Devoir Surveillé, 5 avril 2014
Durée 2 heures

– Ce sujet comporte **2 pages**.
– Le barème indiqué est là pour vous aider à gérer votre temps et n'a pas valeur contractuelle.
– Documents autorisés : polycopié du cours chapitres 1 à 4.
– Calculatrices non autorisées.
– La qualité de la rédaction sera un élément important d'appréciation des copies.

Ex 1. *Deux séries numériques (3 points)*

1) La série $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^2+13}{k^4+3k+2}$ est-elle convergente ?

2) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_k = 3k + \cos k$. Montrer que la suite $(v_k)_{k\geqslant 1}$ est croissante dans $\mathbb{R}_+$.

3) La série $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{3k+\cos k}$ est-elle convergente ? absolument convergente ?

Ex 2. *Une série entière (3 points)*

On considère la série entière $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \left(2^k + k\right) z^k$.

1) Déterminer son rayon de convergence R.

2) Calculer sa somme pour $z \in D(0, R)$, où $D(0, R)$ désigne le disque ouvert de centre 0 et de rayon R du plan complexe.

Ex 3. *Série de Fourier (7 points)*

Soit f la fonction 2π-périodique telle que pour tout $x \in [0, 2\pi[$, $f(x) = x^2$.

1) Dessiner la représentation graphique de f sur $[-4\pi, 4\pi[$.

Les deux questions suivantes proposent une méthode pour calculer les coefficients de Fourier $a_k(f)$ et $b_k(f)$ de f. Les étudiants souhaitant arriver au même but en utilisant une autre méthode pourront le faire sans être pénalisés dans la mesure où ils auront su la mettre en oeuvre correctement.

2) On cherche une *primitive* de la fonction $x \mapsto x^2 e^{-ikx}$ sous la forme $x \mapsto P(x)e^{-ikx}$, où P est un polynôme du second degré $P(x) = Ax^2 + Bx + C$. Déterminez les coefficients A, B, C par identification.

3) En déduire les coefficients

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{e}^{-ikt}\,\mathrm{d}t, \quad k \in \mathbb{Z}^*,$$

puis les coefficients de Fourier $a_k(f)$ et $b_k(f)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$. Écrire la série de Fourier $S(f,x)$ de f.

4) Pour quelles valeurs de x cette série converge-t-elle ? Pour quelles valeurs de x a-t-on $S(f,x) = f(x)$?

5) Utiliser ce qui précède pour trouver la valeur explicite de $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

6) Utiliser l'identité de Parseval pour calculer

$$S = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k^4} + \frac{\pi^2}{k^2}\right).$$

Ex 4. *Roulette russe (7 points)*

Cet exercice traite d'une simulation indolore du duel entre deux adversaires selon la règle de la « roulette russe ». X et Y s'affrontent selon la procédure suivante. X commence et jette un dé équilibré. Si le dé indique le chiffre 3, X a perdu et le duel s'arrête. Sinon Y jette le même dé et perd s'il indique le trois. Sinon X relance le dé et ainsi de suite ... Le perdant est le premier qui obtient le chiffre trois. On se propose de déterminer la probabilité de perdre pour chacun des deux adversaires. On notera

$$A = \{X \text{ perd le duel}\}, \quad B = \{Y \text{ perd le duel}\}$$

et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$D_k = \{\text{première apparition du 3 lors du lancer n}^{\text{o}}\ k\}.$$

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note C_n l'évènement « lors des n premiers lancers du dé, le 3 n'apparaît pas ». Calculer $P(C_n)$. On note C l'évènement « le duel n'a pas de fin ». En remarquant que $C \subset C_n$, en déduire la valeur de $P(C)$.

2) Donner la valeur de $P(D_k)$ pour chaque $k \in \mathbb{N}^*$. Calculer la somme de la série $\sum_{k=1}^{+\infty} P(D_k)$ et retrouver ainsi la valeur de $P(C)$.

3) Exprimer A comme union dénombrable de certains des évènements de la suite $(D_k)_{k\geqslant 1}$.

4) Calculer $P(A)$, puis $P(B)$.

5) Exprimer $P(A)$ en fonction de $P(D_1)$ et de $P(A \mid D_1^c)$.

6) Expliquer sans calcul l'égalité $P(A \mid D_1^c) = P(B)$.

7) En déduire à nouveau, sans calcul de série, la valeur de $P(A)$.