Assurances et probabilités

Charles SUQUET
http://math.univ-lille1.fr/~suquet

U.S.T.L. Lille 1 & CNRS UMR 8524

12 avril 2007

Contenu

Bases

- M. Denuit, A. Charpentier, *Mathématiques de l'assurance non vie*, tome 1 : Principes fondamentaux de théorie du risque. Economica 2004.
- C. Partrat, J.-L. Besson, *Assurance non-vie, modélisation, simulation*. Assurance Audit Actuariat, Economica 2005.

Bases

- Police d’assurance.
- Prime (premium).

Bases

- Police d'assurance.
- Prime (premium).
- Mutualisation (compensation stochastique).

Bases

- Police d'assurance.
- Prime (premium).
- Mutualisation (compensation stochastique).
- Moyens d'améliorer la solvabilité.

Prime pure 1

Soit S la charge totale de sinistre relative à une police donnée au cours d'une période d'assurance.

Prime pure 1

Soit S la charge totale de sinistre relative à une police donnée au cours d'une période d'assurance.
L'opération d'assurance substitue une constante c à la variable aléatoire S.
Comment déterminer c ?

Prime pure 1

Soit S la charge totale de sinistre relative à une police donnée au cours d'une période d'assurance.
L'opération d'assurance substitue une constante c à la variable aléatoire S.
Comment déterminer c ?
On cherche c « proche » de S en introduisant une distance pénalisant symétriquement $\{c < S\}$ et $\{c > S\}$:

$$d_2(S, c)^2 := \mathbf{E}\,(S - c)^2.$$

Prime pure 1

Soit S la charge totale de sinistre relative à une police donnée au cours d'une période d'assurance.
L'opération d'assurance substitue une constante c à la variable aléatoire S.
Comment déterminer c ?

$$d_2(S,c)^2 = \mathbf{E}\,(S-c)^2 = (\mathbf{E}\,S - c)^2 + \operatorname{Var} S,$$

donc $d_2(S,c)$ est minimal pour $c = \mathbf{E}\,S$.

Prime pure 1

Soit S la charge totale de sinistre relative à une police donnée au cours d'une période d'assurance.
L'opération d'assurance substitue une constante c à la variable aléatoire S.
Comment déterminer c ?

$$d_2(S, c)^2 = \mathbf{E}\,(S - c)^2 = (\mathbf{E}\,S - c)^2 + \mathrm{Var}\,S,$$

donc $d_2(S, c)$ est minimal pour $c = \mathbf{E}\,S$.
La distance

$$d_1(S, c) := \mathbf{E}\,|S - c|$$

est minimale pour $c = \mathrm{médiane}(S)$. Solution pas acceptable si $P(S = 0)$ est grand, par exemple en assurance automobile.

Prime pure 2

Théorème (loi des grands nombres)

Supposons les montants de sinistres $S_1, \dots, S_n$ indépendants et de même loi ayant une espérance commune $\mathbf{E}\, S_i = \mu$. Notons $\overline{S}^{(n)}$ la charge moyenne de sinistre par police. Alors

$$\overline{S}^{(n)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} S_i \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} \mu.$$

Prime pure 2

Théorème (loi des grands nombres)

Supposons les montants de sinistres $S_1, \dots, S_n$ *indépendants et de même loi ayant une espérance commune* $\mathbf{E}\, S_i = \mu$. *Notons* $\overline{S}^{(n)}$ *la charge moyenne de sinistre par police. Alors*

$$\overline{S}^{(n)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} S_i \xrightarrow[n \to +\infty]{\text{p.s.}} \mu.$$

Remarques.

- Résultat asymptotique (n « grand »).
- Indépendance (ne marche pas pour catastrophes naturelles).

Prime pure 2

Théorème (loi des grands nombres)

Supposons les montants de sinistres $S_1, \dots, S_n$ indépendants et de même loi ayant une espérance commune $\mathbf{E}\, S_i = \mu$. Notons $\overline{S}^{(n)}$ la charge moyenne de sinistre par police. Alors

$$\overline{S}^{(n)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} S_i \xrightarrow[n \to +\infty]{\text{p.s.}} \mu.$$

Remarques.

- Résultat asymptotique (n « grand »).
- Indépendance (ne marche pas pour catastrophes naturelles).
- Homogénéité des risques. Necessité de segmenter le portefeuille...

Insuffisance de la prime pure

Définition (prime pure)

On appelle prime pure associée à un montant de sinistre aléatoire S *pour une période d'assurance, la quantité* $\mathbf{E}\, S$.

Cette prime sert de base au calcul de la prime commerciale effectivement payée par l'assuré.

Insuffisance de la prime pure

Définition (prime pure)

On appelle prime pure associée à un montant de sinistre aléatoire S pour une période d'assurance, la quantité $\mathbf{E}\, S$.

Cette prime sert de base au calcul de la prime commerciale effectivement payée par l'assuré.

Elle est insuffisante !

En effet soit un portefeuille avec sinistres $S_1, \dots, S_n$ i.i.d., tels que $\mathbf{E}\, S_1^2 < +\infty$ et pour lequel la compagnie n'encaisserait que les primes pures $\mu = \mathbf{E}\, S_i$. Le théorème limite central implique que la loi du résultat d'exploitation $n\mu - \sum_{i=1}^{n} S_i$ est approximativement gaussienne $\mathfrak{N}(0, n\sigma^2)$, d'où

$$P(\text{déficit}) = P\Bigl(n\mu - (S_1 + \cdots + S_n) < 0\Bigr) \simeq \frac{1}{2}.$$

Insuffisance de la prime pure 2

Si la compagnie encaisse par police une prime $p < \mu$, alors

$$\begin{aligned} P(\text{déficit}) &= P(np - (S_1 + \cdots + S_n) < 0) \\ &= P\Big(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\mu - \overline{S}^{(n)}) < \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\mu - p)\Big) \\ &\simeq \Phi\Big(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\mu - p)\Big) \simeq 1. \end{aligned}$$

Insuffisance de la prime pure 2

Amélioration de la solvabilité :

- Chargement de la prime pure (prime de risque).
- Augmentation du nombre d'assurés.

Insuffisance de la prime pure 2

Amélioration de la solvabilité :

- Chargement de la prime pure (prime de risque).
- Augmentation du nombre d'assurés.
- Réserve de stabilisation.

Insuffisance de la prime pure 2

Amélioration de la solvabilité :

- Chargement de la prime pure (prime de risque).
- Augmentation du nombre d'assurés.
- Réserve de stabilisation.
- Réassurance.

Prime de risque et solvabilité

La prime de risque p s'obtient par *chargement* (safety loading) de la prime pure.

- Chargement proportionnel : $p = (1+\eta)\mathbf{E}\, S$. Avec le modèle i.i.d. ci-dessus, la probabilité de déficit devient

$$P(\text{déficit}) \simeq \Phi\Big(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\mu - p)\Big) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \Phi(-\infty) = 0.$$

Prime de risque et solvabilité

La prime de risque p s'obtient par *chargement* (safety loading) de la prime pure.

- Chargement proportionnel : $p = (1+\eta)\mathbf{E}\, S$. Avec le modèle i.i.d. ci-dessus, la probabilité de déficit devient

$$P(\text{déficit}) \simeq \Phi\Big(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\mu - p)\Big) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \Phi(-\infty) = 0.$$

- Chargement par l'écart-type : $p = \mathbf{E}\, S + \beta\sigma$. A l'avantage de mieux prendre en compte la « dangerosité du risque ».

Prime de risque et solvabilité

La prime de risque p s'obtient par *chargement* (safety loading) de la prime pure.

- Chargement proportionnel : $p = (1+\eta)\mathbf{E}\,S$. Avec le modèle i.i.d. ci-dessus, la probabilité de déficit devient

$$P(\text{déficit}) \simeq \Phi\Big(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\mu - p)\Big) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \Phi(-\infty) = 0.$$

- Chargement par l'écart-type : $p = \mathbf{E}\,S + \beta\sigma$. A l'avantage de mieux prendre en compte la « dangerosité du risque ».
- L'augmentation du nombre d'assurés n peut autoriser un chargement plus faible. Pb du marché concurrentiel.

Prime de risque et solvabilité

La prime de risque p s'obtient par *chargement* (safety loading) de la prime pure.

- Chargement proportionnel : $p = (1+\eta)\mathbf{E}\,S$. Avec le modèle i.i.d. ci-dessus, la probabilité de déficit devient

$$P(\text{déficit}) \simeq \Phi\Big(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\mu - p)\Big) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \Phi(-\infty) = 0.$$

- Chargement par l'écart-type : $p = \mathbf{E}\,S + \beta\sigma$. A l'avantage de mieux prendre en compte la « dangerosité du risque ».
- L'augmentation du nombre d'assurés n peut autoriser un chargement plus faible. Pb du marché concurrentiel.
- L'utilisation d'une réserve de stabilisation ou d'un capital initial K est nécessaire (au moins la 1$^{\text{re}}$année et de par la législation).

$$P(\text{déficit}) \simeq \Phi\Big(\frac{\sqrt{n}(\mu - p)}{\sigma} - \frac{K}{\sigma\sqrt{n}}\Big)$$

Lois des charges de sinistres

Les principales lois de probabilité utilisées pour modéliser le montant d'un sinistre (lorsqu'il y a sinistre) sont classées d'après le « poids » de la queue de distribution $\overline{F}(x) = P(X > x)$.

Poids	Loi	Queue $\overline{F}(x)$	$\mathbf{E}\,\mathrm{e}^{sX}$ fini ?
Très léger	$\mathrm{Weib}(\tau, \alpha),\ \tau > 1$	$\exp\left(-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\tau}\right)$	oui, $\forall s$
Léger	$\mathrm{Gam}(\nu, \beta)$	$\int_x^{+\infty} \frac{\beta^\nu}{\Gamma(\nu)} t^{\nu-1}\mathrm{e}^{-\beta t}\,\mathrm{d}t$	oui $\forall s < \beta$
Intermédiaire	Lognormale	$P(\mathrm{e}^Y > x),\ Y \sim \mathfrak{N}(\mu, \sigma)$	non
	$\mathrm{Weib}(\tau, \alpha),\ \tau < 1$		non
Lourd	$\mathrm{Par}(\theta, \alpha),\ \alpha > 1$	$\left(\frac{\theta}{\theta + x}\right)^{\alpha}$	non
Très lourd	$\mathrm{Par}(\theta, \alpha),\ \alpha \leq 1$		$\mathbf{E}\,X = +\infty$

Lois des nombres de sinistres

Trois lois classiques modélisant le nombre N de sinistres :

- Binomiale $\mathrm{Bin}(n, p)$: $P(N = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$,
  $\mathbf{E}\, N = np$, $\mathrm{Var}\, N = np(1 - p)$. Au plus un sinistre par « petit » intervalle de temps, indépendance des intervalles. . .

Lois des nombres de sinistres

Trois lois classiques modélisant le nombre N de sinistres :

- Binomiale $\mathrm{Bin}(n, p)$: $P(N = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$, $\mathbf{E}\,N = np$, $\mathrm{Var}\,N = np(1-p)$. Au plus un sinistre par « petit » intervalle de temps, indépendance des intervalles. . .
- Poisson $\mathrm{Pois}(\lambda)$: $P(N = k) = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$, $\mathbf{E}\,N = \mathrm{Var}\,N = \lambda$. Loi des évènements rares, modélise bien le nombre de sinistres d'une police individuelle.

Lois des nombres de sinistres

Trois lois classiques modélisant le nombre N de sinistres :

- Binomiale $\mathrm{Bin}(n,p)$: $P(N=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$,
  $\mathbf{E}\,N=np$, $\mathrm{Var}\,N=np(1-p)$. Au plus un sinistre par « petit » intervalle de temps, indépendance des intervalles...
- Poisson $\mathrm{Pois}(\lambda)$: $P(N=k)=\frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$, $\mathbf{E}\,N=\mathrm{Var}\,N=\lambda$. Loi des évènements rares, modélise bien le nombre de sinistres d'une police individuelle.
- Binomiale négative $\mathrm{NBin}(n,p)$: $P(N=k)=C_{n+k-1}^n p^n(1-p)^k$,
  $\mathbf{E}\,N=\frac{n(1-p)}{p}$, $\mathrm{Var}\,N=\frac{n(1-p)}{p^2}>\mathbf{E}\,N$.

Lois des nombres de sinistres

Trois lois classiques modélisant le nombre N de sinistres :

- Binomiale $\mathrm{Bin}(n,p)$: $P(N=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$, $\mathbf{E}\,N = np$, $\operatorname{Var} N = np(1-p)$. Au plus un sinistre par « petit » intervalle de temps, indépendance des intervalles...
- Poisson $\mathrm{Pois}(\lambda)$: $P(N=k) = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$, $\mathbf{E}\,N = \operatorname{Var} N = \lambda$. Loi des évènements rares, modélise bien le nombre de sinistres d'une police individuelle.
- Binomiale négative $\mathrm{NBin}(n,p)$: $P(N=k) = C_{n+k-1}^n p^n (1-p)^k$, $\mathbf{E}\,N = \frac{n(1-p)}{p}$, $\operatorname{Var} N = \frac{n(1-p)}{p^2} > \mathbf{E}\,N$.

La loi de Poisson modélise mal le nombre de sinistres d'un portefeuille en raison de l'hétérogénéité des assurés (exemple RC automobile).

Lois de Poisson mélange

Pour tenir compte de l'hétérogénéité du portefeuille, on peut considérer que le nombre moyen de sinistres varie d'un assuré à l'autre. Il est alors une v.a. $\lambda\Theta$, avec λ constante et $\mathbf{E}\,\Theta = 1$.

Lois de Poisson mélange

Pour tenir compte de l'hétérogénéité du portefeuille, on peut considérer que le nombre moyen de sinistres varie d'un assuré à l'autre. Il est alors une v.a. $\lambda\Theta$, avec λ constante et $\mathbf{E}\,\Theta = 1$.

Définition (loi $\mathrm{MPois}(\lambda, \Theta)$)

N suit la loi de Poisson mélange de moyenne λ et de niveau de risque relatif Θ, où Θ est une v.a. positive et $\mathbf{E}\,\Theta = 1$ si

$$P(N = k) = \mathbf{E}\left(\exp(-\lambda\Theta)\frac{(\lambda\Theta)^k}{k!}\right), \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Lois de Poisson mélange

Définition (loi $\mathrm{MPois}(\lambda, \Theta)$)

N suit la loi de Poisson mélange de moyenne λ et de niveau de risque relatif Θ, où Θ est une v.a. positive et $\mathbf{E}\,\Theta = 1$ si

$$P(N = k) = \mathbf{E}\left(\exp(-\lambda\Theta)\frac{(\lambda\Theta)^k}{k!}\right), \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

On vérifie que

$$\mathbf{E}\,N = \lambda \quad \text{et} \quad \operatorname{Var} N = \lambda + \lambda^2 \operatorname{Var}\Theta > \mathbf{E}\,N.$$

Lois de Poisson mélange

Définition (loi $\mathrm{MPois}(\lambda, \Theta)$)

N suit la loi de Poisson mélange de moyenne λ et de niveau de risque relatif Θ, où Θ est une v.a. positive et $\mathbf{E}\,\Theta = 1$ si

$$P(N = k) = \mathbf{E}\left(\exp(-\lambda\Theta)\frac{(\lambda\Theta)^k}{k!}\right), \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

On vérifie que

$$\mathbf{E}\,N = \lambda \quad \text{et} \quad \mathrm{Var}\,N = \lambda + \lambda^2\,\mathrm{Var}\,\Theta > \mathbf{E}\,N.$$

Exemple. Le modèle « bons risques - mauvais risques », où le portefeuille comporte deux types d'assurés, les « bons » pour qui le nombre de sinistres suit $\mathrm{Pois}(\lambda\theta_1)$ et les mauvais pour qui c'est $\mathrm{Pois}(\lambda\theta_2)$, avec $\theta_1 < 1 < \theta_2$. En posant $\rho = P(\Theta = \theta_1) = 1 - P(\Theta = \theta_2)$, on a $\rho\theta_1 + (1-\rho)\theta_2 = 1$ et

$$P(N = k) = \rho\frac{\mathrm{e}^{-\lambda\theta_1}(\lambda\theta_1)^k}{k!} + (1-\rho)\frac{\mathrm{e}^{-\lambda\theta_2}(\lambda\theta_2)^k}{k!}.$$

Modèle individuel

Dans ce modèle, on note S_i le montant cumulé(éventuellement nul) des sinistres payé au i^{e} assuré, pour la période d'assurance. La charge totale de sinistres pour un portefeuille de n assurés est donc

$$S^{\mathrm{ind}} = \sum_{i=1}^{n} S_i.$$

Modèle individuel

Dans ce modèle, on note S_i le montant cumulé(éventuellement nul) des sinistres payé au i^{e} assuré, pour la période d'assurance. La charge totale de sinistres pour un portefeuille de n assurés est donc

$$S^{\text{ind}} = \sum_{i=1}^{n} S_i.$$

Les S_i sont indépendantes, mais pas forcément de même loi. On a de plus $P(S_i = 0) > 0$. En particulier les S_i n'ont pas de densité.

Modèle individuel

Dans ce modèle, on note S_i le montant cumulé(éventuellement nul) des sinistres payé au i^{e} assuré, pour la période d'assurance. La charge totale de sinistres pour un portefeuille de n assurés est donc

$$S^{\text{ind}} = \sum_{i=1}^{n} S_i.$$

Les S_i sont indépendantes, mais pas forcément de même loi. On a de plus $P(S_i = 0) > 0$. En particulier les S_i n'ont pas de densité.
La fonction de répartition $G^{\text{ind}}(x) = P(S^{\text{ind}} \leq x)$ est assez difficile à calculer en général. Sa connaissance donne la probabilité de ruine en fonction du capital initial : $1 - G^{\text{ind}}(\text{primes} + \text{capital})$, ou le capital initial à investir en fonction d'une probabilité de ruine ε fixée...

Modèle collectif

Dans ce modèle, on considère qu'il y a au cours de la période d'assurance un nombre aléatoire N de remboursements de sinistres, on note X_i le i^{e} remboursement, sans tenir compte de l'assuré concerné. La charge totale de sinistre est donc

$$S^{\text{coll}} = \sum_{i=1}^{N} X_i,$$

Modèle collectif

Dans ce modèle, on considère qu'il y a au cours de la période d'assurance un nombre aléatoire N de remboursements de sinistres, on note X_i le i^{e} remboursement, sans tenir compte de l'assuré concerné. La charge totale de sinistre est donc

$$S^{\mathrm{coll}} = \sum_{i=1}^{N} X_i,$$

on suppose de plus que

- les X_i sont indépendantes et de même loi,
- $(X_i)_{i\geq 1}$ est indépendante de N (indépendance coûts-fréquence).

Modèle collectif

Dans ce modèle, on considère qu'il y a au cours de la période d'assurance un nombre aléatoire N de remboursements de sinistres, on note X_i le i^{e} remboursement, sans tenir compte de l'assuré concerné. La charge totale de sinistre est donc

$$S^{\mathrm{coll}} = \sum_{i=1}^{N} X_i,$$

on suppose de plus que

- les X_i sont indépendantes et de même loi,
- $(X_i)_{i\geq 1}$ est indépendante de N (indépendance coûts-fréquence).

On peut calculer facilement la transformée de Laplace L_S de $S = S^{\mathrm{coll}}$ en fonction de celle de X_1 et de la série génératrice φ_N de N.

$$L_S(t) := \mathbf{E} \exp(-tS), \qquad \varphi_N(u) := \mathbf{E}\,(u^N).$$

Calcul de L_S

$$
\begin{aligned}
L_S(t) = \mathbf{E}\exp\left(-t\sum_{i=1}^{N} X_i\right) &= \mathbf{E}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\exp\left(-t\sum_{i=1}^{N} X_i\right)\mathbf{1}_{\{N=k\}}\right)\\
&= \mathbf{E}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\exp\left(-t\sum_{i=1}^{k} X_i\right)\mathbf{1}_{\{N=k\}}\right)\\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}\mathbf{E}\left(\exp\left(-t\sum_{i=1}^{k} X_i\right)\mathbf{1}_{\{N=k\}}\right)\\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}P(N=k)\mathbf{E}\exp\left(-t\sum_{i=1}^{k} X_i\right)\\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}P(N=k)\big(L_{X_1}(t)\big)^k = \mathbf{E}\left(L_{X_1}(t)^N\right)
\end{aligned}
$$

Calcul de L_S

Proposition

La transformée de Laplace L_S de $S = S^{\mathrm{coll}}$ est donnée par

$$L_S(t) = \varphi_N\big(L_{X_1}(t)\big), \quad \varphi_N(u) = \mathbf{E}\,(u^N).$$

Calcul de L_S

Proposition

La transformée de Laplace L_S de $S = S^{\mathrm{coll}}$ est donnée par

$$L_S(t) = \varphi_N\big(L_{X_1}(t)\big), \quad \varphi_N(u) = \mathbf{E}\,(u^N).$$

Cas particulier important : si N est de loi $\mathrm{Pois}(\lambda)$,

$$L_S(t) = \exp\big(\lambda(L_{X_1}(t) - 1)\big).$$

Passage du modèle individuel au collectif

Proposition

Dans le modèle individuel, si les montants de sinistres S_i *peuvent s'écrire* $S_i = \sum_{k=1}^{N_i} Y_{i,k}$, *où pour chaque* i, *la suite* $(Y_{i,k})_{k\geq 1}$ *est i.i.d. de f.d.r.* F_i *et indépendante de* N_i, *laquelle est de loi* $\mathrm{Pois}(\lambda_i)$, *alors* S^{ind} *a même loi que* S^{coll} *où* N *suit la loi* $\mathrm{Pois}(\lambda)$ *avec*

$$\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i, \qquad P(X_j \leq x) = F(x) = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i F_i(x).$$

Passage du modèle individuel au collectif

Preuve : Il suffit de vérifier que S^{ind} et S^{coll} ont même transformée de Laplace.

$$\begin{aligned} L_{S^{\mathrm{ind}}}(t) = \prod_{i=1}^{n} L_{S_i(t)} &= \prod_{i=1}^{n} \exp\big(\lambda_i(L_{Y_{i,1}}(t)-1)\big) \\ &= \exp\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(L_{Y_{i,1}}(t)-1)\right) \\ &= \exp\left(\lambda\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda} L_{Y_{i,1}}(t)-1\right)\right) \end{aligned}$$

On remarque alors que la transformée de Laplace de la loi de f.d.r. F est $L = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} \lambda_i L_{Y_{i,1}}$, d'où :

$$\forall t \geq 0, \quad L_{S^{\mathrm{ind}}}(t) = \exp\big(\lambda(L(t)-1)\big) = L_{S^{\mathrm{coll}}}(t).$$

Passage du modèle individuel au collectif

Proposition

Dans le modèle individuel, si les montants de sinistres S_i peuvent s'écrire $S_i = \sum_{k=1}^{N_i} Y_{i,k}$, où pour chaque i, la suite $(Y_{i,k})_{k\geq 1}$ est i.i.d. de f.d.r. F_i et indépendante de N_i, laquelle est de loi $\mathrm{Pois}(\lambda_i)$, alors S^{ind} a même loi que S^{coll} où N suit la loi $\mathrm{Pois}(\lambda)$ avec

$$\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i, \qquad P(X_j \leq x) = F(x) = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i F_i(x).$$

Si les N_i ne suivent plus des lois de Poisson, mais des lois de Poisson mélange, la loi de S^{coll} n'est plus égale à celle de S^{ind}, mais en est une approximation dont on sait contrôler l'erreur.

Modèle discret de de Finetti

On s'intéresse à l'évolution du résultat technique au cours des années, avec les hypothèses simplificatrices suivantes.

1. On néglige les produits financiers.

Modèle discret de de Finetti

On s'intéresse à l'évolution du résultat technique au cours des années, avec les hypothèses simplificatrices suivantes.

1. On néglige les produits financiers.
2. Sinistralité stable au cours du temps.

Modèle discret de de Finetti

On s'intéresse à l'évolution du résultat technique au cours des années, avec les hypothèses simplificatrices suivantes.

1. On néglige les produits financiers.
2. Sinistralité stable au cours du temps.
3. Part de marché de la compagnie inchangée.

Modèle discret de de Finetti

On s'intéresse à l'évolution du résultat technique au cours des années, avec les hypothèses simplificatrices suivantes.

1. On néglige les produits financiers.
2. Sinistralité stable au cours du temps.
3. Part de marché de la compagnie inchangée.
4. Pas d'inflation.

Modèle discret de de Finetti

On s'intéresse à l'évolution du résultat technique au cours des années, avec les hypothèses simplificatrices suivantes.

1. On néglige les produits financiers.
2. Sinistralité stable au cours du temps.
3. Part de marché de la compagnie inchangée.
4. Pas d'inflation.

On note S_i la charge sinistre de l'exercice i, p l'encaissement annuel net des primes, soit $(1+\rho)\mathbf{E}\,S_i$, K le capital initial et R_i le résultat de l'exercice i.

Modèle discret de de Finetti

On s'intéresse à l'évolution du résultat technique au cours des années, avec les hypothèses simplificatrices suivantes.

1. On néglige les produits financiers.
2. Sinistralité stable au cours du temps.
3. Part de marché de la compagnie inchangée.
4. Pas d'inflation.

On note S_i la charge sinistre de l'exercice i, p l'encaissement annuel net des primes, soit $(1+\rho)\mathbf{E}\, S_i$, K le capital initial et R_i le résultat de l'exercice i. On a alors

$$R_0 = K, \quad R_1 = K + p - S_1, \quad R_i = R_{i-1} + p - S_i, \quad i \geq 2.$$

Modèle discret de de Finetti

On s'intéresse à l'évolution du résultat technique au cours des années, avec les hypothèses simplificatrices suivantes.

1. On néglige les produits financiers.
2. Sinistralité stable au cours du temps.
3. Part de marché de la compagnie inchangée.
4. Pas d'inflation.

On note S_i la charge sinistre de l'exercice i, p l'encaissement annuel net des primes, soit $(1+\rho)\mathbf{E}\, S_i$, K le capital initial et R_i le résultat de l'exercice i. On a alors

$$R_0 = K, \quad R_1 = K + p - S_1, \quad R_i = R_{i-1} + p - S_i, \quad i \geq 2.$$

On note

$$\Delta_i = R_i - R_{i-1} = p - S_i.$$

On suppose les S_i i.i.d.

Modèle de de Finetti, probabilité de ruine

On note $\Psi_{\mathrm{d}}(K, j)$ la probabilité que l'un au moins des j premiers exercices soit déficitaire :

$$\Psi_{\mathrm{d}}(K, j) = P\big(\exists i \in \{1, \dots, j\};\ R_i \leq 0 \mid R_0 = K\big)$$

Modèle de de Finetti, probabilité de ruine

On note $\Psi_{\mathrm{d}}(K,j)$ la probabilité que l'un au moins des j premiers exercices soit déficitaire :

$$\Psi_{\mathrm{d}}(K,j) = P\big(\exists i \in \{1,\dots,j\};\ R_i \leq 0 \mid R_0 = K\big)$$

Comme cette probabilité est croissante en j, on a

$$\Psi_{\mathrm{d}}(K,j) \uparrow \Psi_{\mathrm{d}}(K) = P\big(\exists i \in \mathbb{N}^*;\ R_i \leq 0 \mid R_0 = K\big)$$

Modèle de de Finetti, probabilité de ruine

On note $\Psi_{\mathrm{d}}(K, j)$ la probabilité que l'un au moins des j premiers exercices soit déficitaire :

$$\Psi_{\mathrm{d}}(K, j) = P\big(\exists i \in \{1, \dots, j\};\ R_i \leq 0 \mid R_0 = K\big)$$

Comme cette probabilité est croissante en j, on a

$$\Psi_{\mathrm{d}}(K, j) \uparrow \Psi_{\mathrm{d}}(K) = P\big(\exists i \in \mathbb{N}^*;\ R_i \leq 0 \mid R_0 = K\big)$$

Théorème (de Finetti)

Pour le modèle à temps discret ci-dessus, si $\mathbf{E} \exp(tS_1) < +\infty$ *pour* $0 < t \leq t_0 \leq +\infty$, *on a :*

$$\Psi_{\mathrm{d}}(K, j) \leq \Psi_{\mathrm{d}}(K) \leq \exp(-\gamma K),$$

où l'indice de risque γ *est défini comme la solution positive de l'équation :*

$$L_\Delta(t) = \mathbf{E} \exp(-t\Delta_i) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{E} \exp(tS_i) = \exp(pt).$$

Preuve du théorème de de Finetti

On montre par récurrence sur j que $\Psi_{\mathrm{d}}(K, j) \leq \exp(-\gamma K)$, puis $j \to +\infty$.

Preuve du théorème de de Finetti

On montre par récurrence sur j que $\Psi_{\mathrm{d}}(K, j) \leq \exp(-\gamma K)$, puis $j \to +\infty$.

C'est vrai pour $j = 0$ car $\Psi_{\mathrm{d}}(K, 0) = 0$.

Supposons l'inégalité vraie pour $j - 1$.

Preuve du théorème de de Finetti

On montre par récurrence sur j que $\Psi_{\mathrm{d}}(K,j) \leq \exp(-\gamma K)$, puis $j \to +\infty$.

C'est vrai pour $j=0$ car $\Psi_{\mathrm{d}}(K,0)=0$.

Supposons l'inégalité vraie pour $j-1$.

$$\begin{aligned}
\Psi_{\mathrm{d}}(K,j) &= P(R_1<0)+P\big(R_1\geq 0 \text{ et } \exists i \in]1,j];\ R_i<0\big)\\
&= P(S_1>K+p)+\int_0^{K+p}\Psi_{\mathrm{d}}(K+p-s_1,j-1)\,\mathrm{d}F_{S_1}(s_1)
\end{aligned}$$

Preuve du théorème de de Finetti

On montre par récurrence sur j que $\Psi_{\mathrm{d}}(K,j) \leq \exp(-\gamma K)$, puis $j \to +\infty$.

C'est vrai pour $j = 0$ car $\Psi_{\mathrm{d}}(K,0) = 0$.

Supposons l'inégalité vraie pour $j-1$.

$$\begin{aligned}\Psi_{\mathrm{d}}(K,j) &= P(R_1 < 0) + P\big(R_1 \geq 0 \text{ et } \exists i \in]1,j];\ R_i < 0\big)\\ &= P(S_1 > K+p) + \int_0^{K+p} \Psi_{\mathrm{d}}(K+p-s_1, j-1)\,\mathrm{d}F_{S_1}(s_1)\end{aligned}$$

Or $\Psi_{\mathrm{d}}(K+p-s_1, j-1) = 1$ pour $K+p < s_1$, donc

$$\int_{K+p}^{+\infty} \Psi_{\mathrm{d}}(K+p-s_1, j-1)\,\mathrm{d}F_{S_1}(s_1) = \int_{K+p}^{+\infty} \mathrm{d}F_{S_1}(s_1) = P(S_1 > K+p),$$

d'où en recollant les deux intégrales :

Preuve du théorème de de Finetti

On montre par récurrence sur j que $\Psi_{\mathrm{d}}(K,j) \leq \exp(-\gamma K)$, puis $j \to +\infty$.

C'est vrai pour $j = 0$ car $\Psi_{\mathrm{d}}(K,0) = 0$.

Supposons l'inégalité vraie pour $j-1$.

$$\begin{aligned}\Psi_{\mathrm{d}}(K,j) &= P(R_1 < 0) + P\big(R_1 \geq 0 \text{ et } \exists i \in]1,j];\ R_i < 0\big)\\ &= P(S_1 > K+p) + \int_0^{K+p} \Psi_{\mathrm{d}}(K+p-s_1, j-1)\,\mathrm{d}F_{S_1}(s_1)\end{aligned}$$

Or $\Psi_{\mathrm{d}}(K+p-s_1, j-1) = 1$ pour $K+p < s_1$, donc

$$\int_{K+p}^{+\infty} \Psi_{\mathrm{d}}(K+p-s_1, j-1)\,\mathrm{d}F_{S_1}(s_1) = \int_{K+p}^{+\infty} \mathrm{d}F_{S_1}(s_1) = P(S_1 > K+p),$$

d'où en recollant les deux intégrales :

$$\Psi_{\mathrm{d}}(K,j) = \int_0^{+\infty} \Psi_{\mathrm{d}}(K+p-s_1, j-1)\,\mathrm{d}F_{S_1}(s_1)$$

Preuve du théorème de de Finetti (fin)

En appliquant l'hypothèse de récurrence, on obtient :

$$\begin{aligned}\Psi_{\mathrm{d}}(K,j) &\leq \int_0^{+\infty} \exp\big(-\gamma(K+p-s_1)\big)\,\mathrm{d}F_{S_1}(s_1)\\ &= \exp(-\gamma K)\,\mathbf{E}\,\exp\big(\gamma(S_1-p)\big)\\ &= \exp(-\gamma K),\end{aligned}$$

en utilisant la définition de γ.

Modèle à temps continu - processus de Poisson

Dans le modèle à temps continu, on représente le nombre de sinistres au cours du temps par un processus de comptage $(N_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$, généralement un processus de Poisson. En voici deux définitions équivalentes.

Modèle à temps continu - processus de Poisson

Dans le modèle à temps continu, on représente le nombre de sinistres au cours du temps par un processus de comptage $(N_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$, généralement un processus de Poisson. En voici deux définitions équivalentes.

Définition

Un processus de Poisson homogène sur $\mathbb{R}_+$, de paramètre $\lambda > 0$ est un processus de comptage $(N_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ qui saute de $+1$ aux instants aléatoires T_i, les variables aléatoires $T_{i+1} - T_i$ étant indépendantes de même loi exponentielle de paramètre λ.

Modèle à temps continu - processus de Poisson

Dans le modèle à temps continu, on représente le nombre de sinistres au cours du temps par un processus de comptage $(N_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$, généralement un processus de Poisson. En voici deux définitions équivalentes.

Définition

Un processus de Poisson homogène sur $\mathbb{R}_+$, de paramètre $\lambda > 0$ est un processus de comptage $(N_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ qui saute de $+1$ aux instants aléatoires T_i, les variables aléatoires $T_{i+1} - T_i$ étant indépendantes de même loi exponentielle de paramètre λ.

Définition

Un processus de Poisson homogène sur $\mathbb{R}_+$, de paramètre $\lambda > 0$ est un processus de comptage $(N_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ à accroissements indépendants tels que pour tous $t, s \geq 0$, $N_{t+s} - N_t$ suive une loi $\mathrm{Pois}(\lambda s)$.

Modèle à temps continu - processus de risque

L'évolution du résultat de la compagnie au cours du temps est représentée par le processus de risque :

$$R_t = K + ct - \sum_{i=1}^{N_t} X_i$$

où

Modèle à temps continu - processus de risque

L'évolution du résultat de la compagnie au cours du temps est représentée par le processus de risque :

$$R_t = K + ct - \sum_{i=1}^{N_t} X_i$$

où

- K est le capital initial.

Modèle à temps continu - processus de risque

L'évolution du résultat de la compagnie au cours du temps est représentée par le processus de risque :

$$R_t = K + ct - \sum_{i=1}^{N_t} X_i$$

où

- K est le capital initial.
- c est le taux constant de rentrée des primes.

Modèle à temps continu - processus de risque

L'évolution du résultat de la compagnie au cours du temps est représentée par le processus de risque :

$$R_t = K + ct - \sum_{i=1}^{N_t} X_i$$

où

- K est le capital initial.
- c est le taux constant de rentrée des primes.
- Les X_i montants de sinistres sont i.i.d. (cf. modèle collectif).

Modèle à temps continu - processus de risque

L'évolution du résultat de la compagnie au cours du temps est représentée par le processus de risque :

$$R_t = K + ct - \sum_{i=1}^{N_t} X_i$$

où

- K est le capital initial.
- c est le taux constant de rentrée des primes.
- Les X_i montants de sinistres sont i.i.d. (cf. modèle collectif).
- $(N_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est un processus de Poisson homogène d'intensité λ.

Modèle à temps continu - processus de risque

L'évolution du résultat de la compagnie au cours du temps est représentée par le processus de risque :

$$R_t = K + ct - \sum_{i=1}^{N_t} X_i$$

où

- K est le capital initial.
- c est le taux constant de rentrée des primes.
- Les X_i montants de sinistres sont i.i.d. (cf. modèle collectif).
- $(N_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est un processus de Poisson homogène d'intensité λ.
- $(N_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ et $(X_i)_{i\geq 1}$ sont indépendants.

Modèle à temps continu - probabilité de ruine

Soit T l'instant de ruine de la compagnie défini par

$$T := \inf\{t \geq 0;\ R_t < 0\} = \inf\{t \geq 0;\ \ S_t > K + ct\}, \quad S_t := \sum_{i=1}^{N_t} X_i.$$

avec la convention habituelle $\inf \emptyset = +\infty$.

Modèle à temps continu - probabilité de ruine

Soit T l'instant de ruine de la compagnie défini par

$$T := \inf\{t \geq 0;\ R_t < 0\} = \inf\{t \geq 0;\ \ S_t > K + ct\}, \quad S_t := \sum_{i=1}^{N_t} X_i.$$

avec la convention habituelle $\inf \emptyset = +\infty$.
La probabilité de ruine sur horizon infini est $\Psi(K)$ définie par

$$\Psi(K) = P(T < +\infty \mid R_0 = K) = P\Big(\inf_{s \geq 0} R_s < 0 \mid R_0 = K\Big).$$

Modèle à temps continu - probabilité de ruine

Soit T l'instant de ruine de la compagnie défini par

$$T := \inf\{t \geq 0;\ R_t < 0\} = \inf\{t \geq 0;\ \ S_t > K + ct\}, \quad S_t := \sum_{i=1}^{N_t} X_i.$$

avec la convention habituelle $\inf \emptyset = +\infty$.
La probabilité de ruine sur horizon infini est $\Psi(K)$ définie par

$$\Psi(K) = P(T < +\infty \mid R_0 = K) = P\Big(\inf_{s \geq 0} R_s < 0 \mid R_0 = K\Big).$$

Proposition

Notons $\mu := \mathbf{E}\, X_i$.

- *Si* $c > \lambda\mu$, *alors pour tout* $K \geq 0$, $\Psi(K) < 1$.
- *Si* $c \leq \lambda\mu$, *alors pour tout* $K \geq 0$, $\Psi(K) = 1$.

C'est une conséquence de la loi forte des grands nombres pour une somme d'un nombre aléatoire de v.a. ...

Modèle à temps continu - inégalité de Lundberg

Dans le cas où les X_i sont de loi exponentielle de paramètre $1/\mu$, on a

$$\Psi(K) = \frac{\lambda\mu}{c} \exp\Big(-\Big(\frac{1}{\mu} - \frac{\lambda}{c}\Big) K\Big).$$

On considère maintenant des sinistres X_i dont la loi est du type de Cramér, c'est-à-dire :

$$\exists t > 0 \text{ tel que } M_{X_1}(t) := \mathbf{E} \exp(tX_1) < +\infty.$$

Modèle à temps continu - inégalité de Lundberg

On considère maintenant des sinistres X_i dont la loi est du type de Cramér, c'est-à-dire :

$$\exists t > 0 \text{ tel que } M_{X_1}(t) := \mathbf{E} \exp(tX_1) < +\infty.$$

Théorème (Lundberg)

La probabilité de ruine sur horizon infini vérifie

$$\Psi(K) \leq \exp(-\gamma K),$$

où le coefficient d'ajustement γ est l'unique solution strictement positive de :

$$\lambda + ct = \lambda M_{X_1}(t).$$