Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

M1-MEFM **Année 2010**

Examen, 10 novembre 2010, durée 3 heures.

- Ce sujet comporte **4 pages**, dont un fragment de table de la loi normale.
- Le barème indiqué est là pour vous aider à gérer votre temps et n'a pas valeur contractuelle.
- Documents autorisés : polycopié du cours IPE, polycopié du cours d'IS.
- Calculatrices autorisées.
- La qualité de la rédaction sera un élément important d'appréciation des copies.

Ex 1. *Ball trap (7 points)*

Si A est un événement, la variable aléatoire indicatrice de A est sur Ω par :

$$\mathbf{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Autrement dit, $\mathbf{1}_A$ vaut 1 si A est réalisé et 0 sinon.

Soit $(A_i)_{i\geq 1}$ une suite d'événements *indépendants*. On note $p_i = P(A_i)$ et on suppose que :

$$a := \sum_{i=1}^{+\infty} p_i < +\infty.$$

Le but de cet exercice est de prouver l'inégalité

$$\forall n, k \in \mathbb{N}^*, \quad P\Bigl(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{A_i} \geq k\Bigr) \leq \frac{a^k}{k!}.$$

La dernière question propose une application de cette inégalité.

1) Que peut-on dire du cas $k > n$? On suppose dans la suite $k \leq n$.

2) On note $B_{n,k} := \{\omega \in \Omega;\ \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{A_i}(\omega) \geq k\}$. Justifier l'inclusion

$$B_{n,k} \subset \bigcup_{\substack{F\subset\{1,\dots,n\} \\ \operatorname{card} F = k}} \bigcap_{i\in F} A_i.$$

3) En déduire que

$$P(B_{n,k}) \leq \sum_{\substack{F\subset\{1,\dots,n\} \\ \operatorname{card} F = k}} \prod_{i\in F} p_i.$$

4) On note $a_n = \sum_{i=1}^n p_i$. Montrer que

$$a_n^k \geq k! \sum_{\substack{F \subset \{1,\dots,n\} \\ \operatorname{card} F = k}} \prod_{i \in F} p_i.$$

Indication : On remarquera que

$$a_n^k = \sum_{(i_1,\dots,i_k) \in \{1,\dots,n\}^k} p_{i_1} \cdots p_{i_k}.$$

5) Conclure.

6) *Application à un problème de tir.* Dans un stand de tir, une cible mobile traverse le champ visuel d'un tireur (une traversée par épreuve). À chaque épreuve, le tireur tire un coup sur la cible. D'une épreuve à la suivante, la vitesse de la cible augmente de 20%. On suppose que pour un tireur donné, la probabilité de toucher la cible est *inversement proportionnelle* à la vitesse de la cible. Elle vaut ainsi $p \in]0, 1[$ pour le premier tir, $\frac{5}{6}p$ pour le second (pourquoi ?), etc. Les tirs sont supposés indépendants, le tireur dispose d'autant de cartouches qu'il le souhaite et le défi qu'il doit relever est celui de toucher au moins 20 fois la cible. En utilisant le résultat démontré ci-dessus, majorer sa probabilité de réussir (indépendamment de p).

Ex 2. *Calibrage de pommes (6 points)*

Une coopérative agricole a un contrat de fourniture de pommes de catégorie A, c'est-à-dire dont le diamètre en mm est dans l'intervalle $[67, 73]$. Le gérant de la coopérative a besoin d'évaluer rapidement[1] la proportion p de pommes *hors catégorie* A dans la récolte qu'il vient d'emmagasiner. Pour cela, il prélève au hasard un échantillon de 400 pommes dont une calibreuse mécanique lui permet d'enregistrer les diamètres. Les données relevées sont présentées dans le tableau suivant.

66	68	71	66	68	70	71	69	65	70	70	73	68	75	69	65	69	69	70	73
70	65	69	74	71	71	72	69	67	71	68	68	70	67	70	66	69	66	67	71
69	67	74	72	71	67	69	67	68	72	68	72	67	65	70	72	73	69	68	66
66	73	71	66	64	68	62	71	72	67	71	68	68	73	67	71	69	70	73	70
71	67	72	68	72	62	72	71	70	72	69	71	67	68	69	72	66	69	73	62
72	66	69	71	75	71	70	67	69	69	72	73	66	70	70	69	68	70	69	61
69	69	69	71	70	69	70	69	67	68	69	69	67	66	70	67	71	68	70	68
67	68	72	68	74	68	76	71	69	70	73	71	68	71	70	73	72	72	66	66
72	65	66	69	67	69	76	76	69	66	69	65	72	67	74	68	67	67	69	68
71	70	72	67	72	67	68	69	70	69	70	69	74	72	74	68	69	69	69	73
71	70	68	67	73	69	68	72	72	65	66	67	72	69	69	72	70	70	66	71
72	70	70	72	68	73	70	67	69	71	70	67	71	72	67	70	69	65	65	70
71	73	66	67	65	69	69	73	71	72	67	68	68	71	68	67	70	72	68	68
69	68	64	69	65	70	68	70	67	67	70	72	69	72	71	66	68	71	68	65
73	68	74	76	74	67	71	72	70	66	72	67	73	68	74	65	69	71	70	71
73	66	71	68	70	70	63	69	70	69	73	69	73	71	69	70	68	65	70	68
70	71	71	68	72	71	72	70	66	71	68	69	72	65	68	67	71	68	72	70
68	71	74	72	71	66	69	71	71	68	68	65	73	70	68	77	61	73	68	70
68	71	72	69	69	65	70	67	72	71	72	69	67	75	71	71	69	67	72	67
68	68	70	67	71	67	69	68	70	65	70	70	69	71	70	66	70	75	72	74

1. Avant de lancer l'opération de calibrage et d'emballage.

Proposez deux intervalles de confiance pour p au niveau 95% en expliquant comment vous les avez obtenus et en indiquant les théorèmes qui les justifient.

Ex 3. *Transformée de Laplace (7 points)*

La transformée de Laplace d'une variable aléatoire positive X est la fonction L_X définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad L_X(t) = \mathbf{E}\exp(-tX).$$

Clairement L_X ne dépend que de la loi de X. On parlera donc aussi bien de la transformée de Laplace d'une variable que de sa loi.

1) Expliquez pourquoi cette définition a toujours un sens et calculez la transformée de Laplace d'une loi de Bernoulli de paramètre p.

2) Vérifiez que L_X est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

3) Vérifiez que L_X est convexe sur $\mathbb{R}_+$ (on rappelle que f est convexe sur $\mathbb{R}_+$ si pour tout $u \in [0, 1]$, et tous $s, t \in \mathbb{R}_+$, $f(us + (1-u)t) \leq uf(s) + (1-u)f(t)$).

4) Cette convexité de L_X sur $\mathbb{R}_+$ implique sa continuité sur $]0, +\infty[$. Pour montrer la continuité de L_X au point 0, il suffit compte-tenu de la monotonie de L_X de montrer que $L_X(1/n)$ tend vers $L_X(0) = 1$ quand n tend vers $+\infty$. Justifiez cette convergence, par exemple à l'aide du théorème de B. Levi.

5) Vérifiez que la suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n\geq 1}$ définies par $Y_n = \exp(-nX)$ tend en décroissant vers $\mathbf{1}_{\{X=0\}}$. Utilisez ceci pour trouver la limite quand n tend vers l'infini de $L_X(n)$.

6) Que peut-on dire de L_{X+Y} lorsque X et Y sont des variables aléatoires positives indépendantes ?

7) Proposez un estimateur fortement consistant de $L_X(t)$, basé sur un échantillon $X_1, \ldots, X_n$ de variables aléatoires indépendantes de même loi (inconnue) que X.

Table des valeurs de Φ, f.d.r. de la loi normale standard $\mathfrak{N}(0,1)$ sur l'intervalle $[1,3]$

$$\Phi(x) = P(Z \leq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(\frac{-t^2}{2}\right) \mathrm{d}t, \quad Z \sim \mathfrak{N}(0,1).$$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.0	0.8414	0.8438	0.8461	0,8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8622
1.1	0.8643	0.8665	0.8687	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0,8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9083	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9193	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9485	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9648	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9874	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9895	0.9898	0.9901	0.9903	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9924	0.9926	0.9928	0.9930	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9944	0.9946	0.9948	0.9949	0,9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9958	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986