Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

CAPES-M2 **Année 2010-2011**

Préparation écrit 2010, corrigé des exercices de la fiche n° 3

Ex 1.

Soit X une variable aléatoire discrète dont l'ensemble des valeurs est $X(\Omega) = \{x_k; k \in \mathbb{N}\}$, où $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante de réels positifs. Vérifiez la formule :

$$\sum_{j=0}^{+\infty} x_j P(X = x_j) = x_0 + \sum_{k=0}^{+\infty} (x_{k+1} - x_k) P(X > x_k). \tag{1}$$

Que pouvez dire sans l'hypothèse de positivité des x_k ?

Voici une preuve de (1) basée sur les propriétés sympathiques des séries doubles à termes *positifs*, notamment l'interversion toujours licite des sommations. En effet, si les $a_{j,k}$ sont des réels positifs, on a toujours

$$\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} a_{j,k} = \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} a_{j,k}, \tag{2}$$

égalité dans $\overline{\mathbb{R}_+}$. On commence par noter qu'en raison de la croissance stricte de la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, l'évènement $\{X > x_k\}$ est l'union disjointe des $\{X = x_j\}$ pour $j > k$. On en déduit

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{+\infty} (x_{k+1} - x_k) P(X > x_k) &= \sum_{k=0}^{+\infty} (x_{k+1} - x_k) \sum_{j>k} P(X = x_j) \quad (\sigma\text{-additivité de } P) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} (x_{k+1} - x_k) \mathbf{1}_{]k,+\infty[}(j) P(X = x_j) \\
&= \sum_{j=0}^{+\infty} P(X = x_j) \sum_{k=0}^{+\infty} (x_{k+1} - x_k) \mathbf{1}_{[0,j[}(k) \quad (\text{voir } (2)).
\end{aligned}$$

On remarque ensuite que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (x_{k+1} - x_k) \mathbf{1}_{[0,j[}(k) = (x_j - x_{j-1}) + (x_{j-1} - x_{j-2}) + \dots (x_1 - x_0) = x_j - x_0,$$

ce qui nous amène à

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (x_{k+1} - x_k) P(X > x_k) = \sum_{j=0}^{+\infty} (x_j - x_0) P(X = x_j) = \left(\sum_{j=0}^{+\infty} x_j P(X = x_j)\right) - x_0.$$

La dernière égalité est valable même si $\sum_{j=0}^{+\infty} x_j P(X = x_j) = +\infty$ car $\sum_{j=0}^{+\infty} x_0 P(X = x_j)$ converge dans $\mathbb{R}_+$ vers x_0. Ceci achève la preuve de (1).

On peut s'affranchir de l'hypothèse de positivité des x_k en appliquant (1) à $X' = X - x_0$, variable aléatoire positive prenant les valeurs $x'_j = x_j - x_0$. Par contre sans l'hypothèse de croissance de (x_k), tout s'écroule.

Ex 2. L'avancement de certains jeux se fait selon la règle suivante : le joueur lance deux dés et avance son pion d'un nombre de cases donné par la somme des points obtenus. S'il a obtenu un double, il peut rejouer et avancer encore et ainsi de suite tant qu'il obtient des doubles. Après le premier lancer sans double, il passe la main au joueur suivant. On s'intéresse à la somme S des points obtenus par cette procédure par un joueur lors d'un tour. Pour $i \geq 1$, on note D_i l'événement *le i-ème lancer a lieu et donne un double* (on a donc $D_i \subset D_{i-1}$). On note X_i la variable aléatoire égale à 0 si le i-ème lancer n'a pas lieu et à la somme des points du i-ème lancer sinon.

1) Loi et espérance de X_1.

Il est bien connu (exercice élémentaire classique) que la loi de X_1 est une loi triangulaire donnée par le tableau suivant

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X_1 = k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Ce tableau montre que la *répartition des masses ponctuelles* de la loi de X_1 est symétrique autour de la valeur 7. Comme $\mathbf{E}X_1$ s'interprète comme le barycentre du système de points pondérés $(k, P(X_1 = k))$, il est clair que

$$\mathbf{E}X_1 = 7.$$

2) Si un lancer a lieu, la probabilité qu'il donne un double est clairement $6/36 = 1/6$. Le premier lancer a toujours lieu et pour $i > 1$, le i-ème lancer a lieu si D_{i-1} s'est réalisé. On a donc :

$$P(D_1) = \frac{1}{6} \quad \text{et} \quad P(D_i \mid D_{i-1}) = \frac{1}{6}.$$

D'autre part si D_{i-1}^c s'est réalisé (soit parce que le $(i-1)$-ème lancer n'a pas donné de double, soit tout simplement parce qu'il n'a pas eu lieu), il n'y a pas de i-ème lancer et D_i ne peut se réaliser. Ceci se traduit par $P(D_i \mid D_{i-1}^c) = 0$. En appliquant la formule des probabilités totales, on obtient

$$P(D_i) = P(D_i \mid D_{i-1})P(D_{i-1}) + P(D_i \mid D_{i-1}^c)P(D_{i-1}^c) = \frac{1}{6}P(D_{i-1}).$$

Ainsi $P(D_i)$ apparaît comme le terme général d'une suite géométrique de premier terme $P(D_1) = 1/6$ et de raison $1/6$. D'où

$$P(D_i) = \left(\frac{1}{6}\right)^i.$$

3) Calcul des probabilités conditionnelles $P(X_i = k \mid D_{i-1})$ et $P(X_i = k \mid D_{i-1}^c)$. Si D_{i-1}^c est réalisé, il n'y a pas de i-ème lancer et X_i prend obligatoirement la valeur 0, d'où

$$P(X_i = k \mid D_{i-1}^c) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si D_{i-1} est réalisé, le i-ème lancer a bien lieu, donc X_i ne peut prendre la valeur 0. Comme on est alors dans les mêmes conditions expérimentales que lors du premier lancer, la probabilité que X_i prenne la valeur k est la même que pour X_1. Ceci se traduit par

$$P(X_i = k \mid D_{i-1}) = \begin{cases} 0 & \text{si } k = 0, \\ P(X_1 = k) & \text{sinon.} \end{cases}$$

4) En appliquant à nouveau la formule des probabilités totales, nous obtenons

$$P(X_i = k) = P(X_i = k \mid D_{i-1})P(D_{i-1}) + P(X_i = k \mid D_{i-1}^c)P(D_{i-1}^c).$$

Pour $k = 0$, ceci nous donne :

$$P(X_i = 0) = P(D_{i-1}^c) = 1 - \frac{1}{6^{i-1}}.$$

De même pour $k \in \{2, \dots, 12\}$,

$$P(X_i = k) = P(X_i = k \mid D_{i-1})P(D_{i-1}) = \frac{1}{6^{i-1}}P(X_1 = k).$$

La loi de X_i est décrite par le tableau :

k	0	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X_i = k)$	$1 - \frac{1}{6^{i-1}}$	$\frac{1}{6^{i+1}}$	$\frac{2}{6^{i+1}}$	$\frac{3}{6^{i+1}}$	$\frac{4}{6^{i+1}}$	$\frac{5}{6^{i+1}}$	$\frac{6}{6^{i+1}}$	$\frac{5}{6^{i+1}}$	$\frac{4}{6^{i+1}}$	$\frac{3}{6^{i+1}}$	$\frac{2}{6^{i+1}}$	$\frac{1}{6^{i+1}}$

L'espérance de X_i vaut :

$$\mathbf{E}X_i = 0 \times P(X_i = 0) + \sum_{k=2}^{12} kP(X_i = k) = \frac{1}{6^{i-1}} \sum_{k=2}^{12} kP(X_1 = k) = \frac{1}{6^{i-1}}\mathbf{E}X_1 = \frac{7}{6^{i-1}}.$$

Remarquons que la formule $\mathbf{E}X_i = 7/6^{i-1}$ reste valable dans le cas $i = 1$.

5) On pose $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Par linéarité de l'espérance,

$$\mathbf{E}S_n = \sum_{i=1}^n \mathbf{E}X_i = \sum_{i=1}^n \frac{7}{6^{i-1}} = 7\frac{1 - \frac{1}{6^n}}{1 - \frac{1}{6}}.$$

Cette somme partielle d'une série géométrique converge en croissant quand n tend vers l'infini vers

$$\ell = \frac{7}{1 - \frac{1}{6}} = \frac{42}{5} = 8,4.$$

Commentaire. Comme $\mathbf{E}S_n$ converge en croissant vers $8,4$ on a $\mathbf{E}S_n \leq 8,4$, majoration *valable pour tout* n. Ceci montre que le gain moyen apporté par la possibilité de jouer au plus n fois pourvu que l'on obtienne un double n'est pas très important puisque l'espérance pour un seul lancer est 7. Néanmoins, ce résultat n'est pas tout à fait satisfaisant. Il serait plus intéressant de connaître l'espérance du *nombre total de points obtenus* sans limitation a priori du nombre de lancers, c'est à dire de $S = \lim_{n\to+\infty} S_n$. Le but des questions hors barême suivantes est de justifier l'interversion de limites : $\mathbf{E}(\lim_{n\to+\infty} S_n) = \lim_{n\to+\infty} \mathbf{E}S_n$.

6) On note N le nombre aléatoire de lancers effectués selon la procédure ci-dessus. Le nombre de lancers est supérieur ou égal à n si et seulement si les $n-1$ premiers lancers ont donné chacun un double, d'où

$$\{N \geq n\} = \bigcap_{i=1}^{n-1} D_i = D_{n-1},$$

en remarquant que les D_i sont emboîtés. On a donc

$$\forall n \geq 1, \quad P(N \geq n) = \frac{1}{6^{n-1}}.$$

L'événement $\{N = +\infty\}$ étant inclus dans chacun des $\{N \geq n\}$, on en déduit :

$$\forall n \geq 1, \quad 0 \leq P(N = +\infty) \leq \frac{1}{6^{n-1}}.$$

En faisant tendre n vers l'infini, on voit que $P(N = +\infty) = 0$.

On admet alors que l'on peut remplacer Ω par $\Omega' = \{\omega \in \Omega;\ N(\omega) < +\infty\}$. C'est ce que nous ferons désormais[1]. On peut alors considérer N comme une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Pour identifier la loi de N, on remarque que :

$$\{N = n\} = \Big(\bigcap_{i=1}^{n-1} D_i\Big) \cap D_n^c = D_{n-1} \cap D_n^c.$$

Par conséquent,

$$P(N = n) = P(D_n^c \mid D_{n-1})P(D_{n-1}) = \frac{5}{6} \times \frac{1}{6^{n-1}}.$$

On reconnaît une loi géométrique de paramètre 5/6.

7) On définit la variable aléatoire S sur Ω' par :

$$S(\omega) = \sum_{i=1}^{+\infty} X_i(\omega).$$

Notons que puisque ω est dans Ω', tous les termes de la série sont nuls à partir du rang (aléatoire) $N(\omega)+1$, il n'y a donc pas de problème de convergence. S est le nombre total de points obtenus, sauf dans le cas où il y a une infinité de lancers. Comme celui-ci a une probabilité nulle, le fait de le laisser tomber en remplaçant Ω par Ω' n'affecte pas la loi du nombre total de points obtenus qui est donc celle de S.

Le nombre de points obtenus lors d'un lancer n'excède jamais 12 et le nombre de termes non nuls dans $S(\omega)$ est exactement $N(\omega)$. On a donc

$$\forall \omega \in \Omega', \quad S(\omega) \leq 12N(\omega).$$

En particulier pour tout ω tel que $S(\omega) = k$, $12N(\omega) \geq k$, ce qui démontre les inclusions

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \{S = k\} \subset \{12N \geq k\}.$$

1. On pourrait aussi conserver le même Ω et remplacer P par la probabilité $P(\,.\mid N < +\infty)$.

Par conséquent,

$$P(S=k) \leq P(12N \geq k) = P\Big(N \geq \frac{k}{12}\Big).$$

Notons pour alléger les écritures $x = k/12$ et désignons par $[x]$ la partie entière de x (c'est l'unique entier vérifiant $[x] \leq x < [x]+1$).

$$P(N \geq x) \leq P(N \geq [x]) = \frac{1}{6^{[x]-1}}.$$

Comme $[x] \geq x-1$, on en déduit

$$P(N \geq x) \leq \Big(\frac{1}{6}\Big)^{x-2} = 36\Big(\frac{1}{6}\Big)^{k/12}$$

Finalement

$$P(S=k) \leq 36q^k \quad \text{où} \quad q = 6^{-1/12}.$$

Cette inégalité permet de voir sans calculer la loi de S que l'espérance de S existe. En effet, il s'agit de vérifier que :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} kP(S=k) < +\infty,$$

ce qui est bien le cas puisque $kP(S=k)$ est majoré par $36kq^k$ qui est le terme général d'une série convergente $(0 < q < 1)$.

8) On définit sur Ω' la v. a. $R_n = S - S_{n-1}$. Montrons qu'elle vérifie $R_n \leq S\mathbf{1}_{\{S\geq 2n\}}$.

Si $R_n(\omega) = 0$, il n'y a rien à vérifier. Si $R_n(\omega) > 0$, on a forcément $X_n(\omega) > 0$ car $R_n(\omega)$ est le reste de la série définissant $S(\omega)$ et dans cette série, dès qu'un terme est nul, tous les suivants le sont. Si $X_n(\omega) > 0$, cela signifie qu'il y a au moins n lancers et puisqu'à chacun d'eux on obtient au minimum 2 points, $S(\omega) \geq 2n$ donc $\mathbf{1}_{\{S\geq 2n\}}(\omega) = 1$. Comme on a toujours $R_n(\omega) \leq S(\omega)$, il en résulte que

$$R_n\omega) \leq S(\omega)\mathbf{1}_{\{S\geq 2n\}}(\omega).$$

En rassemblant les deux cas envisagés, on voit que cette inégalité est valable pour tout $\omega \in \Omega'$.

Comme les espérances de S et de S_{n-1} existent, il en est de même pour celle de $R_n = S - S_{n-1}$ qui vaut $\mathbf{E}S - \mathbf{E}S_{n-1}$. L'espérance de la v.a. positive $S\mathbf{1}_{\{S\geq 2n\}}$ existe puisque cette v.a. est majorée par S. Enfin, en raison de la propriété de positivité de l'espérance (cf. prop. 5.5 du polycopié), l'inégalité $0 \leq R_n \leq S\mathbf{1}_{\{S\geq 2n\}}$ implique :

$$0 \leq \mathbf{E}R_n = \mathbf{E}S - \mathbf{E}S_{n-1} \leq \mathbf{E}(S\mathbf{1}_{\{S\geq 2n\}}).$$

9) La loi de la variable aléatoire $T_n = S\mathbf{1}_{\{S\geq 2n\}}$ s'exprime simplement à l'aide de celle de S : $P(T_n = 0) = P(S < 2n)$ et pour $k \geq 2n$, $P(T_n = k) = P(S = k)$. On en déduit

$$\mathbf{E}(S\mathbf{1}_{\{S\geq 2n\}}) = \sum_{k=2n}^{+\infty} kP(S=k).$$

Ainsi $\mathbf{E}T_n$ apparaît comme le reste de rang $2n$ de la série *convergente* définissant $\mathbf{E}S$. Il tend donc vers 0 quand n tend vers l'infini. En raison de l'encadrement obtenu à la question précédente, il en est de même pour $\mathbf{E}R_n$ et finalement :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{E}S_n = \mathbf{E}S.$$

10) Comme on a vu à la question 5) que $\mathbf{E}S_n$ convergeait vers $8,4$, l'unicité de la limite nous donne

$$\mathbf{E}S = 8,4.$$