Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

L3 **Année 2011**

Probabilités élémentaires
D.S. du 22 mars 2011 (durée 2 heures)

- Ce sujet comporte **2 pages**.
- Le barème indiqué est là pour vous aider à gérer votre temps et n'a pas valeur contractuelle.
- Documents autorisés : polycopié du cours IPE, polycopié du cours d'ICP.
- Calculatrices autorisées.
- La qualité de la rédaction sera un élément important d'appréciation des copies.

Ex 1. *Échauffement (2 points)*

Sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, on considère une suite $(A_n)_{n\geq 1}$ d'évènements de probabilité 1. Que peut-on dire de $P(\cap_{n\geq 1} A_n)$? Seules les réponses clairement justifiées seront prises en compte.

Ex 2. *La piscine (11 points)*

Dans le vestiaire d'une piscine, chaque nageur range ses vêtements sur un cintre. Il le dépose au guichet où un employé équipe le cintre d'un bracelet rouge numéroté et remet au nageur un bracelet jaune portant le même numéro. Ainsi, à la fin de la séance, le nageur peut récupérer ses affaires en échange du bracelet. Avant l'ouverture au public, les bracelets sont rangés sur un tableau à N crochets supportant chacun un bracelet rouge et un jaune de même numéro [1].

Deux gamins turbulents s'introduisent dans le vestiaire avant l'ouverture. En se battant ils renversent le tableau portant les bracelets. Pour ne pas être découverts, ils les remettent en place en prenant bien soin de placer sur chaque crochet un bracelet jaune et un rouge, mais sans tenir compte des numéros.

A l'ouverture, N nageurs se présentent et devant l'affluence, l'employé remet à chacun son bracelet jaune sans prendre le temps de vérifier les numéros. On se propose de calculer les probabilités des événements :

$$E_{N,k} = \{\text{exactement } k \text{ nageurs retrouvent leurs affaires}\}.$$

On choisit comme espace probabilisé Ω_N ensemble des toutes les permutations (i.e. bijections) sur $\{1, \dots, N\}$ muni de l'équiprobabilité P_N. On notera :

$$B_i = \{\text{le } i\text{-ème nageur retrouve ses affaires}\}.$$

1. Toute ressemblance avec une piscine proche du campus ne serait pas forcément aléatoire.

1) Pour $j \leq N$ et $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_j \leq N$, calculer $P_N(B_{i_1} \cap \cdots \cap B_{i_j})$. En déduire :

$$\sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_j} P_N(B_{i_1} \cap \cdots \cap B_{i_j}) = \frac{1}{j!}.$$

2) Calculer $P_N(E_{N,0})$.

3) On fixe k nageurs retrouvant leurs affaires. Exprimer à l'aide de $P_{N-k}(E_{N-k,0})$ le *nombre* de permutations des $N-k$ autres nageurs telles qu'aucun d'eux ne retrouve ses affaires. En déduire la valeur de $P_N(E_{N,k})$.

4) Pour k fixé, calculer : $p_k = \lim_{N\to\infty} P_N(E_{N,k})$. Montrer que la suite $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définit une probabilité P sur $\mathbb{N}$ (il s'agit d'une loi de Poisson).

5) Montrer que :

$$\forall k \in \{0, \dots, N\}, \qquad |P_N(E_{N,k}) - p_k| < \frac{1}{k!\,(N+1-k)!}.$$

En déduire :

$$\forall n \in \{0, \dots, N\}, \qquad \sum_{j=0}^{n} |P_N(E_{N,j}) - p_j| \leq \frac{\mathrm{e}}{(N+1-n)!}.$$

6) *Application* : après avoir vérifié que : $0{,}999\,4 < \sum_{j=0}^{5} p_j < 0{,}999\,5$, donner pour $N \geq 12$ quelconque des valeurs numériques approchées à 10^{-4} près des $P_N(E_{N,j})$ pour $j = 0, 1, \dots 5$ (ces valeurs ne dépendent pas de N). Même question pour la probabilité qu'au moins 6 nageurs retrouvent leurs affaires.

Ex 3. *Pile ou face triphasé (7 points)*

Trois personnes nommées A, B, C lancent à tour de rôle la même pièce de monnaie (ABCABCABC...). La probabilité d'obtenir pile lors d'un lancer est p $(0 < p < 1)$. Le gagnant est le premier qui obtient pile (la partie *s'arrête* alors).

1) On note A_n (resp. B_n, C_n) l'événement *A gagne la partie lors du n-ième lancer* (resp. B, C). Calculer $P(A_1)$, $P(B_2)$, $P(C_3)$. Les événements A_1 et B_2 sont-ils indépendants ?

2) En discutant suivant les valeurs de n, calculer $P(A_n)$, $P(B_n)$, $P(C_n)$.

3) Calculer la probabilité de gagner de chacun des trois joueurs.

4) Quelle est la probabilité qu'il y ait un vainqueur ? Conclure.