U.F.R. de Mathématiques
Licence de Mathématiques
S6, M66, année 2013-2014

Probabilités M66
D.S. du 28 mars 2014 (durée 2 heures)

- Ce sujet comporte **3 pages**.
- Le barème indiqué est là pour vous aider à gérer votre temps et n'a pas valeur contractuelle.
- Documents autorisés : polycopiés du cours.
- Calculatrices autorisées.
- La qualité de la rédaction sera un élément important d'appréciation des copies.

Ex 1. *Interprétation du graphique d'une fonction de survie (6 points)*

La variable aléatoire X a pour fonction de survie $G : t \mapsto G(t) = P(X > t)$ représentée figure 1.

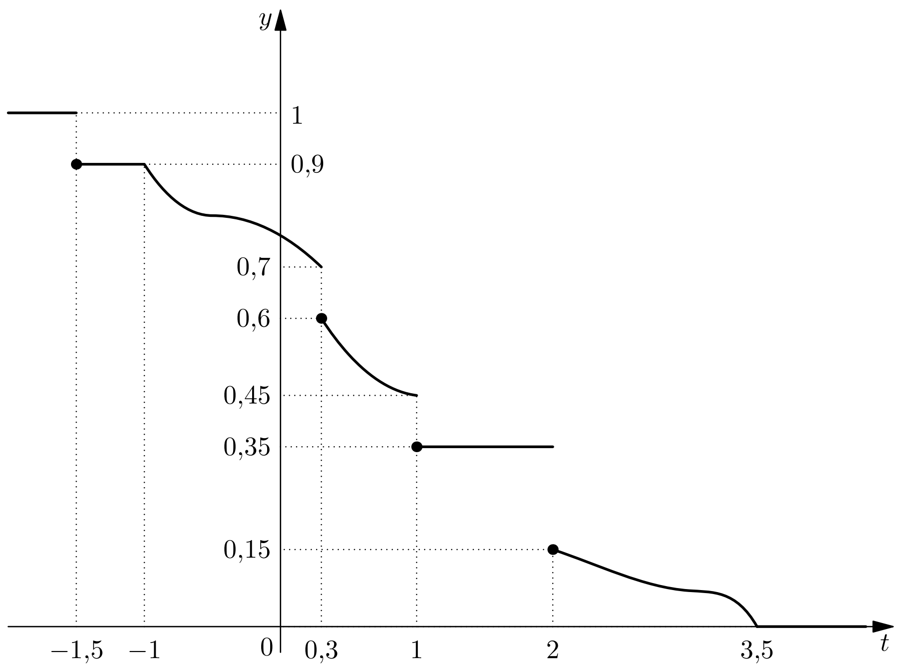

FIGURE 1 – Fonction de survie G de la v.a. X

1) Reproduire sur votre copie le tableau suivant et le compléter en exploitant les informations fournies par ce graphique. Vous pourrez donner les justifications qui vous

paraîtront pertinentes en vous référant au numero de question dans le tableau.

n^o	Question	Réponse	n^o	Question	Réponse
1	$P(X \leqslant -1) = ?$		2	$P(X = -1{,}5) = ?$	
3	$P(X = 0{,}35) = ?$		4	$P(X \geqslant 0{,}3) = ?$	
5	$P(X > 2) = ?$		6	$P(X \in [1; 1{,}9]) = ?$	
7	$P(X \in]1; 2]) = ?$		8	$P(\lvert X\rvert > 1) = ?$	

2) La variable aléatoire X est-elle à densité ?

3) La variable aléatoire X est-elle discrète ?

4) La variable aléatoire X est-elle intégrable ?

Ex 2. *Partie fractionnaire de l'inverse (6 points)*

On note $[x]$ la partie entière du réel x, autrement dit $[x]$ est l'unique entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leqslant x < n + 1$. Soit f la fonction :

$$f : x \longmapsto \frac{1}{(1+x)\ln 2}\mathbf{1}_{]0,1[}(x).$$

1) Vérifier que f est une densité de probabilité. Expliciter la fonction de répartition associée.

2) Soit X une variable aléatoire réelle dont la loi a pour densité f. Calculer :

$$P\Big(k \leqslant \frac{1}{X} \leqslant k+t\Big) \qquad k \in \mathbb{N}^*,\ t \in]0,1[$$

3) Soit $Y = \frac{1}{X} - \left[\frac{1}{X}\right]$. Montrer que Y est une variable aléatoire réelle de même loi que X. *Indication* : calculer sa fonction de répartition.

4) Que peut-on dire de $\mathbf{E}Y$?

Ex 3. *Sur la « loi du tiers » (8 points)*

Sur `http://www.pronostic-sportif-gratuit.com/casino/loi-du-tiers.php`, on peut lire ce qui suit [1].

> *« Cette loi est sans doute la plus importante, car elle se vérifie de manière constante sur des cycles à court terme. Les numéros de la Roulette sont au nombre de 37, Zéro inclus. La probabilité nous indique ceci : à chaque coup, chacun de ces numéros a très exactement 1 chance sur 37 de sortir.*
>
> *« En toute logique, et si la probabilité s'appliquait de manière parfaite, chaque numéro devrait sortir une fois en 37 coups. De telle manière que, en 37 coups, nous devrions assister à la sortie de tous les numéros. S'il en était ainsi, il suffirait de choisir un numéro, et de le jouer avec une simple montante (augmentation de la mise après chaque coup perdant, ou après chaque série*

1. À la date du 19 mars 2014.

de x coups perdants), pour gagner très vite des sommes importantes à la Roulette. Or, ce n'est pas le cas.

« Bien que la probabilité de sortie de chaque numéro en 37 boules soit de 1 chance sur 37, les 37 numéros de la roulette n'apparaissent pas tous au cours d'un cycle de 37 boules. Environ 12 numéros (1/3) sortent plusieurs fois, environ 12 autres numéros (1/3) sortent une seule fois, et environ 12 autres numéros encore (1/3) ne sortent pas du tout. C'est cette particularité qui a donné son nom à cette loi. »

Bien sûr, en tant qu'étudiants suivant un cours de probabilités de niveau L3, vous avez déjà remarqué que la phrase « En toute logique, et si la probabilité s'appliquait de manière parfaite, chaque numéro devrait sortir une fois en 37 coups. » révèle une incompréhension de la théorie des probabilités. Mais cette critique ne condamne pas forcément la loi du tiers que de nombreux joueurs pensent validée par de longues séries d'observations. Le but de cet exercice est d'essayer d'y voir plus clair sur ce sujet. On se limitera à la question des numéros qui ne sortent pas du tout. Pour cela, on va généraliser le problème en considérant une suite de n tirages avec remise d'une boule dans une urne contenant exactement n boules numérotées de 1 à n. La roulette correspond au cas $n = 37$ (avec un décalage d'une unité sur la numérotation).

1) Quelle est la probabilité qu'en n tirages, chacun des numéros possibles sorte exactement une fois ? Application numérique avec $n = 6$, puis $n = 37$. Commentez le résultat.

Dans la suite, étant donné n fixé, on note X_i le nombre d'apparitions de la boule n° i en n tirages.

2) Quelle est la loi de X_i ?

3) Les X_i sont-elles indépendantes ?

4) Quelle est la loi du vecteur aléatoire $(X_1, \dots, X_n)$?

On considère maintenant la variable aléatoire

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{\{X_i=0\}}.$$

5) Que représente S_n ?

6) Calculez $\mathbf{E}\left(\frac{S_n}{n}\right)$. Quelle est sa limite quand n tend vers l'infini ? Que vaut cette espérance pour $n = 37$?

7) Commentez le résultat de la question précédente en le comparant à la « loi du tiers ». On vous suggère d'utiliser la version suivante de la loi forte des grands nombres (admise) : si $(Y_j)_{j\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi et bornées,

$$P\left(\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} Y_j = \mathbf{E}Y_1\right) = 1.$$