admet toujours en $+\infty$ une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Par décroissance et positivité de f, cette limite est nécessairement dans $[0, +\infty[$. Si $\ell > 0$, alors par le cas 1 ci-dessus, $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge, ce qui contredit l'hypothèse de convergence de cette intégrale. Donc $\ell = 0$. □

2.2 Critère de Cauchy pour intégrales généralisées

L'intérêt du critère de Cauchy — dans un espace complet — est de permettre d'établir l'*existence* d'une limite sans connaître *a priori* sa valeur. Nous allons voir une version de ce critère pour la convergence des intégrales généralisées. Auparavant, il n'est peut-être pas superflu de rappeler quelques versions du critère de Cauchy pour l'existence de limites de suites ou de fonctions.

Proposition 2.19 (critères de Cauchy).

1. *La suite de réels $(u_n)_{n\geq 1}$ converge dans $\mathbb{R}$ si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}^*, \quad \forall n, p \geq N, \quad |u_n - u_p| < \varepsilon. \tag{2.9}$$

2. *Soit F une fonction à valeurs réelles ou complexes, définie sur $D \subset \mathbb{R}$ et a un point adhérent à D. Alors F a une limite* finie *au point a si et seulement si :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0, \quad \forall x, x' \in D \cap]a-\delta, a+\delta[\setminus \{a\}, \quad |F(x) - F(x')| < \varepsilon. \tag{2.10}$$

3. *Soit F une fonction à valeurs réelles ou complexes, définie sur $D \subset \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$ tel que pour tout réel $\eta > 0$, $D \cap]a, a+\eta[$ soit non vide. Alors F a une limite à droite* finie *au point a si et seulement si :*
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0, \quad \forall x, x' \in D \cap]a, a+\delta[, \quad |F(x) - F(x')| < \varepsilon. \tag{2.11}$$

4. *Soit F une fonction à valeurs réelles ou complexes, définie sur $D \subset \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$ tel que pour tout réel $\eta > 0$, $D \cap]a-\eta, a[$ soit non vide. Alors F a une limite à gauche* finie *au point a si et seulement si :*
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0, \quad \forall x, x' \in D \cap]a-\delta, a[, \quad |F(x) - F(x')| < \varepsilon. \tag{2.12}$$

5. *Soit F une fonction à valeurs réelles ou complexes, définie sur un intervalle $[a, +\infty[$, $a \in \mathbb{R}$. Alors F a une limite* finie *en $+\infty$ si et seulement si :*
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A > 0, \quad \forall x, x' \geq A, \quad |F(x) - F(x')| < \varepsilon. \tag{2.13}$$

De même que l'application du critère de Cauchy (2.9) à la suite des sommes partielles d'une série conduit au critère de Cauchy pour les séries, cf. théorème A.19, les critères (2.10)–(2.13) nous fournissent des critères de Cauchy pour la convergence d'intégrales généralisées. Nous les énoncerons seulement pour la convergence en b des intégrales $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ en utilisant (2.12) ou (2.13) selon que b est fini ou non. Au lecteur de compléter.

Théorème 2.20 (critère de Cauchy pour les intégrales).

1. *Soit $f \in \mathcal{R}^{\mathrm{loc}}[a, +\infty[$. L'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si :*
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A > 0, \quad \forall x, x' \geq A, \quad \left| \int_x^{x'} f(t)\,\mathrm{d}t \right| < \varepsilon. \tag{2.14}$$

2. *Soit $f \in \mathcal{R}^{\mathrm{loc}}[a, b[$, avec $b < +\infty$. Alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si :*
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta \in]0, b-a[, \quad \forall x, x' \in]b-\delta, b[, \quad \left| \int_x^{x'} f(t)\,\mathrm{d}t \right| < \varepsilon. \tag{2.15}$$

Preuve. Il suffit d'appliquer le critère de Cauchy (2.12) ou (2.13) à la fonction $F : [a, b[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto F(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ qui est bien définie sur $[a, b[$ puisque f est Riemann intégrable sur $[a, x]$ pour tout $x \in [a, b[$. □

Corollaire 2.21. *Soit $f \in \mathcal{R}^{\mathrm{loc}}[a, b[$ avec b fini.*

1. *Si f est* bornée *sur $[a, b[$, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.*
2. *Si f a une limite à gauche finie en b, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.*

Preuve. Vérifions le point 1. Par hypothèse, il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $t \in [a, b[$, $|f(t)| \leq M$. D'autre part f étant localement Riemann intégrable sur $[a, b[$ est Riemann intégrable sur tout segment $[x, x'] \subset [a, b[$. Par croisance de l'intégrale de Riemann, cf. proposition 1.21, on en déduit :

$$\forall x, x' \in [a, b[\text{ avec } x < x', \qquad \left| \int_x^{x'} f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leq \int_x^{x'} |f(t)|\,\mathrm{d}t \leq M(x' - x). \tag{2.16}$$

Cette inégalité nous permet de vérifier le critère de Cauchy (2.15). En effet, soit $\varepsilon > 0$ arbitraire. Posons $\delta := \min(\varepsilon/M, b-a)$. Pour tous $x, x' \in]b-\delta, b[$, on a clairement $M(x'-x) < \varepsilon$, donc compte-tenu de (2.16), $\left|\int_x^{x'} f(t)\,\mathrm{d}t\right| < \varepsilon$.

Pour le point 2, il suffit de noter que si f a une limite finie ℓ à gauche en b, alors sur un intervalle $]b-\delta', b[$ suffisamment petit, on a $|f(t)| \leq |\ell|+1$. Comme f est aussi bornée sur $[a, b-\delta']$ car Riemann intégrable sur ce segment, elle est bornée sur la réunion des deux intervalles, *i.e.* sur $[a, b[$ et on conclut en appliquant le point 1. □

Exemple 2.22. *L'intégrale généralisée* $\displaystyle\int_{-1/\pi}^{0} \sin\left(\frac{1}{t}\right) \mathrm{d}t$ *converge.*

En effet, $f : t \mapsto \sin(1/t)$ est définie et continue sur $[-1/\pi, 0[$, donc $f \in \mathcal{R}^{\mathrm{loc}}[-1/\pi, 0[$. Elle est bornée sur cet intervalle puisque $|\sin(1/t)| \leq 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}^*$. Le point 1 du corollaire 2.21 nous donne la convergence de $\int_{-1/\pi}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t$. Notons au passage que f n'a pas de limite à gauche en zéro, car elle oscille une infinité de fois entre les valeurs -1 et 1 sur tout voisinage à gauche de 0, aussi petit soit-il, cf. figure 2.7.

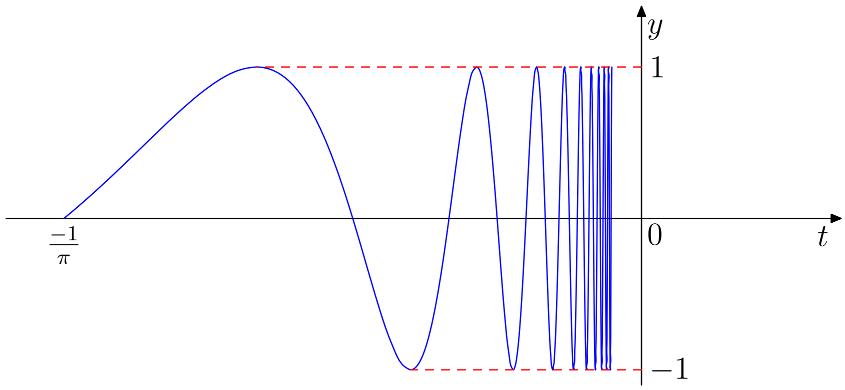

FIG. 2.7 – Graphe de $t \mapsto \sin(1/t)$ pour $t \in \left[\frac{-1}{\pi}, \frac{-2}{39\pi}\right]$

Corollaire 2.23. *Soit* $f \in \mathcal{R}^{\mathrm{loc}}[a, b[)$. *Si* $\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ *converge, alors* $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *converge.*

Preuve. Par le théorème 2.20, la convergence de $\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ implique le critère de Cauchy (2.14) si $b \in \mathbb{R}$ ou (2.15) si $b = +\infty$, avec $|f|$ à la place de f. L'inégalité

$$\left| \int_x^{x'} f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leq \int_x^{x'} |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

montre que le critère de Cauchy correspondant est aussi vérifié par f, d'où la convergence de $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ par une nouvelle invocation du théorème 2.20. □

Remarque 2.24. La réciproque du corollaire 2.23 est fausse. Nous verrons un peu plus tard que par (contre) exemple, $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ converge, alors que $\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{t}\right|\mathrm{d}t$ diverge.

Définition 2.25 (convergence absolue). *Soit $f \in \mathcal{R}^{\mathrm{loc}}[a,b[$. Si $\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ converge, on dit que $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est* absolument convergente.

Une intégrale absolument convergente est toujours convergente (cor. 2.23), la réciproque est fausse (rem. 2.24).

Le théorème suivant permet entre autres de montrer la convergence d'intégrales de la forme $\int_a^{+\infty} f(t)\sin t\,\mathrm{d}t$ avec f positive décroissante et tendant vers 0 en $+\infty$. Sa preuve combine le critère de Cauchy et la deuxième formule de la moyenne que nous n'avons pas vue. Nous admettrons ce théorème.

Théorème 2.26 (critère d'Abel). *Soient $f, g \in \mathcal{R}^{\mathrm{loc}}[a,+\infty[$ et vérifiant*

i) f est positive et décroissante sur $[a,+\infty[$ et a pour limite 0 en $+\infty$.

ii) Il existe une constante M telle que

$$\forall x, y \in [a,+\infty[, \qquad \left|\int_x^y g(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq M. \tag{2.17}$$

Alors $\int_a^{+\infty} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Si on prend en particulier $g(t) = \sin t$, il est facile de vérifier (2.17). En effet

$$\int_x^y \sin t\,\mathrm{d}t = \big[-\cos t\big]_x^y = \cos x - \cos y \quad \text{et} \quad |\cos x - \cos y| \leq 2.$$

Il en va de même avec $g(t) = \cos t$, ou $g(t) = \sin(ct)$, ou $g(t) = \cos(ct)$.

Énonçons séparément ce cas particulier du théorème 2.26 avant d'en proposer une démonstration directe.

Proposition 2.27. *Si f est positive et décroissante sur $[a,+\infty[$ et a pour limite 0 en $+\infty$, les intégrales généralisées $\int_a^{+\infty} f(t)\sin t\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^{+\infty} f(t)\cos t\,\mathrm{d}t$ convergent.*

Preuve. Nous montrerons simplement la convergence de $\int_a^{+\infty} f(t)\sin t\,\mathrm{d}t$, l'adaptation de la méthode au cas de $\int_a^{+\infty} f(t)\cos t\,\mathrm{d}t$ étant immédiate. Remarquons d'abord que l'intégrande $h : t \mapsto f(t)\sin t$ est *localement* Riemann intégrable sur $[a,+\infty[$. En effet, les restrictions des fonctions f et sin au segment $[\alpha,\beta] \subset [a,+\infty[$ sont respectivement monotone et continue donc Riemann intégrables. Leur produit h est donc aussi Riemann intégrable sur $[\alpha,\beta]$, cf. prop. 1.26. Ceci étant vrai pour tout $[\alpha,\beta] \subset [a,+\infty[$, h est dans $\mathcal{R}^{\mathrm{loc}}[a,+\infty[$.

Notons $I_k := [k\pi,(k+1)\pi]$, $k \in \mathbb{N}^*$. Pour k assez grand, disons $k \geq k_0$, $I_k \subset [a,+\infty[$. Aux bornes de I_k, $\sin t$ s'annule et pour tout t intérieur à I_k, $\sin t$ a même signe que $(-1)^k$. On a donc pour tout $t \in I_k$, $\sin t = (-1)^k|\sin t|$ d'où

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t)\sin t\,\mathrm{d}t = (-1)^k \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t)|\sin t|\,\mathrm{d}t =: (-1)^k v_k. \tag{2.18}$$

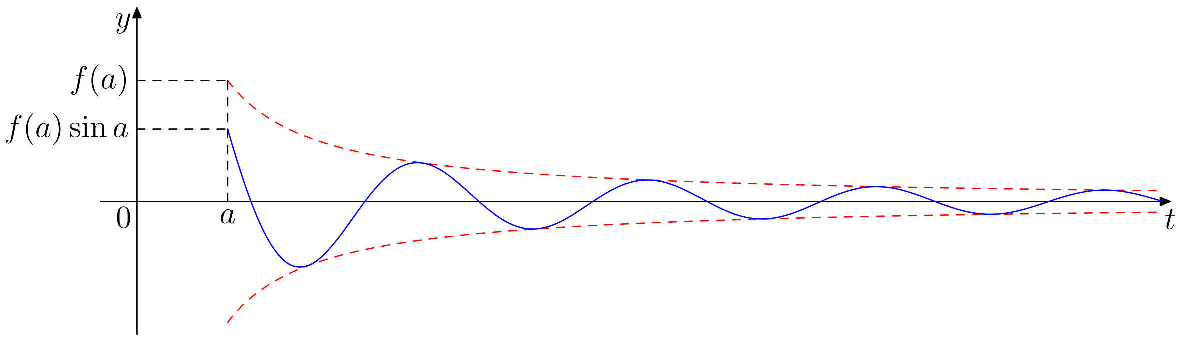

FIG. 2.8 – Graphe de $t \mapsto f(t)\sin(t)$ avec $f \downarrow 0$, graphes de f et $-f$ en pointillés

On vérifie maintenant que la convergence quand x tend vers $+\infty$ de $\int_a^x h(t)\,\mathrm{d}t$ se réduit à la convergence de la série de terme général $(-1)^k v_k$. Pour $x > k_0\pi$, il existe un unique entier n tel que $(n+1)\pi \leq x < (n+2)\pi$. Cet entier dépendant de x tend évidemment vers $+\infty$ avec x. On peut alors écrire

$$\int_a^x h(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^{k_0\pi} h(t)\,\mathrm{d}t + \int_{k_0\pi}^{(n+1)\pi} h(t)\,\mathrm{d}t + \int_{(n+1)\pi}^{x} h(t)\,\mathrm{d}t. \tag{2.19}$$

Traitons d'abord le terme « résiduel »

$$\varepsilon(x) := \int_{(n+1)\pi}^{x} h(t)\,\mathrm{d}t,$$

en notant que par la majoration $|\sin t| \leq 1$ et la décroissance de f,

$$|\varepsilon(x)| \leq \int_{(n+1)\pi}^{x} |h(t)|\,\mathrm{d}t \leq \int_{(n+1)\pi}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \big(x-(n+1)\pi\big)f\big((n+1)\pi\big) \leq \pi f\big((n+1)\pi\big).$$

Or f tend vers 0 en $+\infty$ et $n = n(x)$ tend vers l'infini avec x, donc $\varepsilon(x)$ tend vers 0 en $+\infty$. En notant C la *constante* $\int_a^{k_0\pi} h(t)\,\mathrm{d}t$, en utilisant la relation de Chasles et (2.18), nous pouvons ainsi réécrire (2.19) sous la forme

$$\int_a^x h(t)\,\mathrm{d}t = C + \sum_{k=k_0}^{n} (-1)^k v_k + \varepsilon(x), \qquad \lim_{x\to+\infty} \varepsilon(x) = 0.$$

Il est alors clair que la convergence en $+\infty$ de $\int_a^x h(t)\,\mathrm{d}t$ vers une limite finie équivaut à la convergence de la *série* de terme général $(-1)^k v_k$.

La convergence de cette série résultera du théorème des séries *alternées* (th. A.20) si l'on montre que la suite $(v_k)_{k\geq k_0}$ tend vers 0 en décroissant.

Les mêmes majorations que celles utilisées pour $\varepsilon(x)$ nous donnent

$$v_k = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t)|\sin t|\,\mathrm{d}t \leq \pi f(k\pi) \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0.$$

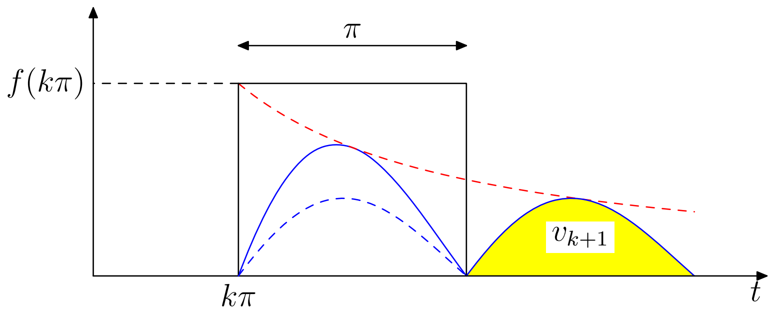

FIG. 2.9 – $v_k \downarrow 0$ car $\pi f(k\pi) \geq v_k \geq v_{k+1}$

Pour vérifier la décroissance de $(v_k)_{k\geq k_0}$, comparons v_k et v_{k+1} grâce au changement de variable $s = t + \pi$ qui transforme I_{k+1} en I_k :

$$v_{k+1} = \int_{(k+1)\pi}^{(k+2)\pi} f(s)|\sin s| \,\mathrm{d}s = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t+\pi)|\sin t| \,\mathrm{d}t.$$

Par décroissance de f on a pour tout $t \in I_k$, $f(t)|\sin t| \geq f(t+\pi)|\sin t|$ d'où par intégration de cette inégalité sur I_k, $v_k \geq v_{k+1}$. □

Exemple 2.28. *L'intégrale* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \,\mathrm{d}t$ *est convergente, mais pas absolument.*

La convergence résulte de la proposition 2.27 avec $f(t) = 1/t$. Vérifions que l'intégrale n'est pas absolument convergente. Pour $x \geq \pi$, il existe un unique entier n tel que $(n+1)\pi \leq x < (n+2)\pi$ et cet entier dépendant de x tend vers $+\infty$ avec x. En posant $|h(t)| := t^{-1}|\sin t|$ et $v_k := \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |h(t)| \,\mathrm{d}t$, on a

$$\int_1^x |h(t)| \,\mathrm{d}t = \int_1^\pi |h(t)| \,\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^n v_k + \int_{(n+1)\pi}^x |h(t)| \,\mathrm{d}t \geq \sum_{k=1}^n v_k.$$

Pour prouver que $\int_1^x |h(t)| \,\mathrm{d}t$ tend vers $+\infty$ avec x, il suffit donc de montrer la divergence de la série de terme général *positif* v_k. Ceci résulte de la minoration suivante qui utilise la décroissance de $t \mapsto 1/t$ et la π-périodicité de $|\sin t|$:

$$v_k = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} \,\mathrm{d}t \geq \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{(k+1)\pi} \,\mathrm{d}t = \frac{1}{(k+1)\pi} \int_0^\pi \sin t \,\mathrm{d}t = \frac{2}{(k+1)\pi}.$$

Comme la série de terme général positif $u_k := \frac{2}{(k+1)\pi}$ diverge (cor. A.16), on en déduit que

$$\sum_{k=1}^n v_k \geq \sum_{k=1}^n u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

Ainsi $\int_1^x |h(t)| \,\mathrm{d}t$ tend bien vers $+\infty$ avec x.

Nous avons choisi pour cet exemple d'intégrer entre 1 et $+\infty$, mais le résultat reste valable en intégrant la même fonction entre 0 et $+\infty$. On vous laisse en exercice la justification de la convergence en 0.

2.3 Intégrales généralisées de fonctions positives

La fonction f définie sur $[a, b[$ est dite positive sur $[a, b[$ si pour tout $t \in [a, b[$, $f(t) \geq 0$. Nous énoncerons tous les résultats de cette section avec des fonctions positives sur $[a, b[$, mais il est clair qu'ils s'étendent au cas plus général des fonctions f définies sur $[a, b[$ et positives *au voisinage de* b, *i.e.* il existe un $c \in [a, b[$ tel que $t \in [c, b[$, $f(t) \geq 0$. Ils s'étendent aussi au cas des fonctions de signe constant au voisinage de b, modulo une adaptation laissée au lecteur.

Soit $f \in \mathcal{R}^{\mathrm{loc}}[a, b[$ et positive sur $[a, b[$. Alors la fonction F définie par

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t, \quad x \in [a, b[,$$

est *croissante* sur $[a, b[$. En effet si $a \leq x' \leq x'' < b$,

$$F(x'') - F(x') = \int_{x'}^{x''} f(t)\,\mathrm{d}t \geq 0, \tag{2.20}$$

par positivité de f sur $[x', x'']$. Il n'y a donc *que deux possibilités* pour le comportement de $F(x)$ quand x tend vers b à gauche.

1. La fonction croissante F est *majorée* sur $[a, b[$, *i.e.* il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $x \in [a, b[$, $F(x) \leq M < +\infty$. Alors F a une limite finie ℓ à gauche en b ($\ell \leq M$), autrement dit l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *converge* et $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \ell$.
2. La fonction croissante F *n'est pas majorée* sur $[a, b[$. Alors F tend vers $+\infty$ à gauche en b, l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *diverge* et $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = +\infty$.

Rappelons ici qu'il existe des intégrales divergentes auxquelles on ne peut attribuer aucune valeur, pas même infinie, voir l'exemple 2.3. Comme nous venons de le voir, ce type de divergence ne peut se produire lorsque f est de signe constant.

Théorème 2.29 (comparaison). *Soient $f, g \in \mathcal{R}^{\mathrm{loc}}[a, b[$ telles que $0 \leq f \leq g$ sur $[a, b[$. Alors*

$$\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge} \implies \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge}, \tag{2.21}$$

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \text{ diverge} \implies \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t \text{ diverge}. \tag{2.22}$$

Preuve. Soit x quelconque dans $[a, b[$. Alors f et g sont Riemann intégrables sur $[a, x]$ et en intégrant sur cet intervalle l'inégalité $f \leq g$, on voit que

$$\forall x \in [a, b[, \quad F(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t =: G(x).$$

Comme f et g sont positives, les fonctions F et G sont croissantes d'après (2.20).

Si $\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$ converge, cela signifie que G a une limite à gauche finie L en b. La fonction *croissante* G est donc majorée sur $[a, b[$ par L et F l'est aussi puisque $F \leq G$

sur $[a, b[$. Étant croissante sur $[a, b[$ et majorée par $L < +\infty$ sur cet intervalle, F a aussi une limite à gauche finie $\ell \leq L$ en b. Autrement dit, $\int_a^b f(t)\, \mathrm{d}t$ converge. Ceci établit l'implication (2.21).

Si $\int_a^x f(t)\, \mathrm{d}t$ diverge, le point 2 de l'alternative ci-dessus entre en vigueur[8]. Autrement dit, $F(x)$ tend vers $+\infty$ à gauche en b. Il en va de même pour G puisque $F \leq G$. Donc $\int_a^b g(t)\, \mathrm{d}t = +\infty$ et cette intégrale diverge. L'implication (2.21) est ainsi vérifiée. □

Exemple 2.30. *Les intégrales « gaussiennes »* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-ct^2}\, \mathrm{d}t$, $c > 0$, *convergent.*

Par réduction du problème, cf. remarque 2.12, on se ramène à l'étude séparée de $\int_{-\infty}^0$ et de $\int_0^{+\infty}$. Par parité de l'intégrande $f : t \mapsto \exp(-ct^2)$, il est clair qu'il suffit d'étudier la convergence de l'intégrale généralisée de f sur $[0, +\infty[$. Notons au passage que f est continue sur $\mathbb{R}$, donc clairement membre de $\mathcal{R}^{\mathrm{loc}}]-\infty, 0]$ et de $\mathcal{R}^{\mathrm{loc}}[0, +\infty[$. Puisque f est en particulier Riemann intégrable sur $[0, 1]$, le découpage $\int_0^x f(t)\, \mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)\, \mathrm{d}t + \int_1^x f(t)\, \mathrm{d}t$ nous ramène finalement à l'étude de la convergence de $\int_1^{+\infty} f(t)\, \mathrm{d}t$.

Cette dernière réduction est motivée par l'inégalité $t^2 \geq t$ pour $t \geq 1$. Par positivité de c et croissance de la fonction exponentielle, on en déduit $-ct^2 \leq -ct$ et $f(t) = \exp(-ct^2) \leq \exp(-ct) =: g(t)$. Nous pouvons alors appliquer l'implication (2.21) pour conclure à la convergence de $\int_1^{+\infty} f(t)\, \mathrm{d}t$. En effet

$$\int_1^x \exp(-ct)\, \mathrm{d}t = \left[\frac{\exp(-ct)}{-c}\right]_1^x = \frac{\exp(-c)}{c} - \frac{\exp(-cx)}{c} \xrightarrow[x \to +\infty]{} \frac{\exp(-c)}{c},$$

donc $\int_1^{+\infty} g(t)\, \mathrm{d}t$ converge.

Corollaire 2.31. *Soient $f, g \in \mathcal{R}^{\mathrm{loc}}[a, b[$. On suppose que $|f| \leq g$ sur $[c, b[$ pour un $c \in [a, b[$ et que $\int_c^b g(t)\, \mathrm{d}t$ converge. Alors l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)\, \mathrm{d}t$ est absolument convergente.*

Preuve. Les fonctions f et g (donc aussi leur valeur absolue) sont Riemann intégrables sur $[a, c]$. Le découpage $\int_a^x = \int_a^c + \int_c^x$ montre alors que la convergence absolue de $\int_a^b f(t)\, \mathrm{d}t$ équivaut à celle de $\int_c^b f(t)\, \mathrm{d}t$. Cette dernière convergence découle immédiatement de celle de $\int_c^b g(t)\, \mathrm{d}t$ par (2.21) appliqué sur $[c, b[$ au lieu de $[a, b[$, avec $|f|$ à la place de f. □

Exemple 2.32. *L'intégrale* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t \cos t)}{t^2}\, \mathrm{d}t$ *converge absolument.*

C'est une application immédiate du corollaire 2.31 avec $a = c = 1$ et $g(t) = t^{-2}$.

Théorème 2.33 (intégrandes équivalentes). *Soient $f, g \in \mathcal{R}^{\mathrm{loc}}[a, b[$,* positives *au voisinage à gauche de b. Si elles sont équivalentes en $b-$, $\int_a^b f(t)\, \mathrm{d}t$ et $\int_a^b g(t)\, \mathrm{d}t$ sont de même nature.*

[8] Parce que f est *positive* sur $[a, b[$.

Preuve. Rappelons que « f équivalente à g en $b-$ » noté encore $f \underset{b-}{\sim} g$ signifie qu'il existe un réel $c \in [a, b[$ et une fonction h définie que $[c, b[$ telle que

$$\forall t \in [c, b[, \quad f(t) = g(t)h(t) \quad \text{et} \quad \lim_{t \to b-} h(t) = 1.$$

Cette limite à gauche de h en b nous permet de trouver un $d \in [c, b[$ tel que l'encadrement $1/2 \leq h(t) \leq 3/2$ soit vérifié[9] pour tout $t \in [d, b[$. Par positivité de f et g au voisinage de b et quitte à remplacer d par $d' \in [d, b[$, on se ramène au cas où g est positive sur $[d, b[$. On a alors

$$\forall t \in [d, b[, \quad 0 \leq \frac{g(t)}{2} \leq f(t) = g(t)h(t) \leq \frac{3g(t)}{2}, \tag{2.23}$$

d'où l'on tire

$$\forall x \in [d, b[, \qquad \frac{1}{2} \int_d^x g(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_d^x f(t)\,\mathrm{d}t \leq \frac{3}{2} \int_d^x g(t)\,\mathrm{d}t. \tag{2.24}$$

Supposons que $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ diverge. Comme $\int_a^d g(t)\,\mathrm{d}t$ est une constante finie, $\int_d^b g(t)\,\mathrm{d}t$ diverge aussi. Par *positivité* de g sur $[d, b[$, $\int_d^x g(t)\,\mathrm{d}t$ tend alors vers $+\infty$ quand x tend vers b à gauche. Il en va de même pour $\int_d^x f(t)\,\mathrm{d}t$ à cause de la première inégalité dans (2.24). Par addition de la constante $\int_a^d f(t)\,\mathrm{d}t$ on voit finalement que $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ tend vers $+\infty$ en $b-$. Ainsi la divergence de $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ implique celle de $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Si $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ converge, l'ensemble $\{\int_d^x g(t)\,\mathrm{d}t;\ x \in [d, b[\,\}$ est majoré et la deuxième inégalité dans (2.24), montre qu'il en va de même pour $\{\int_d^x f(t)\,\mathrm{d}t;\ x \in [d, b[\,\}$. On en déduit facilement que $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge en utilisant la *positivité* sur $[d, b[$ de f qui résulte de (2.23)$\cdot$ $\square$

Corollaire 2.34. *Soient $f, g \in \mathcal{R}^{\mathrm{loc}}[a, b[$ telles que g soit* strictement positive *sur un voisinage à gauche de b et que*

$$\lim_{t \to b-} \frac{f(t)}{g(t)} = K, \quad K \in]0, +\infty[. \tag{2.25}$$

Alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Preuve. La positivité stricte de g sur un voisinage à gauche de b et (2.25) impliquent que f et Kg sont toutes deux positives sur un même voisinage $[c, b[$ de b et que f et Kg sont équivalentes en $b-$. On conclut en appliquant le théorème 2.33 à f et Kg. $\square$

Exemple 2.35. $I := \displaystyle\int_0^1 t^\alpha (1-t)^\beta\,\mathrm{d}t$ *converge si et seulement si* $\alpha > -1$ et $\beta > -1$.

L'intégrande $f : t \mapsto t^\alpha (1-t)^\beta$ est toujours continue au moins sur $]0, 1[$, donc f est localement Riemann intégrable sur $]0, 1[$.

[9] Appliquer la définition de la limite avec $\varepsilon = 1/2$.

Pour $\alpha \geq 0$ et $\beta \geq 0$, f est continue sur $[0,1]$ donc Riemann intégrable sur $[0,1]$. I est alors une intégrale ordinaire. Si $\alpha < 0$ ou $\beta < 0$, I est une intégrale généralisée . Pour étudier sa convergence, on regarde séparément $\int_0^{1/2}$ et $\int_{1/2}^1$. Notons que f est strictement positive sur $]0,1[$, ce qui nous permet d'utiliser le théorème 2.33. On voit ainsi que

$$t^\alpha(1-t)^\beta \underset{0+}{\sim} t^\alpha \quad \text{et} \quad t^\alpha(1-t)^\beta \underset{1-}{\sim} (1-t)^\beta.$$

Compte-tenu du corollaire 2.15, on en déduit que I converge si et seulement si $\alpha > -1$ et $\beta > -1$.

Exemple 2.36. $I := \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3}$ *converge.*

On a envie de dire que c'est une application immédiate du théorème 2.33 puisque $f(t) := (1+t)^{-3} \simeq t^{-3} =: g(t)$ en $+\infty$. Mais alors on introduit artificiellement un problème en zéro pour g et $\int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ diverge (à cause de la borne 0). En y regardant de plus près, on voit que les hypothèses du théorème 2.33 ne sont pas toutes vérifiées puisque g est localement intégrable sur $]0,+\infty[$, *mais pas* sur $[0,+\infty[$. Notons que f elle, est bien dans $\mathcal{R}^{\mathrm{loc}}[0,+\infty[$ comme fonction continue sur $[0,+\infty[$. On se sort de de mauvais pas en remarquant que I et $\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature et en appliquant le théorème 2.33 sur l'intervalle $[1,+\infty[$ avec les restrictions de f et g à cet intervalle. En effet $\int_1^{+\infty} t^{-3}\,\mathrm{d}t$ converge par la proposition 2.14 a).

On aurait pu aussi prouver par cette méthode la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$, mais dans ce cas, il y a bien plus simple puisque $\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \arctan(x)$ qui tend vers $\pi/2$ lorsque x tend vers $+\infty$. Donc on voit directement que $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ converge et vaut $\pi/2$.

Exemple 2.37. $I := \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{3t+2}{5t^3+t^2+4}\,\mathrm{d}t$ *converge.*

L'intégrande $f : t \mapsto (3t+2)(5t^3+t^2+4)^{-1}$ est positive et continue sur $[0,+\infty[$ comme quotient de deux fonctions continues car le dénominateur qui est minoré par 4 sur cet intervalle ne s'y annule pas. Ainsi f appartient à $\mathcal{R}^{\mathrm{loc}}[0,+\infty[$. D'autre part en $+\infty$, $f(t)$ est équivalent à $\frac{3}{5}t^{-2} =: g(t)$. On est confronté au même piège qu'à l'exemple 2.36 et il faut éviter d'introduire artificiellement un problème en 0 à cause de la divergence de $\int_0^\varepsilon g(t)\,\mathrm{d}t$. Là encore il suffit de se ramener à $\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ qui converge par comparaison avec $\int_1^{+\infty} t^{-2}\,\mathrm{d}t$.

Exemple 2.38. $I := \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{(\cos t)^\alpha}$ *converge si et seulement si* $\alpha < 1$.

Sur $[0,\pi/2]$ la fonction continue cosinus ne s'annule qu'au point $\pi/2$ et est positive ailleurs. Pour $\alpha \leq 0$, l'intégrande $f : t \mapsto (\cos t)^{-\alpha}$ est continue sur $[0,\pi/2]$ et I est une intégrale de Riemann ordinaire. Pour $\alpha > 0$, f est continue sur $[0,\pi/2[$ et tend vers $+\infty$ à gauche en $\pi/2$. Dans ce cas $f \in \mathcal{R}^{\mathrm{loc}}[0,\pi/2[$ et I est une véritable intégrale généralisée. Un développement limité à l'ordre 1 du cosinus au point $\pi/2$ s'écrit :

$$\cos t = \cos\frac{\pi}{2} + \Bigl(-\sin\frac{\pi}{2}\Bigr)\Bigl(t-\frac{\pi}{2}\Bigr) + \Bigl(t-\frac{\pi}{2}\Bigr)\varepsilon\Bigl(t-\frac{\pi}{2}\Bigr), \quad \varepsilon(u) \xrightarrow[u\to 0]{} 0,$$

d'où

$$\cos t = \Big(\frac{\pi}{2} - t\Big)\Big(1 - \varepsilon\Big(t - \frac{\pi}{2}\Big)\Big),$$

autrement dit, $\cos t$ a pour équivalent $\pi/2 - t$ en $\pi/2$. On en déduit que

$$f(t) \underset{\frac{\pi}{2}}{\sim} \Big(\frac{\pi}{2} - t\Big)^{-\alpha} =: g(t).$$

La fonction g étant comme f, continue et positive sur $[0, \pi/2[$, le théorème 2.33 s'applique et nous dit que I et $\int_0^{\pi/2}(\pi/2 - t)^{-\alpha}\,\mathrm{d}t$ sont de même nature. Cette dernière intégrale converge si et seulement si $\alpha < 1$ par le corollaire 2.15.

Remarque 2.39. Le théorème 2.33 s'adapte immédiatement au cas où f et g sont *toutes deux négatives* au voisinage à gauche de b. Par contre et même si f et g sont de même signe au voisinage à gauche de b, le théorème n'est plus valable si f n'a pas un *signe constant* au voisinage de $b-$. Le contre exemple suivant devrait vous en convaincre.

Exemple 2.40 (à méditer). *Définissons* $f, g : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ *par*

$$f(t) := \frac{\sin t}{\sqrt{t}}, \qquad g(t) := \frac{\sin t}{\sqrt{t}} + \frac{\sin^2 t}{t}. \tag{2.26}$$

Alors $f(t) \sim g(t)$ *en* $+\infty$, f *change de signe une infinité de fois au voisinage de* $+\infty$, f *et* g *sont de même signe au voisinage de* $+\infty$. *L'intégrale généralisée* $\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ *converge mais* $\int_1^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ *diverge.*

Justifications. Les fonctions f et g sont continues sur $[1, +\infty[$ donc dans $\mathcal{R}^{\mathrm{loc}}[1, +\infty[$. On note d'abord que pour tout $t \in [1, +\infty[$, $g(t) = f(t)h(t)$ avec

$$g(t) = f(t)h(t) \quad \text{avec} \quad h(t) = 1 + \frac{\sin t}{\sqrt{t}} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 1. \tag{2.27}$$

Ceci établit l'équivalence de f et g en $+\infty$.

La fonction f ayant le signe du sinus change de signe une infinité de fois au voisinage de $+\infty$. Il en va de même pour g à cause de (2.27) puisque $h(t)$ est strictement positif[10] sur $[1, +\infty[$. De plus, f et g ont même signe et mêmes zéros sur tout l'intervalle $[1, +\infty[$.

L'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge par le théorème d'Abel ou la proposition 2.27.

Supposons que $\int_1^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors nécessairement $\int_1^{+\infty} t^{-1}\sin^2 t\,\mathrm{d}t$ doit converger. En effet

$$\int_1^x \frac{\sin^2 t}{t}\,\mathrm{d}t = \int_1^x g(t)\,\mathrm{d}t - \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

et le second membre doit avoir une limite finie quand x tend vers $+\infty$ en raison de la convergence des deux intégrales $\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_1^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$. Nous allons montrer que

[10] Il suffirait que h soit strictement positive sur un voisinage $[c, +\infty[$ de $+\infty$, ce qui découle du fait que h a une limite strictement positive en $+\infty$. Mais ici il est plus simple de remarquer que $t^{-1/2}\sin t > -1$ pour $t > 1$ et que $h(1) = \sin 1 > 0$.

l'on aboutit à une *contradiction* en vérifiant *directement* que $\int_1^{+\infty} t^{-1}\sin^2 t\,\mathrm{d}t$ *diverge*. En effet, l'identité $\sin^2 t = \frac{1}{2}(1-\cos 2t)$ nous donne

$$\int_1^x \frac{\sin^2 t}{t}\,\mathrm{d}t = \int_1^x \Bigl(\frac{1}{2t}-\frac{\cos 2t}{2t}\Bigr)\,\mathrm{d}t = \Bigl[\frac{1}{2}\ln t\Bigr]_1^x - \frac{1}{2}\int_1^x \frac{\cos 2t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int_1^x \frac{\cos 2t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Quand x tend vers $+\infty$, $\frac{1}{2}\ln x$ tend vers $+\infty$, tandis que $\frac{1}{2}\int_1^x \frac{\cos 2t}{t}\,\mathrm{d}t$ tend vers une limite finie car $\frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2t}{t}\,\mathrm{d}t$ converge grâce au théorème d'Abel ou à la proposition 2.27 (poser $s = 2t$). Donc $\int_1^x t^{-1}\sin^2 t\,\mathrm{d}t$ tend vers $+\infty$ avec x, autrement dit $\int_1^{+\infty} t^{-1}\sin^2 t\,\mathrm{d}t$ diverge, ce qui établit la contradiction annoncée et impose la divergence de $\int_1^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$. □

2.4 Divers

2.4.1 Changements de variable

Nous examinons l'extension des formules de changement de variable au cas des intégrales généralisées. *Grosso modo* tout se passe bien lorsque l'on utilise un changement de variable *monotone*. Si ce n'est pas le cas, il convient d'être prudent et de revenir à la définition de l'intégrale généralisée $\int_a^b = \lim_{x\to b-}\int_a^x$ pour appliquer le changement de variable aux intégrales de Riemann ordinaires $\int_a^x$ avant de faire tendre x vers $b-$.

Proposition 2.41 (translation et changement d'échelle).

i) Translation. Soient $c \in \mathbb{R}$ et f localement Riemann intégrable sur $[a+c, b+c[$, avec $b+c := +\infty$ si $b = +\infty$. Alors l'application $g : [a,b[\to \mathbb{R}$, $t \mapsto f(t+c)$ est localement Riemann intégrable sur $[a,b[$. Les intégrales $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_{a+c}^{b+c} f(s)\,\mathrm{d}s$ sont de même nature. Si l'une des deux converge on a

$$\int_a^b f(t+c)\,\mathrm{d}t = \int_{a+c}^{b+c} f(s)\,\mathrm{d}s. \tag{2.28}$$

Cette égalité reste vraie dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ sans hypothèse de convergence si f ou g est positive sur son intervalle d'intégration.

ii) Changement d'échelle. Soient $c \in \mathbb{R}^*$ et f localement Riemann intégrable sur l'intervalle d'extrémités[11] ac et bc, semi-fermé en ac, avec dans le cas où $b = +\infty$, $bc := +\infty$ si $c > 0$, $bc := -\infty$ si $c < 0$. Alors l'application $h : [a,b] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto f(ct)$ est localement Riemann intégrable sur $[a,b[$. Les intégrales $\int_a^b h(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_{ac}^{bc} f(s)\,\mathrm{d}s$ sont de même nature. Si l'une des deux converge on a

$$\int_a^b f(ct)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{c}\int_{ac}^{bc} f(s)\,\mathrm{d}s. \tag{2.29}$$

Cette égalité reste vraie dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ sans hypothèse de convergence si f ou h est positive sur son intervalle d'intégration.

[11] Il s'agit de $[ac, bc[$ si $c > 0$ et de $]bc, ac]$ si $c < 0$.

Remarquons qu'il n'y a ici aucune hypothèse de continuité sur f pour ces formules de changement de variable par translation ou changement d'échelle dans les intégrales généralisées. On peut donc les appliquer notamment avec des fonctions décroissantes positives qui peuvent avoir une infinité de discontinuités, mais sont toujours localement Riemann intégrables.

Preuve de i). Puisque $f \in \mathcal{R}^{\mathrm{loc}}[a+c, b+c[$, elle est Riemann intégrable sur le segment $[a+c, x+c]$ pour tout $x \in [a, b[$. Alors par la proposition 1.32 i), g est Riemann intégrable sur $[a, x]$ et ceci valant pour tout $x \in [a, b[$, g est bien dans $\mathcal{R}^{\mathrm{loc}}[a, b[$. De plus on a par la formule de changement de variable (1.46) :

$$\forall x \in [a, b[, \qquad \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^x f(t+c)\,\mathrm{d}t = \int_{a+c}^{x+c} f(s)\,\mathrm{d}s.$$

En faisant tendre x vers $b-$, on en déduit que $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_{a+c}^{b+c} f(s)\,\mathrm{d}s$ sont de même nature. Si l'une des deux intégrales généralisées converge, cela signifie que l'intégrale de Riemann ordinaire correspondante ci-dessus a une limite dans $\mathbb{R}$ quand x tend vers $b-$. En raison de l'égalité, il en va de même pour l'autre intégrale et les limites sont égales, ce qui nous donne (2.28). Si f ou g est positive, ces deux intégrales dépendant de x ont toujours une limite dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ et les limites sont égales. □

Preuve de ii). La preuve est analogue à celle de i) à quelques alourdissements d'écriture près que l'auteur abandonne lâchement au lecteur. □

Voici maintenant une extension partielle [12] aux intégrales généralisées du changement de variable « classique » de la proposition 1.32 iii).

Proposition 2.42 (changement de variable C^1 monotone). *Soit $\varphi : [a, b[\to \mathbb{R}$, une fonction* monotone *ayant une dérivée continue sur $[a, b[$. On suppose de plus que φ est* strictement *monotone au voisinage à gauche de b. Pour toute fonction f* continue *sur l'intervalle $\varphi([a, b[)$, les deux intégrales généralisées ci-dessous sont de même nature et si l'une converge on a*

$$\int_a^b f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b-)} f(s)\,\mathrm{d}s, \tag{2.30}$$

où $\varphi(b-) \in \overline{\mathbb{R}}$ désigne la limite à gauche de φ en b. Cette égalité demeure vraie dans $\overline{\mathbb{R}}$ sans condition de convergence si f est de signe constant sur l'intervalle $\varphi([a, b[)$.

Notons $h := (f \circ \varphi)\varphi'$. La condition sur la stricte monotonie de φ à gauche de b est là pour écarter un cas artificiel où l'intégrale $\int_a^b h(t)\,\mathrm{d}t$ est une intégrale de Riemann ordinaire d'un fonction continue sur un intervalle $[a, c]$. En effet si φ est constante sur $[c, b[$ pour un $c \in [a, b[$, on voit que $\int_a^x h(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c h(t)\,\mathrm{d}t$ pour tout $x \in [c, b[$ en raison de la nullité de φ' sur $[c, b[$. En faisant tendre x vers $b-$, cette égalité nous

[12] On notera l'hypothèse plus restrictive sur le changement de variable φ.

donne $\int_a^b h(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c h(t)\,\mathrm{d}t$. Comme h est continue sur $[a,c]$, le changement de variable classique prop. 1.32 iii) nous donne $\int_a^c h(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(c)} f(s)\,\mathrm{d}s$ et comme $\varphi(b-) = \varphi(c)$, on obtient bien (2.30). On voit ainsi que dans ce cas les deux intégrales dans (2.30) sont de fausses intégrales généralisées puisqu'elles peuvent s'écrire comme intégrales de fonctions continues sur $[a,c]$.

Preuve de la proposition 2.42. La fonction φ étant monotone admet une limite à gauche finie ou infinie en b que nous notons $\varphi(b-)$. En raison de la continuité et de la monotonie de φ sur $[a,b[$, stricte au voisinage de $b-$, $\varphi([a,b[)$ est l' intervalle de bornes $\varphi(a)$ et $\varphi(b-)$, fermé en $\varphi(a)$ et ouvert en $\varphi(b-)$. Nous traitons le cas où φ est décroissante, l'adaptation au cas où elle est croissante étant immédiate. On a alors $\varphi([a,b[) =]\varphi(b-),\varphi(a)]$. Par application de la prop. 1.32 iii), on a

$$\forall x \in [a,b[, \quad \int_a^x f\bigl(\varphi(t)\bigr)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(x)} f(s)\,\mathrm{d}s = -\int_{\varphi(x)}^{\varphi(a)} f(s)\,\mathrm{d}s. \tag{2.31}$$

Les fonctions h et f étant continues l'une sur $[a,b[$ et l'autre sur $]\varphi(b-),\varphi(a)]$ appartiennent respectivement à $\mathcal{R}^{\mathrm{loc}}[a,b[$ et $\mathcal{R}^{\mathrm{loc}}]\varphi(b-),\varphi(a)]$. En faisant tendre x vers $b-$ dans (2.31), et en notant que par continuité et décroissance de φ, $\varphi(x)$ tend alors vers $\varphi(b-)$ par la droite, on voit que les intégrales généralisées $\int_a^b h(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b-)} f(s)\,\mathrm{d}s$ sont de même nature. Si l'une des deux converge, on en déduit en se souvenant de la définition 2.11 :

$$\int_a^b f\bigl(\varphi(t)\bigr)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = -\int_{\varphi(b-)}^{\varphi(a)} f(s)\,\mathrm{d}s = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b-)} f(s)\,\mathrm{d}s,$$

ce qui nous donne (2.30). D'autre part si f est positive, h est négative car φ est décroissante donc $\varphi' \leq 0$. Alors dans (2.31) les intégrales $\int_a^x h(t)\,\mathrm{d}t$ et $-\int_{\varphi(x)}^{\varphi(a)} f(s)\,\mathrm{d}s$ sont des fonctions négatives et décroissantes de x donc convergent dans $\overline{\mathbb{R}}$ quand x tend vers $b-$, soit vers un réel négatif, soit vers $-\infty$ et l'égalité (2.31) se conserve par passage à la limite. Si f est négative, h est positive car $\varphi' \leq 0$. Alors les intégrales de (2.31) sont des fonctions positives et croissantes de la variable x et elles restent égales à la limite (dans $\overline{\mathbb{R}}_+$) quand x tend vers $b-$. □

Exemple 2.43. *L'intégrale généralisée* $I := \displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t^2)\,\mathrm{d}t$ *converge*[13].

En effet par le changement de variable croissant et C^1, $\varphi : t \mapsto t^2$, l'intervalle $[0,+\infty[$ a pour image $[0,+\infty[$ et I est de même nature que

$$J := \int_0^{+\infty} \frac{\sin s}{2\sqrt{s}}\,\mathrm{d}s.$$

L'intégrale J converge par la proposition 2.27, donc I converge. De plus on a alors $I = J$ par l'égalité (2.30).

[13] Je sais, cela surprend, surtout si on compare avec l'exemple 2.3.

Exemple 2.44 (un changement de variable illicite). Voici un exemple où un changement de variable C^1 non monotone appliqué sans précaution conduit à une erreur. Dans l'intégrale généralisée $I := \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{\cos t} \,\mathrm{d}t$, on pose $s = \cos t$. On obtient alors l'intégrale de Riemann ordinaire $J := \int_1^1 \frac{-\mathrm{d}s}{s} = 0$. L'égalité $I = J$ ne peut être valide ici car I diverge. En effet la fonction tangente est localement Riemann intégrable sur l'intervalle troué $[0, 2\pi] \setminus \{\pi/2, 3\pi/2\}$ et nous devons considérer séparément chacune des intégrales $\int_0^{\pi/2}$, $\int_{\pi/2}^{3\pi/2}$ et $\int_{3\pi/2}^{2\pi}$. L'intégrale $\int_0^{\pi/2} \tan t \,\mathrm{d}t$ diverge car la fonction tangente est positive sur $[0, \pi/2[$ et équivalente à $1/\cos t$ au voisinage à gauche de $\pi/2$. Or on sait par l'exemple 2.38 que $\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{\cos t}$ diverge[14].

2.4.2 Intégration par parties

Il n'y a *pas d'extension automatique de la règle d'intégration par parties (i.p.p.)* des intégrales de Riemann ordinaires (calculables par primitivation) aux intégrales généralisées. Lorsque l'on effectue une intégration par parties sur une intégrale généralisée, tout peut arriver :

1. transformation d'une intégrale absolument convergente en intégrale absolument convergente ;
2. transformation d'une intégrale absolument convergente en intégrale convergente mais pas absolument et *vice versa* ;
3. transformation d'une intégrale absolument convergente en intégrale divergente.

En pratique pour effectuer une intégration par parties sur $\int_a^b f(t) \,\mathrm{d}t$ avec $f \in \mathcal{R}^{\mathrm{loc}}[a, b[$ (en fait avec $f \in C[a, b[$), on l'effectue d'abord sur l'intégrale de Riemann ordinaire $\int_a^x f(t) \,\mathrm{d}t$ pour x quelconque dans $[a, b[$ avant de regarder ce qui se passe lorsque l'on fait tendre x vers $b-$.

Voici quelques exemples illustrant les différentes situations possibles.

Exemple 2.45. *Calcul de* $I := \displaystyle\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t} \,\mathrm{d}t$ *par i.p.p.*

L'intégrande est une fonction positive et continue sur $[0, +\infty[$. Comme $t\mathrm{e}^{-t/2}$ tend vers 0 en $+\infty$, cette quantité est majorée pour $t \geq t_0$ par une constante M. On a alors pour $t \geq t_0$, $t\mathrm{e}^{-t} \leq M\mathrm{e}^{-t/2} =: g(t)$ et comme $\int_0^{+\infty} g(t) \,\mathrm{d}t$ converge (évident par primitivation), le théorème de comparaison (th. 2.29) nous donne la convergence de I.

On effectue l'i.p.p. sur $I(x) := \int_0^x t\mathrm{e}^{-t} \,\mathrm{d}t$ en posant

$$u(t) = t,\ v'(t) = \mathrm{e}^{-t}, \qquad u'(t) = 1,\ v(t) = -\mathrm{e}^{-t},$$

d'où

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad I(x) = \left[-t\mathrm{e}^{-t}\right]_0^x - \int_0^x (-\mathrm{e}^{-t}) \,\mathrm{d}t = x\mathrm{e}^{-x} + \int_0^x \mathrm{e}^{-t} \,\mathrm{d}t.$$

[14] On pourrait contester cet exemple, car dans le contexte de la proposition 2.42, avant d'envisager un changement de variable dans l'intégrale I, il convient de vérifier que l'intégrande est localement intégrable sur $[0, 2\pi[$, ce qui n'est pas le cas ici.

Quand x tend vers $+\infty$, $x\mathrm{e}^{-x}$ tend vers 0 et $\int_0^x \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ tend vers l'intégrale généralisée convergente $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$, laquelle se calcule d'ailleurs immédiatement par primitivation (exemple 2.1) et vaut 1. Finalement l'i.p.p. nous permet ici de retrouver la convergence de I et de calculer sa valeur : $I = 1$.

Exemple 2.46. *Intégration par parties de* $I := \displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

Ici l'intégrande f est localement Riemann intégrable sur $[\pi, +\infty[$, comme fonction continue sur cet intervalle. La convergence de I résulte de l'inégalité $0 \leq f(t) \leq t^{-2}$ et de la convergence de $\int_\pi^{+\infty} t^{-2}\,\mathrm{d}t$, par le théorème de comparaison. Ainsi I est une intégrale généralisée absolument convergente.

On effectue l'i.p.p. sur $I(x) := \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ en posant

$$u(t) = \sin^2 t,\ v'(t) = t^{-2}, \qquad u'(t) = 2\sin t\cos t = \sin(2t),\ v(t) = -t^{-1},$$

ce qui nous donne

$$\forall x \geq \pi, \quad I(x) = \left[-\frac{\sin^2 t}{t}\right]_\pi^x + \int_\pi^x \frac{\sin(2t)}{t}\,\mathrm{d}t = -\frac{\sin^2 x}{x} + \int_{2\pi}^{2x} \frac{\sin s}{s}\,\mathrm{d}s.$$

Faisons tendre x vers $+\infty$, alors au premier membre $I(x)$ tend vers I puisque l'on sait déjà que I converge. Au second membre $-x^{-1}\sin^2 x$ tend vers 0. On en déduit que $J(x) := \int_{2\pi}^{2x} s^{-1}\sin s\,\mathrm{d}s$ tend vers une limite finie égale à I. Ceci prouve que l'intégrale généralisée

$$J := \int_{2\pi}^{+\infty} \frac{\sin s}{s}\,\mathrm{d}s$$

converge et est égale à I. On sait par ailleurs que J n'est pas absolument convergente, voir l'exemple 2.28. Ici l'intégration par parties a transformé une intégrale absolument convergente I en une intégrale J convergente mais pas absolument. Une autre i.p.p. partant de J donnerait

$$J = \frac{1}{2\pi} + \int_{2\pi}^{+\infty} \frac{\cos s}{s^2}\,\mathrm{d}s,$$

nous fournissant un exemple de transformation d'une intégrale convergente mais pas absolument, en intégrale absolument convergente.

Exemple 2.47. *Tentative d'i.p.p. sur* $I := \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{t^{3/2}}\,\mathrm{d}t$

L'intégrande f est dans $\mathcal{R}^{\mathrm{loc}}]0, \pi/2]$ et positive. L'intégrale converge en 0 grâce à la majoration $0 \leq \sin t \leq t$ d'où $f(t) \leq t^{-1/2}$ valable pour tout $t \in]0, \pi/2]$. L'intégrale généralisée I est donc absolument convergente. Intégrons par parties $I(x) := \int_x^{\pi/2} f(t)\,\mathrm{d}t$ en posant :

$$u(t) = t^{-3/2},\ v'(t) = \sin t, \qquad u'(t) = -\frac{3}{2}t^{-5/2},\ v(t) = -\cos t,$$

d'où

$$I(x) = \left[\frac{-\cos t}{t^{3/2}}\right]_x^{\pi/2} - \frac{3}{2}\int_x^{\pi/2} \frac{\cos t}{t^{5/2}}\,\mathrm{d}t = \frac{\cos x}{x^{3/2}} - \frac{3}{2}\int_x^{\pi/2} \frac{\cos t}{t^{5/2}}\,\mathrm{d}t.$$

Si on fait tendre x vers $0+$, on obtient une forme indéterminée du type « $\infty - \infty$ », car l'intégrale généralisée

$$J := \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{t^{5/2}}\,\mathrm{d}t$$

est divergente et vaut $+\infty$ (justifiez !). On a là un exemple d'une intégration par parties sur une intégrale absolument convergente qui fait apparaître une intégrale divergente.

Ceci dit l'i.p.p. ci-dessus n'est pas complètement inutile. Elle permet en effet de donner une « vitesse de divergence » de J. En effet puisque $I(x)$ a une limite finie I en $0+$, on en déduit que

$$J(x) = \int_x^{\pi/2} \frac{\cos t}{t^{5/2}}\,\mathrm{d}t \underset{0+}{\sim} \frac{2\cos x}{3x^{3/2}} \underset{0+}{\sim} \frac{2}{3x^{3/2}}.$$

2.4.3 Comparaison des intégrales ordinaires et généralisées

On examine maintenant quelles sont les propriétés de l'intégrale de Riemann ordinaire qui passent à l'intégrale généralisées.

L'intégrale généralisée hérite des propriétés suivantes de l'intégrale de Riemann ordinaire, à condition de remplacer l'hypothèse « $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$ » par « $f, g \in \mathcal{R}^{\mathrm{loc}}[a, b[$ *et les intégrales généralisées* $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ convergent ». Nous laissons le soin au lecteur de vérifier ces propriétés en les appliquant d'abord à $\int_a^x$ avant de faire tendre x vers $b-$.

- Additivité, voir prop. 1.18.
- Linéarité, voir prop. 1.20.
- Positivité et croissance, voir les points i) et ii) de la proposition 1.21.
- L'additivité relative aux intervalles, cf. prop. 1.28 en notant que la convergence de $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ implique celle de $\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$ et de $\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$, pour tout $c \in]a, b[$.
- La relation de Chasles prop. 1.29, à condition que chacune des trois intégrales concernées soit convergente. En effet en prenant c extérieur à $[a, b[$, on risque de faire apparaître une intégrale divergente.

Voyons maintenant les propriétés qui ne passent pas de l'intégrale ordinaire à l'intégrale généralisée. Il s'agit essentiellement de ce qui concerne la valeur absolue et le produit.

Rappelons d'abord que la Riemann intégrabilité de f implique celle de $|f|$ et que la réciproque est fausse, cf. remarque 1.23. On en déduit immédiatement que si f est *localement* Riemann intégrable sur $[a, b[$, $|f|$ l'est aussi. Par contre pour $f \in \mathcal{R}^{\mathrm{loc}}[a, b[$, la convergence de l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *n'implique pas* celle de $\int_a^b |f|(t)\,\mathrm{d}t$, voir l'exemple 2.28. Dans le même ordre d'idées, la Riemann intégrabilité locale de f sur $[a, b[$ implique celle de f^+ et de f^-, mais la convergence de $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *n'implique pas* celle de $\int_a^b f^+(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^b f^-(t)\,\mathrm{d}t$. L'exemple 2.28 avec $f(t) = t^{-1}\sin t$ sert aussi de contre exemple ici (vérification laissée en exercice). Par contre si $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est *absolument* convergente, $\int_a^b f^+(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^b f^-(t)\,\mathrm{d}t$ sont convergentes et on a

$$\int_a^b |f|(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f^+(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b f^-(t)\,\mathrm{d}t, \qquad \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f^+(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b f^-(t)\,\mathrm{d}t,$$

ainsi que

$$\Bigl|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\Bigr| \leq \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t < +\infty. \tag{2.32}$$

Regardons maintenant le produit. Si $f, g \in \mathcal{R}^{\mathrm{loc}}[a,b[$, il découle immédiatement de la proposition 1.26 que leur produit fg est lui aussi dans $\mathcal{R}^{\mathrm{loc}}[a,b[$. Par contre, la convergence, même absolue, des intégrales généralisées $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ *n'implique pas* celle de $\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$. Un contre exemple immédiat est avec $[a,b[=[0,1[$, $f(t)=g(t)=(1-t)^{1/2}$. On peut néanmoins obtenir la convergence de $\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ à partir de celle des intégrales généralisées non pas de f et g mais de f^2 et g^2.

Proposition 2.48 (inégalité de Cauchy-Schwarz). *Si $f, g \in \mathcal{R}^{\mathrm{loc}}[a,b[$ sont telles que $\int_a^b f(t)^2\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^b g(t)^2\,\mathrm{d}t$ convergent, $\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument et vérifie*

$$\Bigl|\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\Bigr| \leq \left\{\int_a^b f(t)^2\,\mathrm{d}t\right\}^{1/2} \left\{\int_a^b g(t)^2\,\mathrm{d}t\right\}^{1/2}. \tag{2.33}$$

Preuve. D'abord, puisque f, g sont dans $\mathcal{R}^{\mathrm{loc}}[a,b[$, il en va de même pour $|f|$, $|g|$ et leur produit $|f|\cdot|g| = |fg|$. En appliquant l'inégalité de Cauchy Schwarz pour les intégrales ordinaires, on en déduit que

$$\forall x \in [a,b[, \qquad \int_a^x |f(t)g(t)|\,\mathrm{d}t \leq \left\{\int_a^x f(t)^2\,\mathrm{d}t\right\}^{1/2} \left\{\int_a^x g(t)^2\,\mathrm{d}t\right\}^{1/2}.$$

Toutes ces intégrales sont des fonctions croissantes de x. En faisant tendre x vers $b-$, elles convergent toutes dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. Compte tenu de l'hypothèse convergence de $\int_a^b f(t)^2\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^b g(t)^2\,\mathrm{d}t$, on en déduit que

$$\int_a^b |f(t)g(t)|\,\mathrm{d}t \leq \left\{\int_a^b f(t)^2\,\mathrm{d}t\right\}^{1/2} \left\{\int_a^b g(t)^2\,\mathrm{d}t\right\}^{1/2} < +\infty.$$

Ceci montre que $\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument et on conclut en appliquant l'inégalité (2.32) à la fonction fg. □

Annexe A

Pot-pourri

On a regroupé dans cette annexe fourre-tout quelques éléments tirés du cours d'IPE, auxquels le texte précédent fait référence, de façon à permettre une lecture de ce document totalement indépendante du cours d'IPE.

A.1 Notion de mesure

Soit Ω un ensemble, on note $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω. Une mesure sur Ω est une *fonction d'ensembles* m qui à certaines parties A de Ω, associe un réel positif $m(A)$ appelé mesure de A. La théorie que nous allons présenter fournit un cadre mathématique commun pour des notions comme le dénombrement, la mesure des grandeurs géométriques (longueur, aire, volume), physiques (masse) et les probabilités. À partir du concept de mesure, on peut bâtir une intégrale[1] sur l'ensemble Ω permettant d'unifier les notions d'intégrale simple ou multiple au sens classique, de série absolument convergente et d'espérance mathématique d'une variable aléatoire. Il est commode d'élargir d'emblée l'ensemble d'arrivée de m à $\overline{\mathbb{R}}_+$ au lieu de $\mathbb{R}_+$, par exemple pour pouvoir dire que l'aire d'un quart de plan est $+\infty$.

Intuitivement, en pensant par exemple à la mesure des aires, les propriétés minimales que l'on puisse exiger de m sont

a) la *croissance* : si $A \subset B$, $m(A) \leq m(B)$,

b) l'*additivité* : si $A \cap B = \emptyset$, $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$, sous réserve que $m(A)$, $m(B)$ et $m(A \cup B)$ soient définies.

Il est facile de voir que la croissance est une conséquence de l'additivité en écrivant si $A \subset B$, $B = A \cup (B \setminus A)$ et $m(B) = m(A) + m(B \setminus A) \geq m(A)$, avec les mêmes réserves d'existence. L'additivité s'étend par une récurrence immédiate, aux suites finies $A_1, \dots, A_n$ d'ensembles, donnant *l'additivité finie* : $m(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = m(A_1) + \cdots + m(A_n)$ si les A_i sont deux à deux disjoints. Par contre elle ne s'étend pas automatiquement aux suites infinies d'ensembles deux à deux disjoints.

[1]Appelée « intégrale de Lebesgue ». Sa construction n'est pas au programme de ce cours.

Pour avoir une théorie assez riche, on doit pouvoir effectuer certains passages à la limite, par exemple pour pouvoir mesurer l'aire d'un disque dans le plan en le « pavant » par des carreaux à côtés parallèles aux axes. La propriété correspondante est appelée *σ-additivité* :

$$\text{si les } A_n \text{ sont deux à deux disjoints,} \quad m\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty} m(A_n),$$

pourvu que toutes ces quantités soient définies.

Pourquoi ces clauses restrictives sur l'existence des $m(A)$? Il se trouve que dans la plupart des cas intéressants (sauf lorsque Ω est au plus dénombrable), on ne sait pas définir $m(A)$ pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$. Souvent pour construire une mesure m, on commence par attribuer une valeur à $m(A)$ pour chaque A dans une famille $\mathcal{C}$ bien particulière de parties de Ω. Par exemple si $\Omega = \mathbb{R}$, on peut prendre pour $\mathcal{C}$ la famille des intervalles $]a, b]$ et « décider » que $m(]a, b]) := b-a$, choisissant ainsi de mesurer $]a, b]$ par sa longueur[2]. De même si $\Omega = \mathbb{R}^2$, on peut partir de la famille $\mathcal{C}$ des « rectangles » $R =]a, b]\times]c, d]$ et décider que $m(R) := (b-a)(d-c)$. Dans un deuxième temps, on essaie de prolonger m à une famille $\mathcal{F}$ de parties de Ω plus grande que $\mathcal{C}$, tout en préservant la σ-additivité. Il se trouve qu'il n'est pas toujours possible de réaliser ce prolongement jusqu'à prendre $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. Certaines parties de $\mathbb{R}$ sont d'une trop grande complexité pour qu'on puisse leur attribuer une « longueur ». Ainsi la fonction d'ensembles m a un *ensemble de définition* qui est une sous-famille de $\mathcal{P}(\Omega)$. Cet ensemble de définition de m est ce que l'on appelle une *tribu* de parties de Ω.

Il est temps maintenant de formaliser les définitions suivantes.

Définition A.1 (tribu). *Une famille $\mathcal{F}$ de parties de Ω est appelée* tribu *(ou σ-algèbre) sur Ω si elle*

a) possède l'ensemble vide : $\emptyset \in \mathcal{F}$;

b) est stable par passage au complémentaire : $\forall A \in \mathcal{F}$, $A^c \in \mathcal{F}$;

c) est stable par union dénombrable : $(\forall i \in \mathbb{N}^*,\ A_i \in \mathcal{F}) \Rightarrow \bigcup_{i\in\mathbb{N}^*} A_i \in \mathcal{F}$.

On vérifie facilement à partir de cette définition qu'une tribu est stable par unions ou intersections finies et par intersections dénombrables.

Définition A.2 (mesure). *Soit $\mathcal{F}$ une* tribu *sur Ω. On appelle* mesure positive *sur $(\Omega, \mathcal{F})$ une application*

$$m : \mathcal{F} \longrightarrow [0, +\infty],$$

vérifiant

a) $m(\emptyset) = 0$;

b) m est σ-additive : pour toute suite $(A_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de $\mathcal{F}$ deux à deux disjoints,

$$m\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}^*} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{+\infty} m(A_i). \tag{A.1}$$

[2]Il y a bien d'autres choix possibles, on pourrait poser plus généralement $m(]a, b]) := F(b) - F(a)$ où F est une fonction croissante $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continue à droite.

Dans la définition de la σ-additivité, ou de la stabilité par union dénombrable, on aurait évidemment pu tout aussi bien indexer la suite (A_i) par $\mathbb{N}$ au lieu de $\mathbb{N}^*$.

Remarque A.3. La réunion des A_i est invariante par permutation sur les indices et si chaque A_i est à son tour union dénombrable d'ensembles $B_{i,j} \in \mathcal{F}$ ($j \in \mathbb{N}^*$) deux à deux disjoints, on a clairement

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}^*} A_i = \bigcup_{i\in\mathbb{N}^*} \bigcup_{j\in\mathbb{N}^*} B_{i,j} = \bigcup_{(i,j)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*} B_{i,j}.$$

On voit ici que l'on a un besoin crucial des propriétés de convergence commutative et de sommation par paquets dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. Sans elles la définition de la σ-additivité serait incohérente.

Voyons maintenant des exemples de tribus qui nous seront utiles. Les trois exemples les plus simples sont les suivants.

- La tribu triviale sur Ω est $\mathcal{F} = \{\Omega, \emptyset\}$.
- $\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu.
- Si A est une partie de Ω, alors $\mathcal{F} := \{\Omega, \emptyset, A, A^c\}$ est une tribu. C'est la plus petite tribu possédant A comme élément, *i.e.* toute tribu $\mathcal{G}$ telle que $A \in \mathcal{G}$ contient $\mathcal{F}$. On dit que $\mathcal{F}$ est la tribu engendrée par A.

Cette notion de tribu engendrée se généralise en remarquant que si $(\mathcal{G}_i)_{i\in I}$ est une famille quelconque de tribus sur Ω, $\mathcal{G} := \cap_{i\in I}\mathcal{G}_i$ est une tribu sur Ω (vérification immédiate à partir de la définition A.1).

Définition A.4 (tribu engendrée). *Soit $\mathcal{C}$ une famille de parties d'un ensemble Ω. On appelle* tribu engendrée *par $\mathcal{C}$, et on note $\sigma(\mathcal{C})$, la plus petite tribu contenant $\mathcal{C}$ (c'est l'intersection de toutes les tribus sur Ω contenant $\mathcal{C}$).*

Définition A.5 (tribu borélienne). *On appelle* tribu borélienne *sur $\mathbb{R}^d$ la tribu engendrée par la famille $\mathcal{O}$ des ensembles* ouverts[3] *de $\mathbb{R}^d$. On la notera* $\mathrm{Bor}(\mathbb{R}^d)$*. Ainsi* $\mathrm{Bor}(\mathbb{R}^d) = \sigma(\mathcal{O})$.

Remarque A.6. On peut démontrer que $\mathrm{Bor}(\mathbb{R})$ est aussi la tribu engendrée par les fermés de $\mathbb{R}$, ou par les intervalles ouverts, ou les intervalles fermés, ou les semi-ouverts, ou les intervalles (ouverts ou fermés) à extrémités rationnelles, ou les intervalles $]-\infty, a]$, ou les intervalles $[a, +\infty[$. De même, $\mathrm{Bor}(\mathbb{R}^d)$ est engendrée par les pavés ouverts ou par les pavés de la forme $\prod_{k=1}^d]a_k, b_k]$.

Définition A.7 (application mesurable). *Soit $h : \Omega_1 \to \Omega_2$, où Ω_1 et Ω_2 sont munis respectivement des tribus $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$. On dit que h est* mesurable[4] *$\mathcal{F}_1$ - $\mathcal{F}_2$ si pour tout $B \in \mathcal{F}_2$, $h^{-1}(B) \in \mathcal{F}_1$.*

[3] Un ensemble ouvert de $\mathbb{R}^d$ est une réunion (quelconque) de *pavés* ouverts $\prod_{k=1}^d]a_k, b_k[$. Un *fermé* est le complémentaire d'un ouvert.

[4] Ce langage est trompeur : la mesurabilité ne fait intervenir aucune mesure, elle concerne seulement h et les tribus.

Voyons maintenant des exemples importants de mesures.

Exemple A.8 (masse de Dirac). Soit x_0 un élément fixé de Ω. On appelle *masse de Dirac* au point x_0 ou *mesure de Dirac* au point x_0, la mesure δ_{x_0} sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ définie par

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), \quad \delta_{x_0}(A) := \begin{cases} 1 & \text{si } x_0 \in A, \\ 0 & \text{si } x_0 \notin A. \end{cases}$$

Par restriction, δ_{x_0} est aussi une mesure sur $(\Omega, \mathcal{F})$ pour toute tribu $\mathcal{F}$ sur Ω.

Vérification. Il est clair que $\delta_{x_0}(\emptyset) = 0$. Pour montrer la σ-additivité, soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{P}(\Omega)$, deux à deux disjoints. Nous distinguons deux cas.

a) $x_0 \notin \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Alors $\delta_{x_0}\Bigl(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n\Bigr) = 0$. D'autre part, x_0 ne peut appartenir à aucun des A_n, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\delta_{x_0}(A_n) = 0$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} \delta_{x_0}(A_n) = 0$.

b) $x_0 \in \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Alors $\delta_{x_0}\Bigl(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n\Bigr) = 1$. D'autre part, comme les A_n sont deux à deux disjoints, x_0 doit appartenir à *un seul* des A_n, disons A_{n_0}. Ainsi, $\delta_{x_0}(A_{n_0}) = 1$ et pour tout $n \neq n_0$, $\delta_{x_0}(A_n) = 0$, d'où $\sum_{n\in\mathbb{N}} \delta_{x_0}(A_n) = 1$.

Dans les deux cas, on a

$$\delta_{x_0}\Bigl(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Bigr) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \delta_{x_0}(A_n),$$

δ_{x_0} est donc bien σ-additive. C'est une mesure sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$. □

Exemple A.9 (série de mesures finies). Si les $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont des mesures finies[5] sur $(\Omega, \mathcal{F})$ et si $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels positifs, la fonction d'ensembles $\mu = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k\mu_k$ définie sur $\mathcal{F}$ par

$$\mu : \mathcal{F} \to \overline{\mathbb{R}}_+, \quad A \mapsto \mu(A) := \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k\mu_k(A)$$

est une mesure sur $(\Omega, \mathcal{F})$. Le résultat se généralise à $\mu = \sum_{i\in I} a_i\mu_i$, avec I au plus dénombrable.

Vérification. Pour tout k, $0 \leq a_k < +\infty$, donc $a_k\mu_k(\emptyset) = 0$ et $\mu(\emptyset) = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k\mu_k(\emptyset) = 0$. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{F}$, deux à deux disjoints. En utilisant la σ-additivité de chaque μ_k et l'interversion des sommations pour les séries doubles à termes positifs, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
\mu\Bigl(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Bigr) = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k\mu_k\Bigl(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Bigr) = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k \Bigl\{\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_k(A_n)\Bigr\} &= \sum_{k\in\mathbb{N}} \Bigl\{\sum_{n\in\mathbb{N}} a_k\mu_k(A_n)\Bigr\} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \Bigl\{\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k\mu_k(A_n)\Bigr\} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n),
\end{aligned}$$

[5]La mesure μ_k est *finie* si $\mu_k(A) < +\infty$ pour tout $A \in \mathcal{F}$. Elle est donc aussi *bornée* puisque $\mu_k(A) \leq \mu_k(\Omega) < +\infty$. L'hypothèse « μ_k finie » nous évite la gestion du conflit $a_k = 0$ et $\mu_k(A) = +\infty$.

ce qui établit la σ-additivité de μ. □

Exemple A.10 (mesure ponctuelle). Soient I un ensemble au plus dénombrable, $(x_i)_{i\in I}$ une famille dans Ω et $(a_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs. Alors $\mu := \sum_{i\in I} a_i\delta_{x_i}$ est une mesure sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$, donc aussi par restriction sur tout espace mesurable $(\Omega, \mathcal{F})$. C'est un cas particulier de l'exemple précédent. Les mesures de ce type sont appelées *mesures ponctuelles*.

Exemple A.11 (mesure de comptage). Si $\Omega = \{\omega_i;\ i \in I\}$ est au plus dénombrable, l'application $\mu : \mathcal{P}(\Omega) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ définie par

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), \quad \mu(A) = \begin{cases} \operatorname{card} A & \text{si } A \text{ est fini,} \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases}$$

est une mesure, appelée *mesure de comptage*. Pour le voir, il suffit de remarquer que pour tout A, $\mu(A) = \nu(A)$, où ν est définie comme la mesure ponctuelle $\nu = \sum_{i\in I} \delta_{\omega_i}$.

Exemple A.12 (mesure de Lebesgue λ_d). Nous admettons qu'il existe une unique mesure μ sur $(\mathbb{R}^d, \operatorname{Bor}(\mathbb{R}^d))$ telle que pour tout pavé $\prod_{i=1}^d]a_i, b_i]$ non vide[6],

$$\mu\left(\prod_{i=1}^d]a_i, b_i]\right) = \prod_{i=1}^d (b_i - a_i).$$

On l'appelle *mesure de Lebesgue* sur $\mathbb{R}^d$ et on la note λ_d. Pour $d = 1$, on étend ainsi la notion de longueur des intervalles à tous les ensembles membres de $\operatorname{Bor}(\mathbb{R})$, pour $d = 2$ on étend de même la notion d'aire des rectangles à tous les ensembles boréliens du plan $\mathbb{R}^2$, pour $d = 3$, on étend la notion de volume. Pour $d > 3$, on continuera à parler de volume ou d'hypervolume. Nous admettrons que les formules classiques de calcul d'aire ou de volume se réécrivent à l'aide de λ_d. Par exemple si D est un disque de rayon r de $\mathbb{R}^2$, $\lambda_2(D) = \pi r^2$. Plus généralement, voici les principales propriétés de la mesure de Lebesgue.

Proposition A.13. *La mesure de Lebesgue λ_d sur $(\mathbb{R}^d, \operatorname{Bor}(\mathbb{R}^d))$ a les propriétés suivantes.*

i) *λ_d est invariante par translations : si $h : x \mapsto x + c$ est une translation de $\mathbb{R}^d$, alors pour tout $B \in \operatorname{Bor}(\mathbb{R}^d)$, $h(B) \in \operatorname{Bor}(\mathbb{R}^d)$ et $\lambda_d(B) = \lambda_d\big(h(B)\big)$.*

ii) *λ_d est invariante par toute isométrie euclidienne de $\mathbb{R}^d$: symétrie, rotation, etc.*

iii) *Si h est l'homothétie $x \mapsto cx$ dans $\mathbb{R}^d$, pour tout borélien B, $\lambda_d\big(h(B)\big) = |c|^d\lambda_d(B)$.*

iv) *λ_d ne charge pas les points : $\forall x \in \mathbb{R}^d$, $\lambda_d(\{x\}) = 0$. Si $A \subset \mathbb{R}^d$ est fini ou dénombrable, $\lambda_d(A) = 0$.*

v) $\lambda_d\left(\prod_{i=1}^d [a_i, b_i]\right) = \lambda_d\left(\prod_{i=1}^d]a_i, b_i[\right)$ *et cette égalité implique bien sûr, l'égalité des mesures des 4^d pavés obtenus en jouant sur l'ouverture ou la fermeture des extrémités a_i, b_i des intervalles.*

[6] Ce qui suppose implicitement que $a_i < b_i$ pour chaque $i = 1, \ldots, d$.

vi) Si E est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^d$ et $E \neq \mathbb{R}^d$, $\lambda_d(E) = 0$.

Un bon exercice consiste à établir la formule $\lambda_2(D) = \pi r^2$ en utilisant le calcul de l'aire de l'hypographe de la fonction $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$ par une intégrale de Riemann, cf. proposition 1.5 p. 8 et certaines des propriétés de λ_2 énoncées ci-dessus.

Proposition A.14 (propriétés générales d'une mesure).
Toute mesure μ sur $(\Omega, \mathfrak{F})$ vérifie les propriétés suivantes :

1. $\mu(\emptyset) = 0$.
2. *Additivité*
   a) *Si $A \cap B = \emptyset$, $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.*
   b) *Si les A_i $(1 \leq i \leq n)$ sont deux à deux disjoints :*
$$P\big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\big) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i).$$
3. $\forall A \in \mathfrak{F}$, $\forall B \in \mathfrak{F}$, $A \subset B \;\Rightarrow\; \mu(A) \leq \mu(B)$.
4. $\forall A \in \mathfrak{F}$, $\forall B \in \mathfrak{F}$, *tels que* $\mu(A \cap B) < +\infty$, $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$.
5. *Continuité monotone séquentielle*
   a) *Si $(B_n)_{n\geq 0}$ est une suite croissante d'ensembles de $\mathfrak{F}$ convergente[7] vers $B \in \mathfrak{F}$, alors $\mu(B) = \lim_{n\to+\infty} \mu(B_n)$. Notation :*
$$B_n \uparrow B \Rightarrow \mu(B_n) \uparrow \mu(B) \quad (n \to +\infty).$$
   b) *Si $(C_n)_{n\geq 0}$ est une suite décroissante d'ensembles de $\mathfrak{F}$ convergente[8] vers $C \in \mathfrak{F}$* et si *$\mu(C_0) < +\infty$, alors $\mu(C) = \lim_{n\to+\infty} \mu(C_n)$. Notation :*
$$C_n \downarrow C \Rightarrow \mu(C_n) \downarrow \mu(C) \quad (n \to +\infty).$$
6. *Sous-additivité, sous-σ-additivité*
   a) $\forall A \in \mathfrak{F}, \forall B \in \mathfrak{F} \quad \mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$.
   b) $\forall A_1, \dots, A_n \in \mathfrak{F}, \quad P\big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\big) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$.
   c) $\forall A_1, \dots, A_n, \dots \in \mathfrak{F}, \quad P\big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}^*} A_i\big) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(A_i)$.

A.2 Séries

Théorème A.15 (comparaison série-intégrale). *Soit f continue sur $[k_0, +\infty[$, décroissante et positive sur cet intervalle. La série $\sum_{k=k_0}^{+\infty} f(k)$ converge si et seulement si $\int_{k_0}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t$ a une limite finie quand n tend vers $+\infty$.*

[7] Ce qui signifie : $\forall n \geq 0$, $B_n \subset B_{n+1}$ et $B = \bigcup_{n\geq 0} B_n$.

[8] Ce qui signifie : $\forall n \geq 0$, $C_{n+1} \subset C_n$ et $C = \bigcap_{n\geq 0} C_n$.

La démonstration repose sur l'encadrement

$$\forall n > k_0, \qquad \sum_{k=k_0}^{n-1} f(k+1) \leq \int_{k_0}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=k_0}^{n-1} f(k)$$

illustré par la figure A.1. Cet encadrement a son intérêt propre pour contrôler le reste

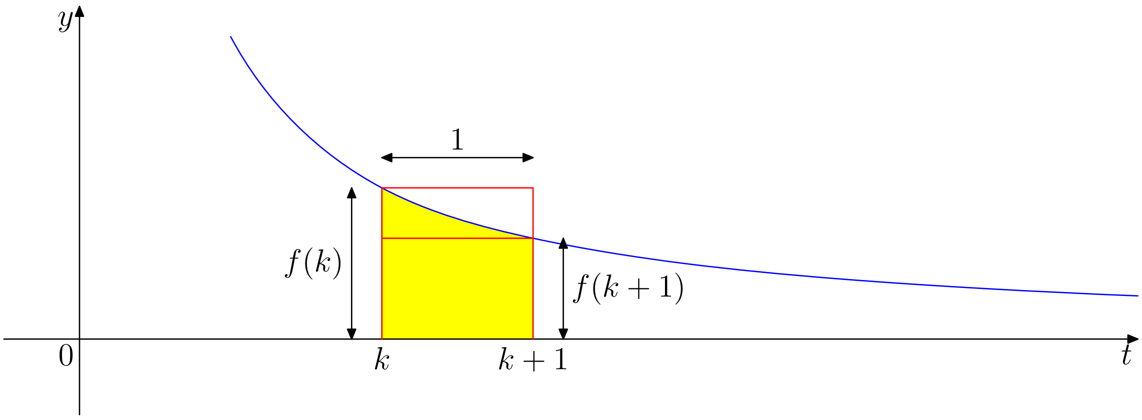

FIG. A.1 – Comparaison série-intégrale : $f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq f(k)$

d'une série à l'aide d'une intégrale généralisée (ou *vice versa*).

En appliquant le théorème A.15 avec $f(t) = t^{-\alpha}$, $\alpha > 0$ et $k_0 = 1$, on obtient la caractérisation de la convergence des séries de Riemann.

Corollaire A.16 (séries de Riemann).

$$\textit{La série} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \textit{ est } \begin{cases} \textit{convergente pour } \alpha > 1, \\ \textit{divergente pour } 0 < \alpha \leq 1. \end{cases}$$

La série est aussi divergente pour $\alpha \leq 0$, puisqu'alors son terme général ne tend pas vers 0.

Corollaire A.17 (séries de Bertrand).

$$\textit{La série} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k(\ln k)^\beta} \textit{ est } \begin{cases} \textit{convergente pour } \beta > 1, \\ \textit{divergente pour } 0 < \beta \leq 1. \end{cases}$$

Remarque A.18. Pour $\alpha \neq 1$ (ou pour $\alpha = 1$ et $\beta \leq 0$), la nature de la série de Bertrand $\sum_{k=2}^{+\infty} k^{-\alpha}(\ln k)^{-\beta}$ s'obtient directement par comparaison avec une série de Riemann.

Théorème A.19 (critère de Cauchy). *La série à termes réels ou complexes* $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ *converge si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n, m \geq N, \quad |S_n - S_m| < \varepsilon.$$

Ce théorème n'est que l'application du critère de Cauchy à la suite des sommes partielles $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

Théorème A.20 (des séries alternées). *Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite alternée (i.e. pour tout k, u_k et u_{k+1} sont de signes contraires) telle que $|u_k|$ décroisse et tende vers 0. Alors*

a) la série $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ converge,

b) pour tout $n \in \mathbb{N}$, les sommes partielles consécutives S_n et S_{n+1} encadrent[9] la somme S et le reste $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ vérifie

$$|R_n| \leq |u_{n+1}|.$$

Exemple A.21. Pour $0 < \alpha \leq 1$, la série $\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k k^{-\alpha}$ converge mais pas absolument. Pour $\alpha > 1$ elle est absolument convergente.

Exemple A.22. La série $\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k/\ln k$ converge mais pas absolument.

Remarque A.23. Même si une série alternée est absolument convergente, le b) du théorème reste intéressant pour le calcul numérique de la somme S.

[9] Attention, une fois sur deux on aura $S_{n+1} \leq S_n$.

Table des matières

Index