Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

L3 **Année 2011**

Probabilités élémentaires
Corrigé du D.S. du 22 mars 2011

Ex 1. *Échauffement*

Sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, on considère une suite $(A_n)_{n\geqslant 1}$ d'évènements de probabilité 1. Que peut-on dire de $P(\cap_{n\geqslant 1}A_n)$?

Cette probabilité vaut 1. En effet, en notant $A := \cap_{n\geqslant 1}A_n$, on a

$$A^c = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n^c,$$

union *dénombrable d'évènements*. Par sous-σ-additivité de P on en déduit :

$$P(A^c) \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}^*} P(A_n^c).$$

Ce majorant est la somme d'une série dont tous les termes sont nuls (puisque $P(A_n^c) = 1 - P(A_n) = 1 - 1 = 0$). Il est donc lui aussi nul, d'où $P(A^c) \leqslant 0$ et comme une probabilité ne peut pas être strictement négative, $P(A^c) = 0$ d'où $P(A) = 1$.

Ex 2. *La piscine*

Dans le vestiaire d'une piscine, chaque nageur range ses vêtements sur un cintre. Il le dépose au guichet où un employé équipe le cintre d'un bracelet rouge numéroté et remet au nageur un bracelet jaune portant le même numéro. Ainsi, à la fin de la séance, le nageur peut récupérer ses affaires en échange du bracelet. Avant l'ouverture au public, les bracelets sont rangés sur un tableau à N crochets supportant chacun un bracelet rouge et un jaune de même numéro.

Deux gamins turbulents s'introduisent dans le vestiaire avant l'ouverture. En se battant ils renversent le tableau portant les bracelets. Ils les remettent en place en prenant bien soin de placer sur chaque crochet un bracelet jaune et un rouge, mais sans tenir compte des numéros.

A l'ouverture, N nageurs se présentent et devant l'affluence, l'employé remet à chacun son bracelet jaune sans prendre le temps de vérifier les numéros. On se propose de calculer les probabilités des événements :

$$E_{N,k} = \{\text{exactement } k \text{ nageurs retrouvent leurs affaires}\}.$$

On choisit comme espace probabilisé Ω_N ensemble des toutes les permutations (i.e. bijections) sur $\{1,\dots,N\}$ muni de l'équiprobabilité P_N. On notera :

$$B_i = \{\text{le } i^{\text{e}} \text{ nageur retrouve ses affaires}\}.$$

1) Pour $j \leqslant N$ et $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_j \leqslant N$, calculons $P_N(B_{i_1} \cap \cdots \cap B_{i_j})$. Puisque P_N est *l'équiprobabilité* sur Ω_N,

$$P_N(B_{i_1} \cap \cdots \cap B_{i_j}) = \frac{\operatorname{card}(B_{i_1} \cap \cdots \cap B_{i_j})}{\operatorname{card}\Omega_N} = \frac{\operatorname{card}(B_{i_1} \cap \cdots \cap B_{i_j})}{N!},$$

en rappelant que le nombre de permutations d'un ensemble à N éléments est $N!$. Le problème se réduit donc au calcul de $\operatorname{card}(B_{i_1} \cap \cdots \cap B_{i_j})$.

Essayons déjà d enous faire une idée sur un exemple numérique simple, disons $N = 6$, $j = 3$, $i_1 = 2$, $i_2 = 4$, $i_3 = 5$. Alors $B_2 \cap B_4 \cap B_5$ est l'ensemble des permutations de $[\![1,6]\!]$ laissant invariants 2, 4 et 5. En voici la liste complète :

$$\begin{array}{cccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\
1 & 2 & 6 & 4 & 5 & 3\\
3 & 2 & 6 & 4 & 5 & 1\\
3 & 2 & 1 & 4 & 5 & 6\\
6 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1\\
6 & 2 & 1 & 4 & 5 & 3
\end{array}$$

Notons que parmi ces permutations, certaines ont plus de 3 points fixes. Pour dénombrer $B_2 \cap B_4 \cap B_5$, il suffit de remarquer qu'une permutation quelconque laissant 2, 4 et 5 invariants se construit sur le schéma suivant :

$$\boxed{}\boxed{2}\boxed{}\boxed{4}\boxed{5}\boxed{}$$

les case vides devant être complétées en « piochant » dans $\{1,3,6\}$. Il y a clairement autant de façons de compléter ces cases qu'il y a de permutations de l'ensemble à 3 éléments $\{1,3,6\}$, c'est-à-dire $3! = 6$.

Généralisons. Une permutation ω évènement élémentaire de $B_{i_1} \cap \cdots \cap B_{i_j}$ se construit en plaçant d'abord les j points fixes $i_1,\dots,i_j$ (soit $\omega(i_k) = i_k$ pour $1 \leqslant k \leqslant j$). Il reste alors $N - j$ cases à compléter en piochant dans l'ensemble $[\![1,N]\!] \setminus \{i_1,\dots,i_j\}$. Il y a donc autant d'éléments dans $B_{i_1} \cap \cdots \cap B_{i_j}$ que de permutations de $[\![1,N]\!] \setminus \{i_1,\dots,i_j\}$. Par conséquent,

$$\operatorname{card}(B_{i_1} \cap \cdots \cap B_{i_j}) = (N-j)! \quad \text{et} \quad P_N(B_{i_1} \cap \cdots \cap B_{i_j}) = \frac{(N-j)!}{N!}.$$

Notons que dans le cas particulier $j = N$, on a nécessairement $i_k = k$ pour $1 \leqslant k \leqslant N$ et on voit directement que $B_1 \cap \cdots \cap B_N$ ne contient qu'un seul élément la permutation identité. Donc $P_N(B_1 \cap \cdots \cap B_N) = 1/N!$, ce qui coïncide avec le cas $j = N$ dans la formule ci-dessus puisque $0! = 1$.

Pour $j = 1$, la formule ci-dessus nous donne $P_N(B_i) = \frac{1}{N}$. Pour $j = 2$, on voit que si $i_1 \neq i_2$,

$$P_N(B_{i_1} \cap B_{i_2}) = \frac{(N-2)!}{N!} = \frac{1}{N(N-1)} \neq P_N(B_{i_1})P_N(B_{i_2}) = \frac{1}{N^2}.$$

Par conséquent les B_i *ne sont pas* 2 à 2 indépendants.

On constate, comme on pouvait s'en douter, que $P_N(B_{i_1} \cap \cdots \cap B_{i_j})$ ne dépend que de N et de j et pas des valeurs particulières des indices $i_1, \dots, i_j$. Il est commode de réécrire ce résultat en notant J une partie de cardinal $j \geqslant 1$ de $[\![1, N]\!]$ et en posant :

$$D_J := \bigcap_{i \in J} B_i,$$

sous la forme

$$P_N(D_J) = \frac{(N-j)!}{N!}, \quad j = \operatorname{card} D_J.$$

Comme il y a en tout C_N^j parties J de $[\![1, N]\!]$ ayant pour cardinal j, on en déduit que pour $1 \leqslant j \leqslant N$:

$$\sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_j} P_N(B_{i_1} \cap \cdots \cap B_{i_j}) = \sum_{\substack{J \subset [\![1,N]\!] \\ \operatorname{card} J = j}} P_N(D_J) = C_N^j \frac{(N-j)!}{N!} = \frac{N!}{j!(N-j)!} \times \frac{(N-j)!}{N!} = \frac{1}{j!}.$$

2) L'évènement $E_{N,0}$ « aucun nageur ne retrouve ses affaires », s'exprime facilement en fonction des B_i :

$$E_{N,0} = \bigcap_{i=1}^{N} B_i^c.$$

Comme les B_i ne sont même pas 2 à 2 indépendants, il ne sont *a fortiori* pas mutuellement indépendants et il en va de même pour les complémentaires. On ne peut donc pas calculer $P_N(E_{N,0})$ comme le produit des $P_N(B_i^c)$.

Les calculs faits à la question précédente nous incitent alors à passer à l'évènement complémentaire $\cup_{1 \leqslant i \leqslant N} B_i$ et à calculer la probabilité de cette réunion par la formule de Poincaré[1].

Avec les notations D_J introduites ci-dessus, cette formule s'écrit :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{N} B_i\right) = \sum_{j=1}^{N} (-1)^{j+1} \sum_{\substack{J \subset [\![1,N]\!] \\ \operatorname{card} J = j}} P_N(D_J),$$

d'où

$$P_N(E_{N,0}) = 1 - P\left(\bigcup_{i=1}^{N} B_i\right) = 1 - \sum_{j=1}^{N} (-1)^{j+1} \frac{1}{j!} = \sum_{j=0}^{N} \frac{(-1)^j}{j!}.$$

1. Cette union n'est pas disjointe puisque $P_N(B_{i_1} \cap B_{i_2}) = \frac{1}{N(N-1)} > 0$ interdit que $B_{i_1} \cap B_{i_2}$ ne soit vide. On ne peut donc pas utiliser ici l'additivité de P_N.

3) Fixons k nageurs retrouvant leurs affaires. On peut exprimer le *nombre* de permutations des $N-k$ autres nageurs telles qu'aucun d'eux ne retrouve ses affaires à l'aide de $P_{N-k}(E_{N-k,0})$. En effet, puisque P_{N-k} est l'équiprobabilité sur Ω_{N-k},

$$P_{N-k}(E_{N-k,0}) = \frac{\operatorname{card} E_{N-k,0}}{\operatorname{card} \Omega_{N-k}} = \frac{\operatorname{card} E_{N-k,0}}{(N-k)!},$$

d'où

$$\operatorname{card} E_{N-k,0} = (N-k)!\, P_{N-k}(E_{N-k,0}).$$

On remarque ensuite qu'il y a une relation simple entre $\operatorname{card} E_{N-k,0}$ et $\operatorname{card} E_{N,k}$. En effet une permutation de $[\![1, N]\!]$ ayant exactement k points fixes se caractérise par l'ensemble J de cardinal k formé des points fixes et une permutation ω' sans aucun point fixe de l'ensemble $[\![1, N]\!] \setminus J$. Il est clair que le nombre des permutations du type ω' ne dépend de J que par k et N, donc est égal au nombre de permutations sans point fixe de $[\![1, N-k]\!] = [\![1, N]\!] \setminus J_0$ pour $J_0 = [\![N-k+1, N]\!]$. Ce nombre est exactement $\operatorname{card} E_{N-k,0}$. Comme le nombre de choix possibles pour J est C_N^k, on en déduit que

$$\operatorname{card} E_{N,k} = C_N^k \operatorname{card} E_{N-k,0}.$$

Ceci nous permet de calculer $P_N(E_{N,k})$:

$$\begin{aligned} P_N(E_{N,k}) = \frac{\operatorname{card} E_{N,k}}{N!} &= \frac{C_N^k \operatorname{card} E_{N-k,0}}{N!} \\ &= \frac{C_N^k (N-k)!\, P_{N-k}(E_{N-k,0})}{N!} \\ &= \frac{1}{k!} P_{N-k}(E_{N-k,0}), \end{aligned}$$

d'où finalement, en appliquant la formule obtenue à la question précédente pour $P_N(E_{N,0})$ avec $N-k$ au lieu de N,

$$P_N(E_{N,k}) = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{N-k} \frac{(-1)^j}{j!}.$$

4) Pour k fixé, on peut écrire

$$p_k = \lim_{N\to\infty} P_N(E_{N,k}) = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(-1)^j}{j!},$$

sous réserve que cette série converge dans $\mathbb{R}$. Il y a au moins deux façons de justifier cette convergence.

1. On peut remarquer qu'il s'agit d'une *série alternée* dont la valeur absolue du terme général tend vers 0 en décroissant. On sait qu'une telle série converge toujours dans $\mathbb{R}$. En prime on sait aussi que sa somme, ici p_k, est encadrée par deux sommes partielles consécutives.

2. On peut aussi remarquer que la fonction exponentielle a le développement en série entière suivant avec rayon de convergence infini :

$$\mathrm{e}^x = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{x^j}{j!},$$

cette série convergeant absolument pour tout x réel. En particulier, pour $x = -1$,

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(-1)^j}{j!} = \mathrm{e}^{-1}.$$

Nous obtenons ainsi :

$$p_k = \lim_{N\to\infty} P_N(E_{N,k}) = \frac{\mathrm{e}^{-1}}{k!}.$$

Pour voir que la suite de réels *positifs* $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définit une probabilité P sur $\mathbb{N}$, il suffit de vérifier que la série de terme général p_k a pour somme 1. On pourra alors poser pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(\{k\}) := p_k$ et pour tout $A \subset \mathbb{N}$, donc au plus dénombrable, $P(A) := \sum_{k\in A} p_k$, ce qui définit bien une probabilité sur $\mathbb{N}$. Cette vérification est immédiate grâce au développement en série entière de la fonction exponentielle :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} p_k = \mathrm{e}^{-1} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = \mathrm{e}^{-1}\mathrm{e}^{1} = 1.$$

On reconnaît en P la loi de Poisson de paramètre 1. Rappelons que la loi de Poisson de paramètre $a > 0$ est l'unique probabilité Q_a sur $\mathbb{N}$ vérifiant :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad Q_a(\{k\}) = \frac{\mathrm{e}^{-a} a^k}{k!}.$$

Avec ces notations, $P = Q_1$.

5) On s'intéresse maintenant à la vitesse de convergence de $P_N(E_{N,k})$. Pour cela, on peut exploiter le fait que, pour chaque k fixé, $P_N(E_{N,k})$ est la somme partielle de rang $N - k$ d'une série alternée dont la valeur absolue du terme général tend vers 0 en décroissant. On sait qu'alors la somme de cette série, soit ici p_k, est encadrée par deux sommes partielles consécutives, quel que soit leur rang [2]. En particulier, la distance entre p_k et la somme partielle de rang $N-k$ est inférieure strictement à la distance entre cette somme partielle et celle de rang $N - k + 1$, ce qui s'écrit :

$$|P_N(E_{N,k}) - p_k| < \left| \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{N-k+1} \frac{(-1)^j}{j!} - \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{N-k} \frac{(-1)^j}{j!} \right| = \frac{1}{k!(N-k+1)!}.$$

Cette majoration est valide pour tout $k \in [\![0, N]\!]$. Par sommation de l'inégalité ci-dessus pour $k \in [\![0, n]\!]$, avec $n \leqslant N$, on obtient :

$$\sum_{j=0}^{n} |P_N(E_{N,j}) - p_j| \leqslant \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!(N-j+1)!} \leqslant \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!(N-n+1)!} \leqslant \frac{1}{(N-n+1)!} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!}.$$

2. Pour une série alternée dont aucun terme n'est nul, cet encadrement est strict.

On reconnaît dans la somme de cette dernière série le nombre e. Nous avons ainsi établi que :

$$\forall n \in [\![0, N]\!], \qquad \sum_{j=0}^{n} |P_N(E_{N,j}) - p_j| \leqslant \frac{\mathrm{e}}{(N+1-n)!}.$$

6) *Application.* Le majorant d'erreur obtenu ci-dessus pour l'approximation de $P_N(E_{N,k})$ par p_k sera numériqueemnt très petit pourvu que k ne soit pas trop proche de N. Or la masse de la probabilité P dont le support est $\mathbb{N}$ est en fait très concentrée sur les entiers proches de 0. Par exemple, à 6×10^{-4} près, elle est portée par $[\![0, 5]\!]$, comme le montre le petit calcul suivant :

$$P([\![0, 5]\!]) = \sum_{j=0}^{5} p_j = \sum_{j=0}^{5} \frac{\mathrm{e}^{-1}}{j!} = \mathrm{e}^{-1}\Big(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!}\Big) \simeq 0{,}999\,406.$$

Si on regarde alors l'approximation de $P_{N,j}$ par p_j pour $j \leqslant 5$ et $N \geqslant 12$, on aura

$$|P_N(E_{N,j}) - p_j| < \frac{1}{j!(N-j+1)!} \leqslant \frac{1}{8!} \simeq 0{,}000\,024\,8 < 3 \times 10^{-5}.$$

Cette majoration assez grossière est donc déjà suffisante pour avoir une approximation des $P_{N,j}$ pour $N \geqslant 12$ et $0 \leqslant j \leqslant 5$ par p_j qui ne dépend pas de N, avec une erreur inférieure à 10^{-4}. Voici les valeurs numériques obtenues.

j	0	1	2	3	4	5
p_j	0,367 879	0,367 879	0,183 940	0,061 313	0,015 328	0,003 066

La probabilité qu'au moins 6 nageurs retrouvent leurs affaires est :

$$1 - \sum_{j=0}^{5} P_N(E_{N,j}) \simeq 1 - \sum_{j=0}^{5} p_j \simeq 1 - 0{,}999\,406 = 0{,}000\,594.$$

Pour $N \geqslant 12$, l'erreur ε_N commise dans l'approximation ci-dessus de $\sum_{j=0}^{5} P_N(E_{N,j})$ par $\sum_{j=0}^{5} p_j$ est majorée par :

$$\varepsilon_N \leqslant \sum_{j=0}^{5} |P_N(E_{N,j}) - p_j| \leqslant \frac{\mathrm{e}}{(N+1-5)!} \leqslant \frac{\mathrm{e}}{8!} \leqslant 0{,}000\,067\,5 < 10^{-4}.$$

Ex 3. *Pile ou face triphasé*

Trois personnes nommées A, B, C lancent à tour de rôle la même pièce de monnaie (ABCABCABC...). La probabilité d'obtenir pile lors d'un lancer est p $(0 < p < 1)$. Le gagnant est le premier qui obtient pile (la partie *s'arrête* alors). On note A_n (resp. B_n, C_n) l'événement *A gagne la partie lors du n-ième lancer* (resp. B, C).

Au vu des trop nombreuses copies manifestant une incompréhension initiale de l'énoncé, insistons lourdement sur la définition de A_n. Il est écrit « A gagne la partie lors *du* n^{e} lancer » et non pas « lors de *son* n^{e} lancer ». Autrement dit, A lance le premier, s'il échoue, le deuxième lancer est fait par B, si B échoue, le 3e lancer est effectué par C, s'il échoue le 4e lancer est effectué par A, etc.

Remarque préliminaire. La règle du jeu adoptée ne permet pas, en toute rigueur, de considérer les lancers de la pièce comme une suite d'épreuves répétées indépendantes. Par exemple, la probabilité d'obtenir pile au deuxième lancer n'est pas p. En fait, p est la probabilité d'obtenir pile au deuxième lancer *sachant* que ce lancer a bien lieu, c'est à dire sachant que l'on a obtenu face au premier lancer. La résolution correcte des questions 1) et 2) requiert donc l'utilisation du conditionnement en chaîne au lieu de l'indépendance.

1) *Calcul de $P(A_1)$, $P(B_2)$ et $P(C_3)$.*

Le premier lancer ayant de toutes façons lieu, on a clairement $P(A_1) = p$. Pour calculer $P(B_2)$, on remarque que B_2 ne peut avoir lieu que si A a perdu le premier lancer. Donc B_2 implique A_1^c, autrement dit $B_2 \subset A_1^c$. Par conséquent $B_2 = B_2 \cap A_1^c$ et :

$$P(B_2) = P(B_2 \cap A_1^c) = P(B_2 \mid A_1^c)P(A_1^c) = pq,$$

en notant $q = 1 - p$ la probabilité d'obtenir face à un lancer sachant qu'il a lieu.

De même, la réalisation de C_3 nécessite celle de A_1^c et de B_2^c d'où $C_3 = C_3 \cap B_2^c \cap A_1^c$ et :

$$P(C_3) = P(A_1^c \cap B_2^c \cap C_3) = P(A_1^c)P(B_2^c \mid A_1^c)P(C_3 \mid A_1^c \cap B_2^c) = pq^2$$

En effet $P(C_3 \mid A_1^c \cap B_2^c)$ est la probabilité d'obtenir pile au troisième lancer *sachant* que ce lancer a lieu. Donc $P(C_3 \mid A_1^c \cap B_2^c) = p$.

Les événements A_1 et B_2 étant incompatibles ($A_1 \cap B_2 = \emptyset$) ne peuvent être indépendants :

$$P(A_1 \cap B_2) = P(\emptyset) = 0 \neq P(A_1)P(B_2) = p^2q.$$

2) *Calcul de $P(A_n)$, $P(B_n)$ et $P(C_n)$.*

Il est clair que chaque joueur ne peut gagner qu'à un lancer où c'est son tour de jouer. Ainsi :

- A ne peut gagner qu'à un lancer dont le numéro est de la forme $n = 3k + 1$, $k \in \mathbb{N}$. Pour les autres valeurs de n, $P(A_n) = 0$.
- B ne peut gagner qu'à un lancer dont le numéro est de la forme $n = 3k + 2$, $k \in \mathbb{N}$. Pour les autres valeurs de n, $P(B_n) = 0$.
- C ne peut gagner qu'à un lancer dont le numéro est de la forme $n = 3k$, $k \in \mathbb{N}^*$. Pour les autres valeurs de n, $P(C_n) = 0$.

Afin de généraliser les calculs de la question 1), il est commode d'introduire les notations suivantes. Pour $i \in \mathbb{N}^*$, désignons par F_i l'événement *obtention de face au ième lancer* et par G_i l'événement *obtention de pile au ième lancer*. Pour tout $n \geqslant 2$, les probabilités d'obtenir pile au $n$ième lancer ou face au même lancer *sachant que ce lancer a bien lieu* sont respectivement :

$$P\Big(G_n \mid \bigcap_{i=1}^{n-1} F_i\Big) = p, \quad \text{et} \quad P\Big(F_n \mid \bigcap_{i=1}^{n-1} F_i\Big) = q.$$

D'autre part la règle du conditionnement en chaîne nous fournit :

$$P\Big(\bigcap_{i=1}^{n} F_i\Big) = P(F_1)P(F_2 \mid F_1)P(F_3 \mid F_1 \cap F_2)\cdots P\Big(F_n \mid \bigcap_{i=1}^{n-1} F_i\Big) = q^n.$$

En remarquant que :

$$A_{3k+1} = G_{3k+1} \cap \Big(\bigcap_{i=1}^{3k} F_i\Big),$$

on a alors :

$$P(A_{3k+1}) = P\Big(G_{3k+1} \mid \bigcap_{i=1}^{3k} F_i\Big)P\Big(\bigcap_{i=1}^{3k} F_i\Big) = pq^{3k}.$$

La même méthode nous donne :

$$P(B_{3k+2}) = pq^{3k+1},\ k \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad P(C_{3k}) = pq^{3k-1},\ k \in \mathbb{N}^*.$$

3) *Probabilité de gagner de chacun des trois joueurs.*

Notons V (resp. V', V'') l'événement $\{$ *A gagne la partie*$\}$ (resp. B, C). On a :

$$V = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_{3k+1}, \quad V' = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} B_{3k+2}, \quad V'' = \bigcap_{k\in\mathbb{N}^*} C_{3k-1},$$

ces réunions portant sur des événements deux à deux disjoints. On en déduit :

$$\begin{aligned} P(V) &= \sum_{k=0}^{+\infty} pq^{3k} = \frac{p}{1-q^3} = \frac{p}{(1-q)(1+q+q^2)} = \frac{1}{1+q+q^2} \\ P(V') &= \sum_{k=0}^{+\infty} pq^{3k+1} = \frac{pq}{1-q^3} = \frac{pq}{(1-q)(1+q+q^2)} = \frac{q}{1+q+q^2} \\ P(V'') &= \sum_{k=1}^{+\infty} pq^{3k-1} = \frac{pq^2}{1-q^3} = \frac{pq^2}{(1-q)(1+q+q^2)} = \frac{q^2}{1+q+q^2}. \end{aligned}$$

Les séries géométriques qui interviennent dans ces calculs ont toutes pour raison q^3 qui vérifie $0 < q^3 < 1$. Elles sont donc convergentes. On remarque, comme on pouvait s'y attendre, que A est avantagé par rapport à B qui est lui même avantagé par rapport à C : $P(V'') = qP(V') < P(V') = qP(V) < P(V)$ puisque $q < 1$. Par exemple si la pièce est équilibrée, $p = q = 1/2$, on obtient : $P(A) = 4/7$, $P(B) = 2/7$, $P(C) = 1/7$.

4) *Probabilité qu'il y ait un vainqueur*

L'événement $W = \{$ *il y a un vainqueur*$\}$ s'écrit comme la réunion disjointe : $W = V \cup V' \cup V''$. On a ainsi :

$$P(W) = P(V) + P(V') + P(V'') = \frac{1}{1+q+q^2} + \frac{q}{1+q+q^2} + \frac{q^2}{1+q+q^2} = 1.$$

Il est donc certain que la partie durera un temps fini. Mais bien sûr comme ce temps est lui même aléatoire, on ne peut pas le majorer avec certitude par une durée déterministe.

Remarque sur la modélisation. Une solution plus simple mais manquant de rigueur a été présentée dans plusieurs copies et considérée avec bienveillance par les correcteurs.

Il s'agissait de remarquer que $P(A_{3k+1}) = P(X = 3k + 1)$, $P(B_{3k+2}) = P(X = 3k + 2)$ et $P(C_{3k}) = P(X = 3k)$ où X suit une loi géométrique de paramètre p. Cela supposait les lancers indépendants, ce qui n'est pas le cas avec la règle du jeu adoptée. On peut néanmoins accepter ce raisonnement si l'on admet que tout se passe comme s'il y avait un arbitre qui lance indéfiniment la pièce, les trois joueurs A, B, C pariant chacun son tour que le lancer va donner pile.