Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

L3 **Année 2011**

Probabilités élémentaires
D.S. du 28 mai 2011 (durée 3 heures)

- Ce sujet comporte **3 pages**.
- Le barème indiqué est là pour vous aider à gérer votre temps et n'a pas valeur contractuelle.
- Documents autorisés : polycopié du cours IPE, polycopié du cours d'ICP.
- Calculatrices autorisées.
- La qualité de la rédaction sera un élément important d'appréciation des copies.

Ex 1. *Intégrabilité (2 points)*

Soit X une variable aléatoire réelle de fonction de répartition F. Démontrez que X est intégrable si et seulement si l'intégrale de Riemann généralisée $\int_{-\infty}^{\infty} F(t)(1-F(t))\,\mathrm{d}t$ converge dans $\mathbb{R}_+$.

Ex 2. *Consommation d'eau (7 points)*

La consommation journalière en eau d'une agglomération au cours du mois de juillet est une variable aléatoire X dont la densité f a la forme :

$$f(t) = c(t-a)(b-t)\mathbf{1}_{[a,b]}(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

où a, b, c sont des constantes strictement positives ($a < b$).

1) Vérifier que l'on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_a^b (t-a)^n(b-t)\,\mathrm{d}t = \frac{(b-a)^{n+2}}{(n+1)(n+2)}.$$

2) Exprimer la constante c en fonction de a et b.

3) Calculer $\mathbf{E}(X-a)$ et $\mathbf{E}\Big[(X-a)^2\Big]$. En déduire $\mathbf{E}X$ et $\operatorname{Var} X$.

4) Donner la fonction de répartition F de la variable aléatoire X : on distinguera pour le calcul de $F(x)$ les cas $x < a$, $a \leq x \leq b$ et $x > b$ et, dans le deuxième cas, on écrira $F(x)$ en fonction de $(x-a)$ et $(b-x)$ sans développer ni réduire le polynôme obtenu. Donner l'allure des représentations graphiques de f et F. Proposer une interprétation physique des constantes a et b.

Ex 3. *Franchise et plafond (5 points)*

En cas d'incendie d'un certain type de logement, la loi du coût X des « dommages aux biens » a une fonction de survie G de la forme

$$\forall t \geq 0, \quad G(t) := P(X > t) = \frac{1}{(1+t)^a},$$

où a est un paramètre positif.

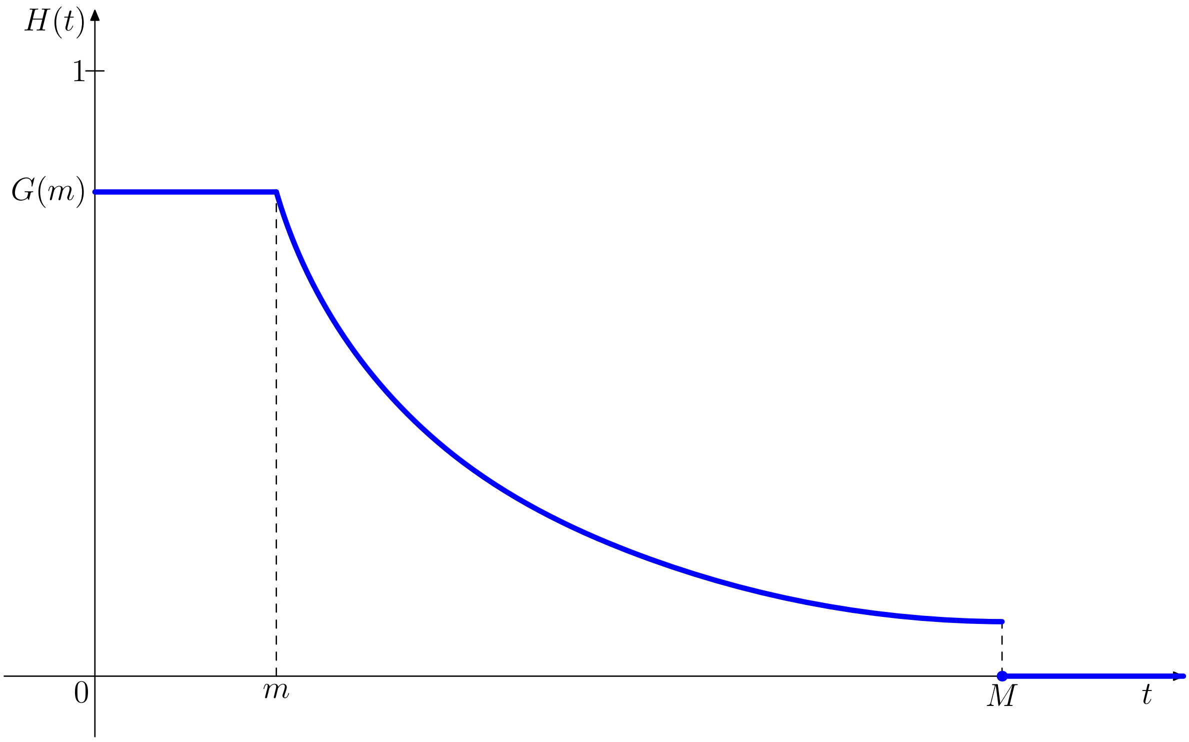

FIGURE 1 – Fonction de survie H de la v.a. positive Y

Une compagnie d'assurances propose la couverture de ce risque « dommages aux biens », par un contrat qui prévoit une franchise m et un plafond M. La franchise est destinée à éviter les déclarations de petits sinistres et ainsi à économiser sur les frais de gestion. Le plafond M limite la responsabilité de la compagnie. Notons Y le remboursement perçu par l'assuré en cas d'incendie. La règle franchise-plafond nous permet d'écrire [1]

$$\forall \omega \in \Omega, \quad Y(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } X(\omega) \leq m, \\ X(\omega) & \text{si } m < X(\omega) \leq M, \\ M & \text{si } X(\omega) > M. \end{cases}$$

1. Pour simplifier, on suppose que le seul but de la franchise est d'éviter les déclarations de petits sinistres. Donc quand l'assuré est remboursé, on ne déduit pas m de son remboursement.

On note $H : [0,+\infty[\to [0,1]$, $t \mapsto H(t) := P(Y > t)$ la fonction de survie de Y. Sa représentation graphique est esquissée à la figure 1.

1) Justifiez cette représentation graphique en exprimant $H(t)$ à l'aide de G dans les trois cas $0 \leq t < m$, $m \leq t < M$ et $t \geq M$.

2) La loi de la variable aléatoire positive Y est-elle à densité ?

3) Calculer $\mathbf{E}Y$ en fonction de m, M et a.

Ex 4. *Une v.a. série (8 points)*

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé sur lequel existe une suite $(A_k)_{k\geq 1}$ d'évènements indépendants et de même probabilité $p \in]0,1[$. On pose

$$X := \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\mathbf{1}_{A_k}}{3^k}.$$

1) Expliquez pourquoi cette formule définit une variable aléatoire positive et bornée.

2) Calculez $\mathbf{E}X$ en donnant les justifications utiles.

3) On se propose dans tout ce qui suit de montrer que X a une fonction de répartition continue, ce qui revient à montrer que $P(X = x)$ vaut zéro pour tout $x \in \mathbb{R}$ (pourquoi ?). On introduit à cet effet l'ensemble :

$$D := \left\{ x \in \mathbb{R};\ \exists (c_k)_{k\geq 1} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}^*}, \quad x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{c_k}{3^k} \right\},$$

autrement dit, D est l'ensemble des valeurs prises par $X(\omega)$ pour $\omega \in \Omega$. Que vaut $P(X = x)$ pour $x \notin D$?

4) Vérifiez l'inégalité *stricte* :

$$\forall n \geq 1, \quad \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{3^k} < \frac{1}{3^n}. \tag{1}$$

5) L'inégalité (1) permet de démontrer *l'unicité* de la suite binaire $(c_k)_{k\geq 1}$ dans la représentation d'un $x \in D$. Pour le voir, raisonnez par l'absurde en supposant qu'il existe deux suites binaires $(b_k)_{k\geq 1}$ et $(c_k)_{k\geq 1}$ distinctes telles que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{b_k}{3^k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{c_k}{3^k},$$

notez n le plus petit entier i tel que $b_i \neq c_i$ et remarquez que pour tout k, $|b_k - c_k|$ a un majorant simple, …

6) En utilisant l'unicité établie ci-dessus, montrez que pour $x \in D$, $\{X = x\}$ peut s'écrire $\bigcap_{k\in\mathbb{N}^*} B_k$, les évènements B_k étant indépendants. Trouvez une constante $r \in]0,1[$ telle que pour tout $k \geq 1$, $P(B_k) \leq r$. En déduire *proprement* que $P(X = x) = 0$.