Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

L3 **Année 2011**

Probabilités élémentaires
Examen deuxième session, 24 juin 2011 (durée 3 heures)

- Ce sujet comporte **2 pages**.
- Le barème indiqué est là pour vous aider à gérer votre temps et n'a pas valeur contractuelle.
- Documents autorisés : polycopié du cours IPE, polycopié du cours d'ICP.
- La qualité de la rédaction sera un élément important d'appréciation des copies.

Ex 1. *Temps d'attente du deuxième succès (5 points)*

On considère une suite infinie d'épreuves répétées indépendantes. La i-ème épreuve peut donner une réussite (évènement R_i) avec probabilité p ($0 < p < 1$) ou un échec (évènement R_i^c) avec probabilité $q = 1-p$. On note X le numéro (aléatoire) de l'épreuve où l'on observe la *deuxième* réussite.

1) Ecrire les évènements $\{X = 2\}$, $\{X = 3\}$, $\{X = 4\}$ à l'aide des R_i et R_i^c et calculer leurs probabilités respectives.

2) Calculer $P(X = k)$ pour tout entier k.

3) Écrire à l'aide des R_i et R_i^c l'événement « on n'observe jamais de deuxième succès » et montrer que sa probabilité est nulle.

4) Calculer l'espérance de X.

Ex 2. *Un problème de tige brisée (5 points)*

Dans tout l'exercice, X désigne une variable aléatoire à valeurs dans $]0,1[$ et de loi uniforme sur $]0,1[$. On pose

$$Z := \frac{1-X}{X}.$$

1) Calculez explicitement la fonction de répartition de la variable aléatoire positive Z.

2) La loi de Z est-elle à densité ? Si oui, calculez la.

3) Pour quelles valeurs du réel a, la variable aléatoire Z^a est-elle *intégrable* ?

4) Expliquez si possible sans calcul pourquoi Z et $1/Z$ ont *même loi*.

5) On brise une tige de longueur 1 en choisissant au hasard le point de rupture suivant une loi uniforme sur $]0,1[$. On notera X la longueur du morceau gauche. Quelle est la probabilité que l'un des deux morceaux soit plus de deux fois plus long que l'autre ?

Ex 3. *Loi triangulaire (5 points)*

Soit f la fonction affine par morceaux, nulle en dehors de $]0, 2[$, représentée par la figure 1.

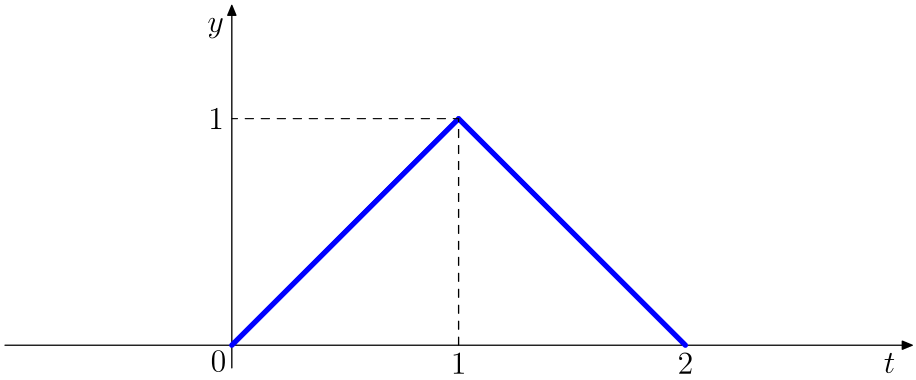

Figure 1 – Densité triangulaire f

1) Vérifiez que f est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.

2) Soit Z une variable aléatoire positive de densité f (on ne vous demande pas d'en justifier l'existence) et F sa fonction de répartition. Donnez *sans calculer d'intégrale* les valeurs de $F(0)$, $F(1/2)$, $F(1)$ et $F(2)$. Expliquez comment vous les obtenez.

3) Calculez $\mathbf{E}Z$ en utilisant f. Le résultat était-il prévisible ?

Ex 4. *Vrai ou faux ? (5 points)*

Pour chacune des 5 affirmations suivantes, indiquez si vous la pensez vraie ou fausse en argumentant votre réponse. Si vous répondez « vrai », proposez une démonstration ou une référence à un résultat du cours. Si vous répondez « faux », il suffit de proposer un contre exemple. Seules les réponses argumentées seront prises en compte par les correcteurs.

1) Si les variables aléatoires X et $-X$ ont même loi, alors $P(X = 0) = 1$.

2) Si la variable aléatoire réelle X a une espérance, alors X est bornée presque sûrement, autrement dit, il existe une constante positive c telle que $P(|X| \leq c) = 1$.

3) Pour chaque variable aléatoire réelle X, il existe un réel $b > 0$ tel que

$$P(|X| \leq b) \geq 0{,}99.$$

4) Si la fonction de répartition F de la variable aléatoire X est dérivable en tout point de $\mathbb{R} \setminus D$, où D est un sous-ensemble fini de $\mathbb{R}$, alors la loi de X admet une densité f qui est la dérivée de F sur $\mathbb{R} \setminus D$.

5) Si H est une fonction de répartition, alors pour toute variable aléatoire réelle X, $\mathbf{E}H(X)$ existe[1] dans $\mathbb{R}$.

1. On admettra que toute fonction croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est mesurable, ce qui assure ici que $H(X)$ est bien une variable aléatoire.