Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

M1-MEFM **Année 2010-11**

Examen, 1er mars 2011, durée 3 heures.

- Ce sujet comporte **4 pages**, dont une table de la loi normale.
- Le barème indiqué est là pour vous aider à gérer votre temps et n'a pas valeur contractuelle.
- Documents autorisés : polycopié du cours IPE, polycopié du cours d'IS ainsi qu'*une feuille* manuscrite recto verso au format A4.
- Calculatrices autorisées.
- La qualité de la rédaction sera un élément important d'appréciation des copies.

Ex 1. *Intervalle de confiance (4 points)*

Dans une verrerie industrielle, une chaîne de production fournit des bouteilles vides. On s'intéresse à la masse moyenne m (en grammes) d'une bouteille produite par cette chaîne. Celle-ci peut s'interpréter comme l'espérance d'une variable aléatoire de loi inconnue. Pour estimer m, on prélève un échantillon de 400 bouteilles que l'on pèse une par une. On obtient ainsi les données numériques x_i ($i = 1 \dots, 400$) où x_i est la masse de la i^{e} bouteille pesée. Pour vous éviter le travail fastidieux d'entrée de ces données dans une calculatrice, on vous fournit les résultats intermédiaires suivants :

$$\sum_{i=1}^{400} x_i = 79\,882 \text{ g}, \qquad \sum_{i=1}^{400} x_i^2 = 15\,963\,824 \text{ g}^2.$$

Proposez un intervalle de confiance au niveau 95% pour m en indiquant clairement les hypothèses faites et les résultats du cours utilisés.

Ex 2. *Surcharge au décollage (6 points)*

Un avion a une charge maximum au décollage (hors kérosène) de 25 tonnes. Il embarque 318 personnes et leurs bagages (équipage compris). La masse X_i du i^{e} individu embarqué est une v.a. d'espérance 65 kg et d'écart-type 10 kg. La masse de ses bagages est une v.a. Y_i d'espérance 12 kg et d'écart-type 2 kg.

1) Évaluez la probabilité d'une surcharge au décollage en précisant les hypothèses d'indépendance que vous serez amenés à utiliser.

2) On rappele que la somme de deux v.a. indépendantes Z_1 et Z_2 de lois gaussiennes respectives $\mathfrak{N}(m_1, \sigma_1)$ et $\mathfrak{N}(m_2, \sigma_2)$ est encore une v.a. gaussienne. Déterminez les paramètres de $Z_1 + Z_2$.

3) La charge maximale de 25 tonnes a été déterminée en tenant compte d'une masse volumique moyenne du kérosène de 0,8 kg/l. En réalité la masse volumique du kérosène peut varier entre 0,755 kg/l et 0,845 kg/l. Du fait des avitaillements [1] successifs d'un aéroport à l'autre, il est impossible de prévoir assez à l'avance la masse volumique du kérosène embarqué pour un vol donné. On est donc amené à modéliser cette masse volumique par une variable aléatoire gaussienne d'espérance 0,8 kg/l et d'écart-type 0,011 kg/l. Commentez ce choix.

4) Les données techniques concernant l'avion sont les suivantes. Masse maximale au décollage 269 tonnes, masse à vide 120 tonnes, volume des réservoirs de kérosène 152 500 litres. En supposant que la densité du kérosène et la masse des personnes embarquées et de leurs bagages sont indépendantes, recalculez la probabilité de surcharge au décollage.

Ex 3. *Estimation du paramètre d'une loi exponentielle (10 points)*

1) Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle $\operatorname{Exp}(\theta)$, de densité $f_\theta : x \mapsto \theta e^{-\theta x}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$, où $\theta \in]0, +\infty[$. Vérifiez que

$$\mathbf{E}X = \frac{1}{\theta}, \qquad \operatorname{Var} X = \frac{1}{\theta^2}.$$

2) On se propose d'estimer le paramètre $\theta > 0$ d'une loi exponentielle $\operatorname{Exp}(\theta)$, au vu d'un échantillon $X_1, \dots, X_n$ de grande taille. Plus précisément, on considère que les X_i sont des variables aléatoires *strictement* positives, définies sur un modèle statistique $(\Omega, \mathcal{F}, (P_\theta)_{\theta\in]0,+\infty[})$ et sont pour tout $\theta \in]0, +\infty[$, P_θ-indépendantes et de même loi $\operatorname{Exp}(\theta)$ sous P_θ. On pose pour tout $n \geqslant 1$,

$$S_n := \sum_{i=1}^{n} X_i \quad \text{et} \quad T_n := \frac{n}{S_n}.$$

Montrez que T_n est un estimateur fortement consistant de θ.

3) T_n est-il sans biais ? Vous pouvez justifiez votre réponse en examinant le cas $n = 1$.

4) Justifiez la convergence suivante, où Z désigne une v.a. gaussienne de loi $\mathfrak{N}(0, 1)$:

$$\frac{\theta S_n - n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{loi}} Z. \tag{1}$$

5) En déduire un intervalle de confiance pour θ au niveau de confiance 0,95, en négligeant l'erreur due à l'approximation gaussienne. Application numérique avec $n = 400$ et $S_{400}(\omega) = 1\,460$.

6) Sur le même modèle statistique $(\Omega, \mathcal{F}, (P_\theta)_{\theta\in]0,+\infty[})$, on cherche à estimer le paramètre θ de la loi de densité

$$g_\theta : x \longmapsto \frac{\theta}{(1+x)^{1+\theta}}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x).$$

1. Avitaillement : approvisionnement d'un navire en vivres et en matériel, ravitaillement d'un avion en carburant.

Pour cela on observe une suite $(Y_i)_{i\geqslant 1}$ de variables aléatoires strictement positives, qui sont pour tout $\theta > 0$, P_θ-indépendantes et de même loi de densité g_θ sous P_θ. Montrez que

$$\widehat{\theta}_n := \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln(1+Y_i)}$$

est l'estimateur par maximum de vraisemblance de θ.

7) Vérifiez par un calcul d'intégrale que si la v.a. strictement positive Y a pour densité g_θ,

$$\forall y \geqslant 0, \quad P\bigl(\ln(1+Y) > y\bigr) = \mathrm{e}^{-\theta y}.$$

En déduire la loi de la v.a. positive $\ln(1+Y)$.

8) En vous appuyant sur les questions 2)–4), donnez quelques propriétés de $\widehat{\theta}_n$.

Table des valeurs de Φ, f.d.r. de la loi normale standard $\mathfrak{N}(0,1)$ sur l'intervalle $[1,3]$

$$\Phi(x) = P(Z \leqslant x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(\frac{-t^2}{2}\right) \mathrm{d}t, \quad Z \sim \mathfrak{N}(0,1).$$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5754
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6627	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7122	0.7156	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7356	0.7389	0.7421	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7703	0.7734	0.7764	0.7793	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8079	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8414	0.8438	0.8461	0,8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8622
1.1	0.8643	0.8665	0.8687	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0,8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9083	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9193	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9485	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9648	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9874	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9895	0.9898	0.9901	0.9903	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9924	0.9926	0.9928	0.9930	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9944	0.9946	0.9948	0.9949	0,9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9958	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986