Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IFP

Année 2002-2003

Annales Corrigées de l'Année 2002-2003

Licence de Mathématiques : Intégration, Analyse de Fourier et Probabilités

Ce polycopié regroupe les devoirs à la maison, D.S. et examens donnés en I.F.P. au cours de l'année universitaire 2002–2003. Tous les énoncés sont accompagnés de solutions entièrement rédigées. Il va de soi que ces corrigés ne pourront être utiles qu'aux lecteurs ayant déjà cherché à résoudre par eux-mêmes les questions posées.

Je remercie tous mes collègues de l'équipe enseignante d'I.F.P. 2002–03, pour leur contribution à ce travail et pour m'avoir donné leur accord pour l'inclusion des énoncés et corrigés correspondants dans ces annales. Le D.M. n° 2 a été pris en charge par Philippe Heinrich et Laurence Marsalle, le D.M. n° 3 par Raymond Moché et François Recher, le D.M. n° 4 par Youri Davydov, Sandra Delaunay et Charles Suquet.

L'ensemble du document est disponible sur Internet à l'URL

`http://math.univ-lille1.fr/~suquet/`

Les pages de cette version électronique y sont signées pour éviter toute exploitation commerciale abusive.

Les remarques, critiques et questions des lecteurs seront les bienvenues.

Villeneuve d'Ascq, le 19 octobre 2003

Charles Suquet

Index thématique

Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IFP **Année 2002-03**

Devoir n° 1

À rendre dans la semaine du 28 octobre 2002

Ex 1. *Contrôleur contre fraudeur*

Une compagnie de métro pratique les tarifs suivants. Le ticket donnant droit à un trajet coûte 1 € ; les amendes sont fixées à 20 € pour la première infraction constatée, 40 € pour la deuxième et 400 € pour la troisième. La probabilité p pour un voyageur d'être contrôlé au cours d'un trajet est supposée constante et connue de la seule compagnie. Un fraudeur décide de prendre systématiquement le métro sans payer jusqu'à la deuxième amende et d'arrêter alors de frauder. On note T le nombre de trajets effectués jusqu'à la deuxième amende (T est le numéro du trajet où le fraudeur est contrôlé pour la deuxième fois). On note $q = 1 - p$ la probabilité de faire un trajet sans contrôle.

1) Montrer que la loi de T est donnée par

$$\mathbf{P}(T = k) = (k-1)p^2q^{k-2}, \quad k \geq 2.$$

2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\mathbf{P}(T > n)$. *Indication* : on pourra commencer par chercher une formule explicite pour la somme de la série entière

$$f(x) := \sum_{k=n+1}^{+\infty} x^{k-1},$$

puis pour sa dérivée terme à terme.

3) Calculer numériquement $\mathbf{P}(T > 60)$ (pourquoi s'intéresse-t-on à cette quantité ?) lorsque $p = 1/10$ et lorsque $p = 1/20$.

4) D'un point de vue purement financier (et donc hors de toute considération de moralité), quel conseil donneriez vous au fraudeur ?

Ex 2. Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note $p_k := P(X = k)$. On suppose que X a une espérance mathématique $\mathbf{E}X$ finie et que la suite $(p_k)_{k\geq 1}$ est *décroissante* sur $\mathbb{N}^*$.

1) Démontrer l'inégalité :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(X = k) < \frac{2\mathbf{E}X}{k^2}. \qquad (1)$$

Indication : Considérer la somme partielle de rang k de la série définissant $\mathbf{E}X$.

2) L'inégalité (1) reste-t-elle vraie sans l'hypothèse de décroissance de $(p_k)_{k\geq 1}$?

3) Est-il possible qu'il existe une constante $c > 0$ et un entier k_0 tels que :

$$\forall k \geq k_0, \quad P(X = k) \geq \frac{c\mathbf{E}X}{k^2}? \tag{2}$$

Ex 3. *Sommabilité...*

Soit E un espace vectoriel normé, I un ensemble infini d'indices et $\{u_i,\ i \in I\}$ une famille de vecteurs de E. Pour toute partie finie K de I on note

$$S_K := \sum_{i\in K} u_i.$$

On dit que $\{u_i,\ i \in I\}$ est *intrinsèquement sommable* et de somme $S \in E$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie finie $J = J_\varepsilon$ de I telle que

$$\forall K \text{ fini}, \quad J \subset K \subset I \quad \Rightarrow \quad \|S - S_K\| \leq \varepsilon.$$

L'appellation « intrinsèquement sommable » n'est pas classique et est locale à cet exercice. Elle est destinée à éviter la confusion avec la définition de la sommabilité vue en cours (pour un ensemble d'indices I *dénombrable*).

1) Montrer que si $\{u_i,\ i \in I\}$ est *intrinsèquement sommable*, l'ensemble

$$I' := \{i \in I;\ u_i \neq 0\}$$

est au plus dénombrable.

2) Montrer que si $\{u_i,\ i \in I\}$ est *intrinsèquement sommable* et si I' défini ci-dessus est infini, la série $\displaystyle\sum_{i\in I'} u_i$ est commutativement convergente, c'est-à-dire que pour toute bijection $\varphi : \mathbb{N} \to I'$, la série $\sum_{k=0}^{+\infty} u_{\varphi(k)}$ converge et sa somme ne dépend pas de φ.

3) Soit I dénombrable et supposons la série $\sum_{i\in I} u_i$ commutativement convergente et de somme S. Montrer que $\{u_i,\ i \in I\}$ est intrinsèquement sommable et de somme S. *Indication* : supposer que $\{u_i\ i \in I\}$ n'est pas intrinsèquement sommable et construire une bijection σ de $\mathbb{N} \to I$ pour laquelle la série de terme général $u_{\sigma(j)}$ ne converge pas vers S.

4) Soit $\{u_i,\ i \in I\}$ une famille infinie dans $\mathbb{R}_+$ telle que

$$M := \sup_{K \text{ fini } \subset I} \sum_{i\in K} u_i < +\infty.$$

Montrer que $\{u_i,\ i \in I\}$ est intrinsèquement sommable et de somme M.

5) Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré où μ est une mesure finie. On suppose de plus que la tribu $\mathcal{F}$ possède les singletons ($\forall \omega \in \Omega,\ \{\omega\} \in \mathcal{F}$). On dit que μ a une masse ponctuelle en ω si $\mu(\{\omega\}) > 0$. Déduire de la question précédente que l'ensemble des ω où μ a une masse ponctuelle est au plus dénombrable. Généraliser au cas où μ est σ-finie.

6) Déduire de la question précédente que si F est la fonction de répartition d'une mesure finie sur $(\mathbb{R}, \mathrm{Bor}(\mathbb{R}))$, l'ensemble de ses points de sauts (*i.e.* les $a \in \mathbb{R}$ tels que $F(a^-) < F(a)$) est au plus dénombrable.

Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IFP **Année 2002-03**

Devoir n° 2

À rendre dans la semaine du 18 novembre 2002

Problème.

Le but du problème est de construire un espace probabilisé modélisant une suite infinie de tirages à pile ou face avec une pièce (éventuellement) truquée.

Rappelons que si E et F sont des ensembles, la notation F^E désigne l'ensemble des applications de E dans F. Dans le cas particulier où $E = \{1, \dots, n\}$, l'ensemble $F^{\{1,\dots,n\}}$ s'identifie à $F^n = F \times \cdots \times F$.

On représente les suites infinies de tirages à pile ou face comme les éléments de l'ensemble

$$\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}^*}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit π_n la fonction sur Ω à valeurs dans $\{0,1\}$ définie par $\pi_n(\omega) = \omega(n)$; cette fonction représente le résultat du n-ième tirage.

Soit p un réel fixé appartenant à $]0,1[$. On veut construire une tribu $\mathcal{F}$ sur Ω rendant les fonctions π_n mesurables, et une probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{F})$ telle que pour tout $n \geq 1$,

$$\mathsf{P}\{\pi_n = 1\} = p, \quad \mathsf{P}\{\pi_n = 0\} = 1 - p.$$

1) Soit $\mathcal{G}$ une tribu sur Ω. Montrer que π_n est $\mathcal{G}$-$\mathcal{P}(\{0,1\})$ mesurable si et seulement si les ensembles $\{\pi_n = 1\}$ et $\{\pi_n = 0\}$ appartiennent à $\mathcal{G}$. La réunion $\bigcup_{n\geq 1} \pi_n^{-1}\big(\mathcal{P}(\{0,1\})\big)$ est-elle une tribu ?

2) Posons $\Omega_n = \{0,1\}^n$ et $\Omega^{(n)} = \{0,1\}^{\mathbb{N}^*\setminus\{1,\dots,n\}}$ de sorte que $\Omega = \Omega_n \times \Omega^{(n)}$. Soit f_n la fonction de Ω dans Ω_n définie par $f_n(\omega) = \big(\pi_1(\omega), \dots, \pi_n(\omega)\big)$ et soit $\mathcal{F}_n = f_n^{-1}\big(\mathcal{P}(\Omega_n)\big)$. Montrer que :

a) $\mathcal{F}_n$ est une tribu,

b) $\mathcal{F}_n = \{A \times \Omega^{(n)}, A \subset \Omega_n\}$,

c) les fonctions $\pi_1, \dots, \pi_n$ sont $\mathcal{F}_n$-$\mathcal{P}(\{0,1\})$ mesurables.

3) Pour tout $C \in \mathcal{F}_n$, on pose

$$\mathsf{P}_n(C) = \sum_{x \in f_n(C)} p^{|x|}(1-p)^{n-|x|},$$

où $|x|$ désigne le nombre de coordonnées de x égales à 1 ; plus formellement, on pose $|x| = \mathrm{Card}\big\{k \in \{1, \dots, n\} \,:\, x(k) = 1\big\}$.

Montrer que P_n est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F}_n)$ et que pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$,

$$\mathsf{P}_n\{\pi_k = 1\} = p.$$

4) Montrer que la suite $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ est croissante. En déduire que $\bigcup_{n\geq 1} \mathcal{F}_n$ est une semi-algèbre sur Ω que l'on notera $\mathcal{C}$ dans la suite du problème.

5) Soit P la fonction d'ensemble sur $\mathcal{C}$ définie par

$$\mathsf{P}(C) = \mathsf{P}_n(C) \text{ si } C \in \mathcal{F}_n.$$

Montrer que :

a) P est bien définie (vérifier que P_n et P_{n+1} coïncident sur $\mathcal{F}_n$),

b) P est additive sur $\mathcal{C}$,

c) $\mathsf{P}(\Omega) = 1$ et $\mathsf{P}(\emptyset) = 0$.

6) Soit $(C_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante d'éléments de $\mathcal{C}$. On veut établir que si les C_i sont tous non vides, alors

$$\bigcap_{i\in\mathbb{N}} C_i \neq \emptyset.$$

Pour cela, on justifiera la construction suivante d'un élément $\bar{\omega}$ de Ω :

- on choisit $\bar{\omega}(1)$ dans $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} \pi_1(C_i)$,
- $\bar{\omega}(1), \dots, \bar{\omega}(k)$ étant choisis, on choisit alors $\bar{\omega}(k+1)$ dans

$$\bigcap_{i\in\mathbb{N}} \pi_{k+1}\Bigg(C_i \cap f_k^{-1}\Big(\big\{\big(\bar{\omega}(1), \dots, \bar{\omega}(k)\big)\big\}\Big)\Bigg).$$

Montrer que $\bar{\omega}$ appartient à $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} C_i$.

Indication : pour C appartenant à $\mathcal{F}_n$, on a l'équivalence

$$\omega \in C \iff \big(\omega(1), \dots, \omega(n)\big) \in f_n(C).$$

7) Montrer que si $(C_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante d'éléments de $\mathcal{C}$ tendant vers $\emptyset$, alors

$$\lim_{i\to+\infty} \mathsf{P}(C_i) = 0.$$

8) Montrer que si $(C_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite croissante d'éléments de $\mathcal{C}$ dont la réunion appartient encore à $\mathcal{C}$, alors

$$\lim_{i\to+\infty} \mathsf{P}(C_i) = \mathsf{P}(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} C_i).$$

9) Montrer que P est sous-σ-additive sur $\mathcal{C}$.

10) Conclure en appliquant le théorème d'extension du cours.

Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IFP **Année 2002-03**

Devoir Surveillé, 27 novembre 2002

Conditions de déroulement de l'épreuve :
Durée : 4 heures.
Les calculatrices sont interdites.
Liste exhaustive des documents autorisés :

1. Polycopié de DEUG *Introduction au calcul des probabilités.*
2. Polycopié du *cours* d'IFP 2002-2003 (Chapitres 1 à 4, additifs et erratum compris).
3. une feuille *manuscrite* recto verso format standard A4, pouvant contenir des extraits du cours à votre choix, à l'exclusion de tout corrigé d'exercice.

Le barème n'est donné qu'à titre indicatif pour vous aider à gérer votre temps et n'a pas valeur contractuelle.

Ex 1. *(3 points).*
Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire positive définie sur cet espace.

1) Montrer l'existence d'une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires *discrètes* définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ telle que $X_n(\omega)$ converge en croissant (quand n tend vers $+\infty$) vers $X(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$.

2) On note F_n et F les fonctions de répartition respectives de X_n et X. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_n(x)$ converge en décroissant vers $F(x)$.
Indication : considérer dans $\mathcal{F}$ la suite d'évènements $\big(\{X_n \leq x\}\big)_{n\in\mathbb{N}}$.

Ex 2. *Loi uniforme sur la boule unité en grande dimension (4 points).*
Dans tout l'exercice, on notera λ_d la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$, $B_d(0,r)$ la boule fermée dans $\mathbb{R}^d$ de centre 0 et de rayon r, pour la distance associée à la norme euclidienne

$$\|x\|^2 := \sum_{i=1}^{d} x_i^2, \quad x = (x_1, \dots, x_d)$$

et $v(d) := \lambda_d\big(B_d(0,1)\big)$. On ne cherchera pas à expliciter la constante strictement positive $v(d)$.

1) En utilisant une propriété de la mesure de Lebesgue, calculer $\lambda_d\big(B_d(0,r)\big)$ en fonction de r et $v(d)$.

2) Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et $U : \Omega \to \mathbb{R}^d$ un vecteur aléatoire de loi uniforme sur $B_d(0,1)$. On a donc

$$\forall A \in \mathrm{Bor}(\mathbb{R}^d), \quad \mathbf{P}(U \in A) = \frac{\lambda_d\big(A \cap B_d(0,1)\big)}{\lambda_d\big(B_d(0,1)\big)} = \frac{1}{v(d)}\lambda_d\big(A \cap B_d(0,1)\big).$$

Expliquer pourquoi $R := \|U\|$ est une variable aléatoire réelle et calculer sa fonction de répartition F.

3) On dit que le réel m est *une* médiane de la variable aléatoire réelle Y s'il vérifie à la fois $\mathbf{P}(Y \leq m) \geq 1/2$ et $\mathbf{P}(Y \geq m) \geq 1/2$. Montrer que R a une unique médiane que l'on calculera.

4) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note U_n un vecteur aléatoire de loi uniforme sur $B_n(0,1)$ et $R_n := \|U_n\|$. Pour $0 < \varepsilon < 1$, étudier la limite de $\mathbf{P}(1 - \varepsilon < R_n \leq 1)$ quand n tend vers $+\infty$. Commenter le résultat obtenu.

Ex 3. *(4 points).*
On note λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

1) Soit $g : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}_+$, borélienne. Montrer en utilisant le théorème de transfert que :

$$\forall c > 0, \quad \int_{\mathbb{R}} g(cx)\,\mathrm{d}\lambda(x) = \frac{1}{c}\int_{\mathbb{R}} g(y)\,\mathrm{d}\lambda(y).$$

2) Soit $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$, λ-intégrable sur $\mathbb{R}$ et $\alpha > 0$ une constante. Montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} |n^{-\alpha} f(nx)|\,\mathrm{d}\lambda(x) < +\infty.$$

3) En déduire que pour λ-presque tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to+\infty} n^{-\alpha} f(nx) = 0.$$

4) Construire un exemple de fonction f λ-intégrable sur $\mathbb{R}$, de la forme $f = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \mathbf{1}_{I_k}$, où les I_k sont des intervalles non réduits à un point et telle que

$$\lim_{n\to+\infty} n^{-\alpha} f(n) = +\infty.$$

Problème. *(9 points)*
On note λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Le but du problème est d'établir une inégalité entre l'intégrale de la dérivée presque partout d'une fonction croissante et la variation de cette fonction.

1) Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, borélienne et λ-intégrable sur tout intervalle borné de $\mathbb{R}$. On suppose que g a une limite à droite au point a, notée $g(a+0)$. Prouver que

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{1}{h}\int_{[a,a+h]} g(x)\,\mathrm{d}\lambda(x) = g(a+0).$$

Indication : les seuls ingrédients de la preuve sont la définition de la limite à droite et les propriétés élémentaires de l'intégrale.

2) Montrer que si une fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est croissante, elle est borélienne.

3) Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, croissante. Expliquer pourquoi F est λ-intégrable sur tout intervalle d'extrémités a, b, $-\infty < a < b < +\infty$.

On suppose dans toute la suite que $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est croissante, continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$. On admettra[1] que l'ensemble D des points où F est dérivable est un borélien de $\mathbb{R}$ et que $\lambda(D^c) = 0$. On définit la fonction f par :

$$f(x) := \begin{cases} F'(x) & \text{si } x \in D, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On se propose de prouver que pour tous réels a, b $(-\infty < a < b < +\infty)$,

$$\int_{[a,b]} f \, \mathrm{d}\lambda \leq F(b) - F(a). \tag{3}$$

4) Montrer que f est borélienne positive.

5) On fixe une suite (h_n) de réels strictement positifs, convergente vers 0. Comparer les intégrales

$$\int_{[a,b]} f(x) \, \mathrm{d}\lambda(x) \quad \text{et} \quad \int_{[a,b]} \liminf_{n\to+\infty} \frac{F(x+h_n) - F(x)}{h_n} \, \mathrm{d}\lambda(x).$$

6) Justifier l'égalité $\int_{[a,b]} F(x+h) \, \mathrm{d}\lambda(x) = \int_{[a+h,b+h]} F(y) \, \mathrm{d}\lambda(y)$ et l'utiliser pour montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{[a,b]} \frac{F(x+h_n) - F(x)}{h_n} \, \mathrm{d}\lambda(x) = F(b+0) - F(a+0).$$

7) Prouver (3).

8) Donner un exemple simple de fonction F satisfaisant les hypothèses ci-dessus et pour laquelle on peut avoir l'inégalité stricte dans (3), disons pour $a = 0$ et $b = 1$.

[1] Un théorème de Lebesgue affirme que toute fonction monotone sur $\mathbb{R}$ est dérivable λ-presque partout sur $\mathbb{R}$. La connaissance de ce théorème n'est pas utile à la solution de cet exercice.

Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IFP **Année 2002-03**

Devoir nº 3
À rendre dans la semaine du 16 décembre 2002

Problème 1

1 - Démontrer que la fonction Γ définie sur $]0,+\infty[$ par

$$\forall x > 0, \quad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$ et que pour tout entier $n \geq 1$, sa dérivée d'ordre n est donnée par

$$\forall x > 0, \quad \Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}(\log t)^n t^{x-1}\,\lambda(\,\mathrm{d}t).$$

2 - Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{s-1}\mathrm{e}^{-at}\lambda(\,\mathrm{d}t)$, pour tous réels $a, s > 0$, puis démontrer que pour tout réel $s > 1$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{\mathrm{e}^t - 1}\,\lambda(\,\mathrm{d}t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Gamma(s)}{n^s}\cdot$$

3 - Démontrer que pour tout entier $n \geq 0$,

$$\int_0^{+\infty} t^{2n}\mathrm{e}^{-t^2}\,\lambda(\,\mathrm{d}t) = \frac{1}{2}\Gamma\Big(n + \frac{1}{2}\Big)\cdot$$

4 - Démontrer que pour tout réel a :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\cos(at)\,\lambda(\,\mathrm{d}t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\exp\big(-\frac{a^2}{4}\big).$$

Problème 2

L'objet de ce problème est de démontrer que pour tout borélien B de $\mathbb{R}$ de mesure de Lebesgue finie,

$$\text{(1)} \qquad \int_B \cos^2(nx)\,\lambda(\,\mathrm{d}x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}\lambda(B),$$

puis d'appliquer ce résultat.

1 - Démontrer la propriété (1) lorsque B est un intervalle $]a, b[$, $a < b$.

2 - Étendre ensuite cette propriété au cas où B est un ouvert borné quelconque U de $\mathbb{R}$.
Indication : On pourra utiliser le théorème de topologie suivant, dû à Cantor, voir le cours, Lemme 17, premier chapitre :

> *Tout ouvert non vide U de $\mathbb{R}$ s'écrit de manière unique comme réunion d'une famille finie ou infinie dénombrable d'intervalles ouverts non vides et deux à deux disjoints, appelés composantes de U.*

3 - Pour passer au cas général d'un borélien borné quelconque B, on admettra (voir les Annales corrigées 2001-02, Devoir 2, page 5) que :

> *Soit m une mesure sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$, $d \geq 1$, telle que la mesure de tout borélien borné soit finie. Alors pour tout borélien B et quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un fermé F_ε et un ouvert U_ε tels que $F_\varepsilon \subseteq B \subseteq U_\varepsilon$ et $m(U_\varepsilon \setminus F_\varepsilon) \leq \varepsilon$*

3.bis - (pour les redoublants) Démontrer directement le résultat précédent en développant la fonction $\mathbf{1}_B$ en série de Fourier.

4 - Etendre (1) pour tout borélien B tel que $\lambda(B) < +\infty$ (un tel borélien n'est pas nécessairement borné). Indication (à justifier) :

$$\int_B \cos^2(nx)\lambda(\,\mathrm{d}x) = \sum_{j\in\mathbf{N}} \int_{B_j} \cos^2(nx)\lambda(\,\mathrm{d}x),$$

où $B_j := \{x \in B;\ j \leq |x| < j+1\}$.

4.bis - (pour les redoublants) Démontrer directement ce résultat à l'aide du théorème de Riemann-Lebesgue.

5 - Application : B désignant toujours un borélien de $\mathbb{R}$ tel que $\lambda(B) < +\infty$, soit $(a_n,\ n \geq 1)$ une suite réelle. Démontrer que si $\big(a_n \cos(n\bullet),\ n \geq 1\big)$ converge λ-presque partout sur B vers la fonction nulle et si $\lambda(B) > 0$ alors $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Indication : on raisonnera par l'absurde en supposant que

$$0 < \limsup_{n\to+\infty} a_n^2 \leq +\infty.$$

Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IFP **Année 2002-03**

Devoir nº 4

À rendre dans la semaine du 6 janvier 2003

Ex 1. *Application du théorème de Fubini à l'interversion série-intégrale*

1) Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction admettant sur I le développement en série entière *absolument* convergeant :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k.$$

On note F la fonction définie sur I par

$$F(x) := \sum_{k=0}^{+\infty} |c_k||x|^k.$$

Montrer grâce au théorème de Tonelli que pour toute fonction borélienne $g : I \to \overline{\mathbb{R}}_+$,

$$\int_I Fg \,\mathrm{d}\lambda = \sum_{k=0}^{+\infty} |c_k| \int_I |x|^k g(x) \,\mathrm{d}\lambda(x).$$

Indication : on utilisera la représentation d'une série absolument convergente comme intégrale relativement à la mesure de comptage (cf. cours, corollaire 4.7).

2) Déduire de la question précédente des conditions suffisantes pour que l'on ait :

$$\int_I fg \,\mathrm{d}\lambda = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k \int_I x^k g(x) \,\mathrm{d}\lambda(x).$$

On ne suppose plus g positive dans cette question.

3) Montrer que

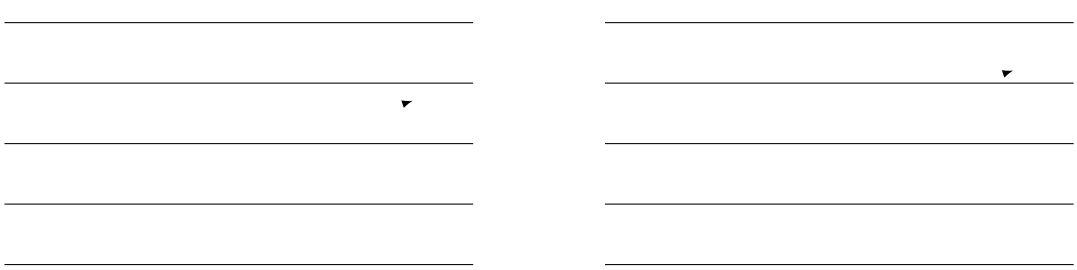
$$\int_0^1 \frac{(x \ln x)^2}{1+x^2} \,\mathrm{d}x = 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k+1)^3}.$$

4) Montrer que

$$\forall a \in \mathbb{R}, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{\mathrm{e}^x - 1} \,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a}{k^2 + a^2}.$$

Ex 2. *L'aiguille de Buffon*

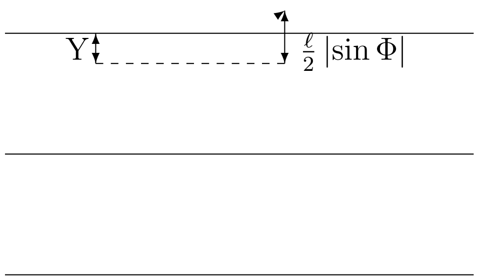
En 1777, Buffon a proposé une méthode expérimentale pour obtenir une valeur numérique du nombre π. On trace sur une surface plane horizontale des droites parallèles équidistantes, séparées par une distance a (on peut par exemple utiliser les rainures d'un parquet). On laisse tomber sur cette surface une aiguille de longueur $\ell \leq a$ et une fois l'aiguille immobilisée, on observe si elle coupe l'une des droites du réseau. On répète l'expérience en notant la fréquence des intersections. Lorsque le nombre d'expériences augmente indéfiniment, cette fréquence converge selon Buffon vers $p = \frac{2\ell}{\pi a}$ permettant ainsi d'obtenir une estimation expérimentale du nombre π.



« Échec » « Succès »

Cherchons une modélisation de cette expérience. On note Y la distance du milieu de l'aiguille à la droite du réseau la plus proche. Y prend ses valeurs dans $[0, \frac{a}{2}]$. On note Φ une mesure de l'angle entre les droites du réseau (toutes orientées dans le même sens) et l'aiguille orientée du chas vers la pointe. Φ prend ses valeurs dans $[0, 2\pi]$ (par exemple)[2].

Y et Φ sont des variables aléatoires. La connaissance du couple $(Y(\omega), \Phi(\omega))$ suffit pour savoir s'il y a ou non intersection.



Nous ferons les hypothèses suivantes sur les variables aléatoires Y et Φ :

(H_1) Y suit la loi uniforme sur $[0, \frac{a}{2}]$.

(H_2) Φ suit la loi uniforme sur $[0, 2\pi]$.

(H_3) Y et Φ sont indépendantes.

1) On note E l'événement « l'aiguille coupe l'une des droites du réseau ». Caractériser l'évènement E par une inégalité faisant intervenir les variables aléatoires Y, Φ et la constante ℓ.

2) Quelle est la densité du couple (Y, Φ), quelle est sa loi ?

[2]On pourrait aussi utiliser les angles de droites, Φ serait alors à valeurs dans un intervalle de longueur π.

3) Calculer $\mathbf{P}(E)$.

4) On considère une suite de lancers de l'aiguille et on note E_i l'évènement « lors du $i$ème lancer, l'aiguille intersecte une des droites du réseau ». On pose $X_i = \mathbf{1}_{E_i}$ et

$$F_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Que peut-on dire du comportement asymptotique de la suite (F_n) ? Déduisez en une formule d'estimation expérimentale de π.

Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IFP **Année 2002-03**

Examen, 30 janvier 2003

Conditions de déroulement de l'épreuve :
Durée : 4 heures.
Les calculatrices sont interdites.
Liste exhaustive des documents autorisés :

1. Polycopié de DEUG *Introduction au calcul des probabilités.*
2. Polycopié du *cours* d'IFP 2002-2003.
3. Une feuille *manuscrite* recto verso format standard A4, pouvant contenir des extraits du cours à votre choix, à l'exclusion de tout corrigé d'exercice.

Le barème n'est donné qu'à titre indicatif pour vous aider à gérer votre temps et n'a pas valeur contractuelle. Les notations utilisées dans les énoncés sont celles du cours. En particulier λ_d désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$ muni de sa tribu borélienne $\mathrm{Bor}(\mathbb{R}^d)$.

Ex 1. *Loi uniforme sur la boule unité en grande dimension, la rechute (5 points).*

Dans tout l'exercice, on notera λ_d la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$, $B_d(0,r)$ la boule fermée dans $\mathbb{R}^d$ de centre 0 et de rayon r, pour la distance associée à la norme

$$\|x\|_1 := \sum_{i=1}^{d} |x_i|, \quad x = (x_1, \dots, x_d).$$

et $v(d) := \lambda_d\bigl(B_d(0,1)\bigr)$.

1) Dans cette question, $d = 2$.

a) Dessiner $B_2(0,1)$. Calculer $v(2)$.

b) Soit (X,Y) un vecteur aléatoire de loi uniforme sur $B_2(0,1)$. Sa loi est donc à densité $(x,y) \mapsto f(x,y) = c\mathbf{1}_{B_2(0,1)}(x,y)$ par rapport à λ_2 (c constante à préciser). Déterminer par leur densité les lois de X et Y.

c) Expliquer pourquoi X et Y ne sont pas indépendantes.

2) En utilisant une propriété de la mesure de Lebesgue, calculer $\lambda_d\bigl(B_d(0,r)\bigr)$ en fonction de r et $v(d)$. On ne cherchera pas à expliciter la constante $v(d)$.

3) Soit $U : \Omega \to \mathbb{R}^d$ un vecteur aléatoire de loi uniforme sur $B_d(0,1)$. On a donc

$$\forall A \in \mathrm{Bor}(\mathbb{R}^d), \quad \mathbf{P}(U \in A) = \frac{\lambda_d\bigl(A \cap B_d(0,1)\bigr)}{\lambda_d\bigl(B_d(0,1)\bigr)} = \frac{1}{v(d)}\lambda_d\bigl(A \cap B_d(0,1)\bigr).$$

Expliquer pourquoi $R := \|U\|_1$ est une variable aléatoire réelle et calculer sa fonction de répartition F.

4) On dit que le réel m est *une* médiane de la variable aléatoire réelle Y s'il vérifie à la fois $\mathbf{P}(Y \leq m) \geq 1/2$ et $\mathbf{P}(Y \geq m) \geq 1/2$. Montrer que R a une unique médiane que l'on calculera.

5) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note U_n un vecteur aléatoire de loi uniforme sur $B_n(0,1)$ et $R_n := \|U_n\|_1$. Pour $0 < \varepsilon < 1$, étudier la limite de $\mathbf{P}(1-\varepsilon < R_n \leq 1)$ quand n tend vers $+\infty$. Commenter le résultat obtenu.

Ex 2. *Caractérisation de certaines mesures par leurs moments (6 points).*

Soient $-\infty < a < b < +\infty$ fixés et μ, ν deux mesures *finies* sur $\big([a,b], \mathrm{Bor}([a,b])\big)$ telles que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \int_{[a,b]} x^k \,\mathrm{d}\mu(x) = \int_{[a,b]} x^k \,\mathrm{d}\nu(x). \tag{4}$$

1) Expliquer pourquoi si g est une fonction polynôme, $\int_{[a,b]} g \,\mathrm{d}\mu = \int_{[a,b]} g \,\mathrm{d}\nu$.

2) Montrer que si $(g_n)_{n\geq 1}$ est une suite de fonctions μ-intégrables sur $[a,b]$ qui converge *uniformément* sur $[a,b]$ vers f, on a

$$\int_{[a,b]} g_n \,\mathrm{d}\mu \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{[a,b]} f \,\mathrm{d}\mu.$$

3) On rappelle (théorème de Weierstrass) que toute fonction continue f sur $[a,b]$ est limite uniforme sur $[a,b]$ d'une suite de fonctions polynômes. Utiliser ce théorème pour déduire des questions précédentes que

$$\forall f \text{ continue } [a,b] \to \mathbb{R}, \quad \int_{[a,b]} f \,\mathrm{d}\mu = \int_{[a,b]} f \,\mathrm{d}\nu. \tag{5}$$

4) En déduire que $\mu = \nu$. *Indication :* la tribu borélienne de $[a,b]$ est engendrée par la famille $\mathcal{C}$ des intervalles $[c,d]$, $a \leq c < d \leq b$. Il suffit donc de vérifier que $\forall [c,d] \in \mathcal{C}$, $\mu([c,d]) = \nu([c,d])$ (pourquoi ?). Pour vérifier cette égalité, on pourra utiliser en expliquant sa construction à l'aide d'un graphique, une suite de fonctions continues $f_n : [a,b] \to [0,1]$ telle que f_n converge simplement sur $[a,b]$ vers $\mathbf{1}_{[c,d]}$.

5) Montrer que si X et Y sont deux variables aléatoires bornées telles que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{E}X^k = \mathbf{E}Y^k$, alors X et Y ont même loi.

Ex 3. *Tir à l'arc (5 points)*

On rappelle que la variable aléatoire réelle X suit la loi gaussienne $\mathfrak{N}(m,\sigma)$ si sa loi a pour densité par rapport à λ_1 la fonction :

$$x \longmapsto \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Les paramètres $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$ s'interprètent comme : $m = \mathbf{E}X$ et $\sigma^2 = \mathrm{Var}\, X$.

Dans un stand de tir à l'arc, un archer vise une cible placée sur une grande palissade (assimilée à un plan vertical). On munit ce plan d'un repère orthonormé de centre celui de la cible, l'axe des abscisses étant horizontal et celui des ordonnées vertical. On modélise le point d'impact de la flèche par le vecteur aléatoire gaussien (X, Y) de densité par rapport à λ_2 :

$$f : (x, y) \longmapsto \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(\frac{-(x^2 + y^2)}{2\sigma^2}\right).$$

Intuitivement le paramètre σ mesure l'adresse du tireur. Pour ε positif fixé, plus σ est petit, plus grande sera la probabilité que la flèche atteigne un point à distance inférieure à ε du centre.

1) Montrer sans calcul que X et Y sont indépendantes et de même loi que l'on précisera.

2) On se propose dans cette question de déterminer la loi du vecteur image de (X, Y) par un passage en coordonnées polaires. On note $\Delta := \mathbb{R}_- \times \{0\}$ et $\varphi : \mathbb{R}^2 \setminus \Delta \to]0, +\infty[\times] - \pi, \pi[$ le passage des coordonnées cartésiennes aux coordonées polaires pour le plan privé de la demi-droite Δ. C'est un C^1-difféomorphisme dont l'inverse φ^{-1} est donné par :

$$\forall (r, u) \in]0, +\infty[\times] - \pi, \pi[, \quad (x, y) = \varphi^{-1}(r, u) = (r \cos u, r \sin u).$$

On note $\Omega' := \{\omega \in \Omega;\ (X(\omega), Y(\omega)) \in \mathbb{R}^2 \setminus \Delta\}$. Comme $\lambda_2(\Delta) = 0$, $\mathbf{P}\big((X, Y) \in \Delta\big) = \int_\Delta f(x, y)\, \mathrm{d}\lambda_2(x, y) = 0$, d'où $\mathbf{P}(\Omega') = 1$. On pose pour tout $\omega \in \Omega'$, $\big(R(\omega), U(\omega)\big) = \varphi\big(X(\omega), Y(\omega)\big)$ et on *admet* qu'il est possible de prolonger (R, U) à tout Ω de façon à en faire une application mesurable, donc un *vecteur aléatoire*. Comme $\mathbf{P}(\Omega \setminus \Omega') = 1$, la façon dont on effectue ce prolongement (pourvu qu'il soit mesurable) n'influence pas la loi de (R, U). Déterminer la loi du vecteur aléatoire (R, U) par sa densité. En déduire que R et U sont indépendantes et donner la loi de R et celle de U.

3) Calculer $\mathbf{E}R$ et exprimer σ en fonction de $\mathbf{E}R$. En déduire une méthode pour *estimer* σ à partir de l'observation d'un grand nombre n de tirs du même archer réalisés dans les mêmes conditions. Voici une formulation mathématique plus précise de cette question : on dispose d'une suite $(R_k)_{k\geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes de même loi que R et il s'agit de construire une suite $(Z_n)_{n\geq 1}$ convergeant presque sûrement vers σ quand n tend vers $+\infty$.

Ex 4. *Vrai ou faux ? (8 points)*

On vous demande de préciser parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies et lesquelles sont fausses. Seules les réponses argumentées seront prises en compte. Un contre-exemple est un argument suffisant pour montrer la fausseté d'une affirmation.

1) Si K est un compact de $\mathbb{R}^2$, $\lambda_2(K) < +\infty$.

2) Si A est un borélien au plus dénombrable de $\mathbb{R}$, la mesure de Lebesgue de sa frontière est nulle.

3) Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré et $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite croissante de fonctions $\Omega \to \mathbb{R}_+$, mesurables $\mathcal{F}$-Bor$(\mathbb{R}_+)$, de limite f $(f_n \uparrow f)$. Alors

$$\mu(\{f_n \leq 1\}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mu(\{f \leq 1\}) \quad \text{et} \quad \mu(\{f_n < 1\}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mu(\{f < 1\}).$$

4) Si $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est continue et λ_1-intégrable sur $\mathbb{R}_+$, $f(x)$ tend vers zéro quand x tend vers $+\infty$.

5) Soit $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ une fonction décroissante. Alors f a une limite finie ℓ en $+\infty$ et pour toute fonction g λ_1-intégrable sur $[0, +\infty[$,

$$\int_{\mathbb{R}_+} f(nx)g(x)\, \mathrm{d}\lambda_1(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \int_{\mathbb{R}_+} g(x)\, \mathrm{d}\lambda_1(x).$$

6) Si X et Y sont deux variables aléatoires réelles dont les lois P_X et P_Y ont chacune une densité par rapport à λ_1, alors la loi de $X+Y$ a aussi une densité par rapport à λ_1.

7) Pour toute mesure *finie* μ sur l'espace mesurable $(\Omega, \mathcal{F})$ et toute application $f : \Omega \to \mathbb{R}$, mesurable $\mathcal{F}$-Bor($\mathbb{R}$), la fonction

$$F : x \mapsto F(x) := \int_\Omega \cos\bigl(xf(\omega)\bigr)\, \mathrm{d}\mu(\omega)$$

est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

8) Soit $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$ (i.e. $\mathbf{P}(X_k = 1) = p$, $\mathbf{P}(X_k = 0) = 1 - p$). Alors

$$T_n := \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n X_k \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} +\infty.$$

Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IFP **Année 2002-03**

Examen (deuxième session), septembre 2003

Conditions de déroulement de l'épreuve :
Durée : 4 heures.
Les calculatrices sont interdites.
Liste exhaustive des documents autorisés :

1. Polycopié de DEUG *Introduction au calcul des probabilités.*
2. Polycopié du *cours* d'IFP 2002-2003.
3. Une feuille *manuscrite* recto verso format standard A4, pouvant contenir des extraits du cours à votre choix, à l'exclusion de tout corrigé d'exercice.

Le barème n'est donné qu'à titre indicatif pour vous aider à gérer votre temps et n'a pas valeur contractuelle. Les notations utilisées dans les énoncés sont celles du cours. En particulier λ_d désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$ muni de sa tribu borélienne $\mathrm{Bor}(\mathbb{R}^d)$ et $\lambda = \lambda_1$.

Ex 1. *(3 points)*
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) := \sin(x^2 + y^2).$$

On note

$$D_n := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 < n\pi\right\}, \qquad I_n := \int_{D_n} f \,\mathrm{d}\lambda_2.$$

1) Calculer I_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.
2) f est-elle λ_2-intégrable sur $\mathbb{R}^2$?

Ex 2. *(4 points)*
Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, indépendantes et de même loi normale $\mathfrak{N}(0, 1)$. On rappelle que la loi $\mathfrak{N}(0, 1)$ a pour densité $g(x) = (2\pi)^{-1/2} \exp(-x^2/2)$.

1) Déterminer la densité de la loi du vecteur aléatoire (X, XY). En déduire la densité de la loi de XY sous la forme d'une intégrale (qu'on ne cherchera pas à calculer).

2) On pose

$$f(t) := \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\Big(s^2 + \frac{t^2}{s^2}\Big)\right) \frac{1}{s} \,\mathrm{d}s.$$

Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$.

3) Étudier la limite de $f(t)$ quand t tend vers 0^+.

Problème *(9 points)*

Le but de ce problème est le calcul de l'espérance d'un certain temps d'attente qui sera défini à la question 4). Les questions 1) à 3) sont des préliminaires indépendants. Toutes les variables aléatoires de l'énoncé sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

1) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $r \in \mathbb{R}^+$, on définit l'ensemble

$$A_n(r) := \big\{(x_1, \dots, x_n) \in [0,1]^n;\ x_1 + \cdots + x_n < r\big\}.$$

Vérifier que pour $0 < r \leq 1$, $A_n(r)$ est l'image de $A_n(1)$ par l'homothétie de centre 0 et de rapport r et en déduire une relation simple entre $\lambda_n\big(A_n(r)\big)$ et $\lambda_n\big(A_n(1)\big)$.

2) Soit N une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\mathbf{E}N = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(N > k). \tag{6}$$

3) Dans toute la suite, on note $(U_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $[0,1]$. En utilisant la loi forte des grands nombres, montrer que

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} U_k \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} +\infty.$$

En déduire que

$$\mathbf{P}(\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n < 1) = 0. \tag{7}$$

4) On définit la variable aléatoire[3] discrète N par

$$N(\omega) = \min\big\{n \in \mathbb{N}^*; S_n(\omega) \geq 1\big\},$$

avec la convention habituelle $\min \emptyset := +\infty$. D'après (7), $\mathbf{P}(N = +\infty) = 0$, ce qui nous autorise[4] à considérer N comme une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Justifier l'égalité d'évènements

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \{N > k\} = \{S_k < 1\}. \tag{8}$$

Que vaut $\mathbf{P}(N > 0)$?

5) Quelle est la loi du vecteur aléatoire $(U_1, \dots, U_k)$? Vérifier que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}(S_k < 1) = \lambda_k\big(A_k(1)\big) \tag{9}$$

6) On pose pour alléger $v_k := \lambda_k\big(A_k(1)\big)$. En utilisant l'identification $\lambda_k = \lambda_{k-1} \otimes \lambda_1$ (pour tout $k \geq 2$) et la question 1), trouver une relation de récurrence pour la suite $(v_k)_{k\geq 1}$. En déduire une formule explicite pour v_k.

[3]On ne vous demande pas de justifier sa mesurabilité.

[4]Au prix d'une légère modification de l'espace probabilisé que l'on ne vous demande pas d'expliciter.

7) Calculer $\mathbf{E}N$. Calculer *ensuite* $\mathbf{P}(N = k)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.

8) Peut-on utiliser la même méthode pour calculer $\mathbf{E}M$, où M est définie par

$$M(\omega) = \min\big\{n \in \mathbb{N}^*;\ S_n(\omega) \geq 2\big\}?$$

Ex 3. *Vrai ou faux ? (6 points)*

On vous demande de préciser parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies et lesquelles sont fausses. Seules les réponses argumentées seront prises en compte. Un contre-exemple est un argument suffisant pour montrer la fausseté d'une affirmation.

1) Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré et $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions $\Omega \to \mathbb{R}_+$, mesurables $\mathcal{F}$-Bor$(\mathbb{R}_+)$. On suppose qu'il existe un $A \in \mathcal{F}$ tel que $\mu(A) > 0$ et que pour tout $\omega \in A$, $\lim_{n\to+\infty} f_n(\omega) = +\infty$. Alors

$$\lim_{n\to+\infty} \int_A f_n \,\mathrm{d}\mu = +\infty.$$

2) Si le vecteur aléatoire (X, Y) de $\mathbb{R}^2$ suit la loi uniforme sur le triangle

$$T := \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \leq x + y \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\big\},$$

ses composantes X et Y sont deux variables aléatoires

a) de même loi ;

b) indépendantes.

3) Les évènements A et B de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ sont indépendants si et seulement si le vecteur aléatoire $(\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B)$ a une covariance nulle.

4) Si f est une fonction $[0, 1] \to \mathbb{R}$, λ-intégrable sur $[0, 1]$, alors elle est μ-intégrable sur $[0, 1]$ pour toute mesure finie μ définie sur $\big([0, 1], \mathrm{Bor}([0, 1])\big)$.

Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IFP **Année 2002-03**

Corrigé du Devoir n° 1

Ex 1. *Contrôleur contre fraudeur*

Une compagnie de métro pratique les tarifs suivants. Le ticket donnant droit à un trajet coûte 1 €; les amendes sont fixées à 20 € pour la première infraction constatée, 40 € pour la deuxième et 400 € pour la troisième. La probabilité p pour un voyageur d'être contrôlé au cours d'un trajet est supposée constante et connue de la seule compagnie. Un fraudeur décide de prendre systématiquement le métro sans payer jusqu'à la deuxième amende et d'arrêter alors de frauder. On note T le nombre de trajets effectués jusqu'à la deuxième amende (T est le numéro du trajet où le fraudeur est contrôlé pour la deuxième fois). On note $q = 1 - p$ la probabilité de faire un trajet sans contrôle.

1) Pour $1 \leq j < k$, notons $E_{j,k}$ l'évènement : « le premier contrôle du fraudeur a lieu lors de son j-ème trajet et le deuxième contrôle lors du k-ième trajet ». On a clairement la décomposition en union disjointe

$$\forall k \geq 2, \quad \{T = k\} = \bigcup_{j=1}^{k-1} E_{j,k}. \tag{10}$$

Par additivité de la probabilité, le calcul de $\mathbf{P}(T = k)$ se ramène donc à celui des $\mathbf{P}(E_{j,k})$. Notons F_i l'évènement « le fraudeur n'est pas contrôlé lors de son i-ème trajet ». Son complémentaire F_i^c est donc l'évènement « le fraudeur est contrôlé lors de son i-ème trajet ». L'évènement $E_{j,k}$ peut s'écrire sous la forme

$$E_{j,k} = F_j^c \cap F_k^c \cap \Big(\bigcap_{\substack{1 \leq i < k \\ i \neq j}} F_i \Big),$$

avec le cas particulier $E_{1,2} = F_1^c \cap F_2^c$. Nous faisons maintenant l'hypothèse d'indépendance[5] de la suite d'évènements $(F_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$. Alors les k évènements F_i $(i \neq j, k)$ et F_j^c, F_k^c sont mutuellement indépendants (cf. par exemple [ICP], Prop. 2.12) et

$$\mathbf{P}(E_{j,k}) = \mathbf{P}(F_j^c)\mathbf{P}(F_k^c) \prod_{\substack{1 \leq i < k \\ i \neq j}} \mathbf{P}(F_i) = p^2 q^{k-2}.$$

[5] Cette hypothèse revient pratiquement à dire que les contrôles sont faits au hasard, sans tenir compte des résultats des contrôles précédents. Elle ne serait pas pertinente si par exemple, le fraudeur était pris en filature par un contrôleur particulièrement hargneux et décidé à le coincer.

On note au passage que $\mathbf{P}(E_{j,k})$ ne dépend pas de j. En utilisant l'additivité de $\mathbf{P}$ et (10), on aboutit à :

$$\forall k \geq 2, \quad \mathbf{P}(T = k) = \sum_{j=1}^{k-1} \mathbf{P}(E_{j,k}) = (k-1)p^2 q^{k-2}.$$

La variable aléatoire T suit ainsi la loi binomiale négative de paramètres 2 et p. C'est la loi du temps d'attente du deuxième succès (ici pour le contrôleur !) dans une suite d'épreuves répétées indépendantes.

2) La probabilité $\mathbf{P}(T > n)$ s'exprime à l'aide des $\mathbf{P}(T = k)$ par σ-additivité :

$$\mathbf{P}(T > n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathbf{P}(T = k) = p^2 \sum_{k=n+1}^{+\infty} (k-1)q^{k-2}.$$

On voit ainsi que

$$\mathbf{P}(T > n) = p^2 f_n'(q), \tag{11}$$

où la fonction f_n est définie comme la somme de la série entière

$$f_n(x) := \sum_{k=n+1}^{+\infty} x^{k-1}.$$

Cette série est une série géométrique de raison x, donc de rayon de convergence $R = 1$. On sait alors que sa somme est dérivable sur l'intervalle $]-R, R[$ et que sa dérivée peut se calculer par dérivation terme à terme :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad f_n'(x) := \sum_{k=n+1}^{+\infty} (k-1)x^{k-2}.$$

Comme $0 < p < 1$ (sinon le problème est sans intérêt), $q := 1 - p$ est aussi dans l'intervalle $]0, 1[$ et on peut appliquer l'égalité ci-dessus avec $x = q$. Par ailleurs, on peut calculer explicitement $f_n(x)$ comme somme d'une série géométrique :

$$f_n(x) = x^n + x^{n+1} + x^{n+2} + \ldots \cdots = x^n \sum_{j=0}^{+\infty} x^j = \frac{x^n}{1-x},$$

formule valable pour tout $x \in]-1, 1[$. On en déduit une formule explicite pour la dérivée :

$$f_n'(x) = \frac{(1-x)nx^{n-1} + x^n}{(1-x)^2} = \frac{(n-(n-1)x)x^{n-1}}{(1-x)^2}.$$

En faisant $x = q$ (donc $1 - x = p$) et en reportant ce résultat dans (11), il vient :

$$\mathbf{P}(T > n) = (n - (n-1)q)q^{n-1} = (np + q)q^{n-1}.$$

3) Le bilan financier de la stratégie du fraudeur est la variable aléatoire $S := T - 60$. En effet lorsqu'il arrête de frauder après son deuxième contrôle, il a dépensé en tout 60 € d'amende et gagné T € en ne payant pas ses tickets de métro. La probabilité que sa stratégie soit bénéficiaire est donc $\mathbf{P}(S > 0) = \mathbf{P}(T > 60)$.

Le calcul numérique donne

$$\mathbf{P}(T > 60) \simeq \begin{cases} 0{,}013\,8 & \text{pour } p = 1/10; \\ 0{,}191\,6 & \text{pour } p = 1/20. \end{cases}$$

4) D'un point de vue financier, le fraudeur a intérêt à avoir une idée de la valeur de p. Entre les deux exemples ci-dessus, la division par 2 de la probabilité de contrôle multiplie par presque 14 sa probabilité d'être bénéficaire. Pour diminuer son ignorance de p, le fraudeur peut l'estimer sur la base d'un grand nombre d'observations.

Considérons d'abord le cas du fraudeur « névrotique » : son objectif est de faire un bénéfice, peu lui importe lequel. Dans ce cas, la valeur critique de p est celle pour laquelle $\mathbf{P}(T > 60) = 1/2$, soit approximativement $p \simeq 0{,}028$. En dessous de cette valeur de p, la stratégie du fraudeur lui donne plus d'une chance sur deux d'être bénéficiaire.

Voyons maintenant le cas plus réaliste du fraudeur « économique » : ce qui lui importe n'est pas tant la probabilité de faire un bénéfice, même minime, que le gain moyen qu'il peut espérer de sa stratégie. Pour lui, la quantité pertinente est non plus $\mathbf{P}(T > 60)$, mais $\mathbf{E}(T - 60) = \mathbf{E}T - 60$. Un calcul simple (laissé en exercice) montre que $\mathbf{E}T = 2/p$. La valeur critique de p en dessous de laquelle sa stratégie est gagnante « en moyenne » est alors donnée par l'équation $2/p = 60$, c'est $p = 1/30 \simeq 0{,}033\,3$. Notons que pour cette valeur de p, $\mathbf{P}(T > 60) \simeq 0{,}401\,5$, ce qui montre bien que la prise en compte du montant des gains peut conduire à considérer comme gagnante une stratégie qui a moins d'une chance sur deux de générer un bénéfice.

N.B. L'auteur de l'énoncé *Contrôleur contre fraudeur* et de son corrigé récuse par avance toute accusation d'incitation à la fraude et décline toute responsabilité en cas de fraude de l'un de ses lecteurs. Il fait observer que des calculs du type ci-dessus[6] sont utiles à la compagnie de métro qui en a besoin pour déterminer le nombre de contrôleurs qu'elle doit employer (avec le coût salarial que cela implique)...

Ex 2. Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note $p_k := \mathbf{P}(X = k)$. On suppose que X a une espérance mathématique $\mathbf{E}X$ finie et que la suite $(p_k)_{k \geq 1}$ est *décroissante* sur $\mathbb{N}^*$.

1) On se propose de démontrer l'inégalité :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad p_k < \frac{2\mathbf{E}X}{k^2}. \tag{12}$$

Remarquons en préalable que X étant à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, $X \geq 1$ d'où $\mathbf{E}X \geq 1$. Par conséquent l'espérance de X n'est pas nulle et le second membre de (12) est toujours

[6] Notamment le cas du fraudeur « économique », en raison de la loi des grands nombres.

strictement positif. Ainsi (12) est trivialement vérifiée pour tout[7] k tel que $p_k = 0$. Il nous suffit donc de prouver l'inégalité stricte (12) pour k tel que $p_k > 0$. Cette inégalité résulte des minorations suivantes dont la justification est différée un instant :

$$\mathbf{E}X = \sum_{j=1}^{+\infty} jp_j \geq \sum_{j=1}^{k} jp_j \geq p_k \sum_{j=1}^{k} j = p_k \frac{k(k+1)}{2} > p_k \frac{k^2}{2}. \tag{13}$$

En oubliant les étapes intermédiaires et en lisant (13) de droite à gauche, on a bien $p_k k^2/2 < \mathbf{E}X$, ce qui nous donne (12). Voyons maintenant les justifications de gauche à droite dans (13).

- La première égalité est simplement la définition de $\mathbf{E}X$ au sens du cours de DEUG, sinon (du point de vue de la Licence) c'est la formule de calcul de l'espérance d'une variable aléatoire discrète.
- L'inégalité suivante est la minoration de la somme d'une série à termes *positifs* par sa somme partielle de rang k. Ceci est bien légitime puisque dans ce cas, la suite des sommes partielles est croissante et a pour limite la somme de la série.
- L'inégalité suivante repose sur la décroissance de la suite (p_n) : pour $1 \leq j \leq k$, $p_j \geq p_k$.
- L'égalité suivante est simplement le calcul classique de la somme des termes d'une progression arithmétique[8].
- La dernière inégalité vient de la minoration $k(k+1) > k^2$ pour $k \geq 1$ *et* de la *stricte* positivité de p_k.

2) L'inégalité (12) ne reste pas vraie sans l'hypothèse de décroissance de $(p_k)_{k\geq 1}$. On n'a que l'embarras du choix des contre-exemples. En voici un simple. On choisit X prenant seulement les deux valeurs 1 et 3, chacune avec probabilité $\frac{1}{2}$. La loi de X est $P_X = \frac{1}{2}\delta_1 + \frac{1}{2}\delta_3$ et la suite (p_n) n'est pas décroissante ($p_2 = 0 < p_3 = \frac{1}{2}$). Clairement $\mathbf{E}X = 2$ et (12) est en défaut pour $k = 3$:

$$\frac{2\mathbf{E}X}{3^2} = \frac{4}{9} < \frac{1}{2} = \mathbf{P}(X = 3).$$

3) Supposons qu'il existe une constante $c > 0$ et un entier k_0 tels que :

$$\forall k \geq k_0, \quad \mathbf{P}(X = k) \geq \frac{c\mathbf{E}X}{k^2}. \tag{14}$$

La variable aléatoire X ayant une espérance finie, la série de terme général $k\mathbf{P}(X = k)$ converge, ce qui implique :

$$\sum_{k=k_0}^{+\infty} k\mathbf{P}(X = k) < +\infty. \tag{15}$$

[7]Remarquons au passage que s'il existe un tel k, alors pour tout $j \geq k$, $p_j = 0$ par décroissance de la suite de réels positifs (p_n).

[8]Rappel : la somme de termes consécutifs d'une progression arithmétique est égale au nombre de termes multiplié par la moyenne du premier et du dernier terme.

Or d'après (14), pour $k \geq k_0$, $k\mathbf{P}(X = k)$ est *minoré* par $c\mathbf{E}X/k$, qui est le terme général d'une série divergente (rappelons que $\mathbf{E}X > 0$). L'inégalité (14) est donc contradictoire avec notre hypothèse générale de finitude de $\mathbf{E}X$. Notons au passage que cette impossibilité de (14) concerne toutes les variables aléatoires X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et d'espérance finie, que la suite (p_n) soit ou non décroissante.

Deux questions auxquelles vous avez échappé.

4) Est-ce que 2 est la meilleure constante dans l'inégalité (12) ? Dire que 2 est la meilleure constante signifie ici que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une variable aléatoire X_ε vérifiant les hypothèses de l'énoncé et telle que pour au moins un $k \in \mathbb{N}^*$, $p_k \geq (2 - \varepsilon)\mathbf{E}X_\varepsilon/k^2$.

5) Lorsque k tend vers l'infini, (12) nous donne l'estimation $p_k = O(k^{-2})$ pour la vitesse de convergence vers zéro de p_k. Peut-on améliorer cette estimation ?

Des réponses sont proposées à la fin de ce corrigé. Ne les regardez pas tout de suite, essayez d'abord par vous même...

Ex 3. *Sommabilité...*

Soit E un espace vectoriel normé, I un ensemble infini d'indices et $\{u_i,\ i \in I\}$ une famille de vecteurs de E. Pour toute partie finie K de I on note

$$S_K := \sum_{i \in K} u_i.$$

On dit que $\{u_i,\ i \in I\}$ est *intrinsèquement sommable* et de somme $S \in E$ si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists J \text{ partie finie de } I;\ \forall K \text{ fini},\quad J \subset K \subset I \quad \Rightarrow \quad \|S - S_K\| \leq \varepsilon. \tag{16}$$

Remarque préliminaire : si $\{u_i,\ i \in I\}$ est intrinsèquement sommable, sa somme S est unique, c'est-à-dire que si les vecteurs S et S' vérifient tous les deux (16), alors $S = S'$. Bien sûr, l'ensemble fini « J » associé à S' par (16) n'a aucune raison d'être le même que pour S, nous le noterons donc plutôt J'. Pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble fini $K = J \cup J'$ contient à la fois J et J', donc $\|S - S_K\| \leq \varepsilon$ et $\|S' - S_K\| \leq \varepsilon$. Par inégalité triangulaire, $\|S - S'\| \leq 2\varepsilon$. Dans cette dernière inégalité, K qui dépendait de ε a disparu et le premier membre ne dépend pas de ε. L'inégalité étant vraie pour tout $\varepsilon > 0$, $\|S - S'\| = 0$ et $S = S'$.

1) Soit $\{u_i,\ i \in I\}$ intrinsèquement sommable et $I' := \{i \in I;\ u_i \neq 0\}$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, fixons l'un[9] des ensembles finis J donnés par (16) lorsque $\varepsilon = 1/n$ et notons le J_n. Posons

$$H := \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} J_n.$$

L'ensemble H est au plus dénombrable comme réunion dénombrable d'ensembles au plus dénombrables. Si $H = I$, alors I' est inclus dans H et donc au plus dénombrable. En dehors de ce cas trivial, $I \setminus H$ n'est pas vide. Soit i_0 un élément quelconque de $I \setminus H$.

[9] La propriété (16) nous assure qu'il existe au moins un J pour ε donné, mais ne dit rien sur l'unicité.

En appliquant (16) avec $\varepsilon = 1/n$, $J = J_n$ et chacun des deux ensembles finis $K = J_n$, $K' = J_n \cup \{i_0\}$, on obtient les deux inégalités :

$$\|S_{J_n} - S\| \leq \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \|u_{i_0} + S_{J_n} - S\| \leq \frac{1}{n},$$

vraies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En écrivant $u_{i_0} = (u_{i_0} + S_{J_n} - S) + (S - S_{J_n})$, l'inégalité triangulaire nous donne

$$\forall n \geq 1, \quad \|u_{i_0}\| \leq \frac{2}{n}.$$

Faisant tendre n vers l'infini (noter que i_0 est fixé et ne dépend pas de n), on en déduit $\|u_{i_0}\| = 0$, d'où $u_{i_0} = 0$. Ce raisonnement étant valable pour n'importe quel $i_0 \in I \setminus H$, on en déduit que I' est inclus dans H. Par conséquent, I' est au plus dénombrable.

2) Soit $\{u_i,\ i \in I\}$ intrinsèquement sommable. D'après la remarque préliminaire, sa somme S est unique et ne dépend que de $\{u_i,\ i \in I\}$. Supposons de plus que I' défini ci-dessus est infini. Il est alors dénombrable. Notons φ une bijection quelconque $\mathbb{N} \to I'$. Nous voulons montrer que $\sum_{k=0}^{+\infty} u_{\varphi(k)}$ converge et que sa somme ne dépend pas de φ. Ce résultat sera acquis si nous montrons que cette série converge vers S, puisque S ne dépend pas de φ.

Avec les notations utilisées à la question précédente, I' est inclus dans l'union des ensembles finis J_n. Posons alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $J'_n := J_n \cap I'$. Ainsi pour tout $i \in J_n \setminus J'_n$, $u_i = 0$. Il en résulte que la suite $(J'_n)_{n \geq 1}$ vérifie

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall K' \text{ fini tel que } J'_n \subset K' \subset I', \quad \|S - S_{K'}\| \leq \frac{1}{n}. \tag{17}$$

En effet en posant $K = K' \cup (J_n \setminus J'_n)$, on a un ensemble fini tel que $J_n \subset K \subset I$ et donc $\|S_K - S\| \leq 1/n$. Or $S_K = S_{K'}$ puisque les termes u_i de $S_K - S_{K'}$ ont tous un indice $i \in J_n \setminus J'_n$ donc sont nuls.

Puisque φ est une bijection de $\mathbb{N}$ *sur* I' et J'_n une partie finie de I', il existe pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$ un entier $k_0(n)$ tel que

$$\varphi\bigl(\{0, 1, 2, \dots, k_0(n)\}\bigr) \supset J'_n.$$

Il suffit de prendre pour cela, $k_0(n) := \max\{\varphi^{-1}(i);\ i \in J'_n\}$. Alors pour tout entier $l \geq k_0(n)$, $K' := \varphi\bigl(\{0, 1, 2, \dots, l\}\bigr)$ est une partie finie de I', contenant J'_n et donc par (17), $\|S - S_{K'}\| \leq 1/n$. Comme $S_{K'} = \sum_{k=0}^{l} u_{\varphi(k)}$, nous venons ainsi d'établir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \exists k_0(n), \quad \forall l \geq k_0(n), \quad \Bigl\|\sum_{k=0}^{l} u_{\varphi(k)} - S\Bigr\| \leq \frac{1}{n},$$

ce qui équivaut à la convergence vers S de la série de terme général $u_{\varphi(k)}$ (c'est juste ce que l'on obtient en discrétisant le « $\forall \varepsilon > 0$ » en le remplaçant par $\varepsilon = 1/n$ dans la définition de cette convergence).

3) On se propose de montrer que si I est dénombrable et la série $\sum_{i\in I} u_i$ commutativement convergente et de somme S, alors $\{u_i,\ i \in I\}$ est intrinsèquement sommable et de somme S. Pour cela on raisonne par l'absurde en supposant que $\{u_i\ i \in I\}$ n'est pas intrinsèquement sommable. En toute généralité l'intrinsèque sommabilité s'écrit :

$$\exists S' \in E, \forall \varepsilon > 0,\ \exists J \text{ partie finie de } I;\ \forall K \text{ fini},\quad J \subset K \subset I \quad \Rightarrow \quad \|S' - S_K\| \leq \varepsilon.$$

La négation de cette propriété s'écrit donc :

$$\forall S' \in E,\ \exists \varepsilon > 0,\ \forall J \text{ partie finie de } I,\ \exists K \text{ fini},\quad J \subset K \subset I \text{ et } \|S' - S_K\| > \varepsilon.$$

En particulier pour $S' = S$, nous disposons pour notre raisonnement par l'absurde de l'hypothèse :

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall J \text{ partie finie de } I,\ \exists K \text{ fini},\quad J \subset K \subset I \text{ et } \|S - S_K\| > \varepsilon. \tag{18}$$

Fixons une première numérotation bijective $\varphi : \mathbb{N} \to I$. Posons $k_0 := 0$ et $J_0 := \{\varphi(0)\}$. Par (18) il existe une partie finie K_0 de I, contenant J_0 et telle que $\|S - S_{K_0}\| > \varepsilon$. On peut maintenant choisir un entier $k_1 > k_0$ tel que $J_1 := \varphi\big(\{0, 1, \ldots, k_1\}\big)$ contienne *strictement* K_0, il suffit pour cela de prendre $k_1 = 1 + \max\{\varphi^{-1}(i);\ i \in K_0\}$. Une nouvelle invocation de (18) nous fournit une partie finie K_1 de I, contenant J_1 et telle que $\|S - S_{K_1}\| > \varepsilon$. Nous venons ainsi d'amorcer une récurrence qui basée sur l'utilisation itérée de (18), nous permet de construire une suite strictement croissante d'entiers (k_n), deux suites (J_n) et (K_n) de parties finies de I, vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \varphi\big(\{0, 1, \ldots, k_n\}\big) = J_n \subset K_n \subsetneqq J_{n+1} \text{ et } \|S - S_{K_n}\| > \varepsilon. \tag{19}$$

Par cette construction, la suite (K_n) est strictement croissante pour l'inclusion. La réunion de cette suite est exactement I. En effet elle est évidememnt incluse dans I puisque chaque K_n est une partie de I. Dans l'autre sens, si i est un élément quelconque de I, $\varphi^{-1}(i)$ est un entier qui est majoré par k_n pour n assez grand (la suite *strictement* croissante *d'entiers* (k_n) tend vers l'infini). Par construction de J_n, l'inégalité $\varphi^{-1}(i) \leq k_n$ implique l'appartenance de i à J_n, donc aussi à K_n. Ainsi un élément quelconque i de I appartient toujours à au moins un K_n, donc $I \subset \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} K_n$ et finalement $I = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} K_n$. Posant maintenant

$$I_0 := K_0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_n := K_n \setminus K_{n-1},$$

il est clair qu'aucun des I_n n'est vide (stricte croissance de (K_n)), qu'ils sont deux à deux disjoints (pour la même raison) et que leur réunion est I. La famille $\{I_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ constitue donc une partition de I en sous-ensembles finis. Notons maintenant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad m_n := \operatorname{card} K_n - 1.$$

Comme (K_n) est strictement croissante pour l'inclusion, la suite d'entiers (m_n) est strictement croissante. On obtient alors une partition $\{A_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ de $\mathbb{N}$ en posant :

$$A_0 := \{0, \ldots, m_0\}, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad A_n := \{m_{n-1} + 1, \ldots, m_n\}.$$

Les A_n sont finis, $\operatorname{card} A_0 = m_0$ et pour $n \geq 1$,

$$\operatorname{card} A_n = m_n - m_{n-1} = \operatorname{card} K_n - \operatorname{card} K_{n-1} = \operatorname{card} I_n.$$

Dire qu'A_n et I_n ont même cardinal c'est dire précisément qu'il existe une bijection $\sigma_n : A_n \to I_n$. En « recollant » ces bijections σ_n entre ensembles finis, on construit une application $\sigma : \mathbb{N} \to I$: tout $k \in \mathbb{N}$ appartient à un unique A_n (puisque les A_n partitionnent $\mathbb{N}$) et on pose alors

$$\sigma(k) := \sigma_n(k), \quad (k \in A_n).$$

Vérifions que σ ainsi définie est une bijection. Tout $i \in I$ appartient à un I_n (puisque les I_n partitionnent I). Il a alors pour antécédent par σ l'entier $\sigma_n^{-1}(i) \in A_n$. Ceci montre que chaque $i \in I$ a au moins un antécédent par σ, donc que σ est surjective. Pour vérifier l'injectivité, soient k et l deux entiers distincts. Ou bien ils sont dans le même A_n et alors $\sigma(k) = \sigma_n(k) \neq \sigma_n(l) = \sigma(l)$ par injectivité de σ_n. Ou bien $k \in A_n$ et $l \in A_{n'}$ avec $n \neq n'$. Alors $\sigma(k) \in I_n$ et $\sigma(l) \in I_{n'}$ et comme I_n et $I_{n'}$ sont disjoints, $\sigma(k)$ et $\sigma(l)$ sont forcément distincts. Nous avons finalement construit une suite strictement croissante d'entiers m_n (donc tendant vers l'infini) et une bijection $\sigma : \mathbb{N} \to I$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sigma\bigl(\{0, \dots, m_n\}\bigr) = K_n.$$

Au vu de (19), nous avons ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \Bigl\| \sum_{k=0}^{m_n} u_{\sigma(k)} - S \Bigr\| > \varepsilon,$$

ce qui interdit la convergence vers S de la série de terme général $u_{\sigma(k)}$ et contredit l'hypothèse de convergence commutative de $\sum_{i \in I} u_i$. L'obtention de cette contradiction reposant sur la négation de la sommabilité intrinsèque de $\{u_i;\ i \in I\}$, on en déduit que $\{u_i;\ i \in I\}$ est intrinsèquement sommable. Notons S' sa somme. Il reste à vérifier que $S' = S$. Par définition de la sommabilité intrinsèque, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe J_ε, partie finie de I telle que pour toute partie finie $K \supset J_\varepsilon$ de I, $\|S' - S_K\| < \varepsilon$. D'autre part la convergence vers S de la série de terme général $u_{\varphi(k)}$ nous donne un $n_0(\varepsilon)$ tel que pour tout $n \geq n_0(\varepsilon)$, $\| \sum_{k=0}^{n} u_{\varphi(k)} - S\| < \varepsilon$. Comme φ est surjective, il existe un $n_1(\varepsilon) > n_0(\varepsilon)$ tel que $K := \varphi\bigl(\{0, \dots, n_1(\varepsilon)\}\bigr)$ contienne J_ε. On a alors à la fois $\|S' - S_K\| < \varepsilon$ et $\|S - S_K\| < \varepsilon$, d'où par inégalité triangulaire $\|S - S'\| < 2\varepsilon$. Cette dernière inégalité étant vérifiée pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit $\|S - S'\| = 0$ et $S = S'$.

4) Soit $\{u_i,\ i \in I\}$ une famille infinie dans $\mathbb{R}_+$ telle que

$$M := \sup_{K \text{ fini } \subset I} \sum_{i \in K} u_i < +\infty. \tag{20}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme M est *fini*, $M - \varepsilon$ est strictement inférieur à M. Par minimalité du supremum M parmi tous les majorants de l'ensemble $\{S_K;\ K \text{ fini } \subset I\}$, il existe une partie finie J de I telle que

$$M - \varepsilon < S_J \leq M.$$

De plus pour toute partie finie K de I, contenant J,

$$M - \varepsilon < S_J \leq S_K \leq M. \tag{21}$$

En effet, $S_K - S_J = S_{K\setminus J}$ est une somme de réels positifs, donc positive, ce qui justifie la deuxième inégalité dans (21). La troisième découle de la définition de M. Comme (21) implique $|M - S_K| < \varepsilon$, nous avons ainsi établi que $\{u_i,\ i \in I\}$ est intrinsèquement sommable et de somme M.

5) Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré où μ est une mesure finie. On suppose de plus que la tribu $\mathcal{F}$ possède les singletons ($\forall\omega \in \Omega$, $\{\omega\} \in \mathcal{F}$). Alors toute partie *finie* K de Ω appartient aussi à la tribu $\mathcal{F}$ et par additivité et croissance de μ,

$$\mu(K) = \sum_{\omega\in K} \mu(\{\omega\}) \leq \mu(\Omega) < +\infty.$$

Il en résulte que la famille de réels positifs $\{\mu(\omega);\ \omega \in \Omega\}$ vérifie (21) avec $M \leq \mu(\Omega)$ (prendre $I = \Omega$, remplacer i par ω et u_i par $\mu(\{\omega\})$). Elle est donc intrinsèquement sommable et la sous-famille de ses termes non nuls est au plus dénombrable d'après la question 1. L'ensemble des points ω où μ a une masse ponctuelle est donc lui aussi au plus dénombrable. La généralisation au cas où μ est σ-finie est immédiate. En effet, Ω est union d'une suite (A_n) dans $\mathcal{F}$ telle que chaque A_n soit de mesure finie. En remplaçant Ω par A_n dans le raisonnement ci-dessus, on voit que $B_n := \{\omega \in A_n;\ \mu(\{\omega\}) > 0\}$ est au plus dénombrable. Comme $B := \{\omega \in;\ \mu(\{\omega\}) > 0\}$ est évidemment l'union des B_n, il est lui même au plus dénombrable.

6) On déduit de la question précédente que si F est la fonction de répartition d'une mesure finie sur $(\mathbb{R}, \mathrm{Bor}(\mathbb{R}))$, l'ensemble de ses points de sauts (*i.e.* les $a \in \mathbb{R}$ tels que $F(a^-) < F(a)$) est au plus dénombrable. En effet, on sait que pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\mu(\{a\}) = F(a) - F(a^-)$. Comme F est croissante continue à droite, ceci permet de caractériser ses points de discontinuité a par la condition $\mu(\{a\}) > 0$.

Il y a bien sûr d'autres démonstrations de ce résultat, voir par exemple le corrigé du D.S. d'IFP de 2001–2002.

Ex 2. *Solution des questions auxquelles vous aviez échappé*

4) La meilleure constante est effectivement 2. Pour construire la loi de X_ε, reprenons la démonstration de l'inégalité (12) en faisant des choix visant à limiter le plus possible la perte due aux minorations dans (13). Voici ce que cela donne :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}X = \sum_{j=1}^{+\infty} jp_j &= \sum_{j=1}^{k} jp_j \qquad (\text{prendre } p_j := 0,\ \forall j > k)\\
&= p_k \sum_{j=1}^{k} j \qquad (\text{ pour } 1 \leq j \leq k, \text{ prendre } p_j := p_k, \text{ donc } p_j = 1/k)\\
&= p_k \frac{k(k+1)}{2}\\
&> p_k \frac{k^2}{2} \qquad (\text{si } k \text{ « grand », } \frac{k^2}{k(k+1)} \simeq 1).
\end{aligned}$$

Cette suite d'arbitrages nous fournit comme candidate naturelle pour la loi de X_ε, la loi uniforme sur $\{1,\dots,k\}$ avec k assez grand (dépendant de ε). Si X_ε suit cette loi, $p_k = 1/k$ et $\mathbf{E}X_\varepsilon = (k+1)/2$ et l'inégalité $p_k \geq (2-\varepsilon)\mathbf{E}X_\varepsilon/k^2$ sera réalisée dès que

$$\frac{1}{k} \geq (2-\varepsilon)\frac{k+1}{2k^2} \quad \Leftrightarrow \quad k \geq \frac{2}{\varepsilon} - 1.$$

5) On peut améliorer l'estimation $p_k = O(k^{-2})$ donnée par (12) pour la vitesse de convergence vers zéro de p_k en la remplaçant par $p_k = o(k^{-2})$. Ceci signifie que l'on peut écrire $p_k = \varepsilon_k k^{-2}$, la suite (ε_k) tendant vers zéro quand k tend vers l'infini. Pour ce faire, il suffit d'adapter les minorations (13) de la manière suivante. Il est commode de traiter d'abord le cas pair en posant $k = 2l$. On définit

$$\delta_{2l} := \sum_{j=l+1}^{2l} jp_j.$$

Il est clair que δ_{2l} tend vers zéro quand l tend vers l'infini puisque la série de terme général jp_j converge dans $\mathbb{R}_+$ (appliquer le critère de Cauchy, ou majorer par le reste de rang l de la série). Avec les mêmes justifications que pour (13), on a :

$$\delta_{2l} = \sum_{j=l+1}^{2l} jp_j \geq p_k \sum_{j=l+1}^{2l} j = p_k\frac{l(3l+1)}{2} \geq p_k\frac{3l^2}{2} = p_k\frac{3k^2}{8},$$

d'où l'on tire :

$$\forall k \in 2\mathbb{N}^*, \quad p_k \leq \frac{8}{3k^2}\delta_k. \tag{22}$$

Pour $k = 2l+1$ impair, on pose $\delta_{2l+1} := \delta_{2l}$ et on majore p_{2l+1} par $p_{2l} = p_{k-1}$. D'où

$$\forall k \text{ impair et } k \geq 3, \quad p_k \leq \frac{8\delta_k}{3(k-1)^2} = \frac{8\delta_k}{3k^2(1-1/k)^2} \leq \frac{8\delta_k}{3k^2(1-1/3)^2} = \frac{6\delta_k}{k^2}. \tag{23}$$

En posant $\varepsilon_k := k^2 p_k$, les inégalités (22) et (23) montrent que ε_k tend vers zéro quand k tend vers l'infini et on a bien $p_k = \varepsilon_k k^{-2} = o(k^{-2})$.

Remarque. Ce résultat permet de mieux comprendre la question 3. En fait le résultat de la question 3 peut s'écrire (de façon un peu alambiquée) $\liminf_{k\to+\infty} k^2 p_k = 0$, tandis que celui de la question 5 est plus précis puisqu'il s'écrit aussi $\limsup_{k\to+\infty} k^2 p_k = 0$, ou encore $\lim_{k\to+\infty} k^2 p_k = 0$.

Références

[ICP] Ch. Suquet, *Introduction au Calcul des Probabilités*, cours de DEUG, Lille 2001.

Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IFP **Année 2002-03**

Corrigé du devoir n° 2

On représente les suites infinies de tirages à pile ou face comme les éléments de l'ensemble
$$\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}^*}.$$
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit π_n la fonction sur Ω à valeurs dans $\{0,1\}$ définie par $\pi_n(\omega) = \omega(n)$; cette fonction représente le résultat du n-ième tirage.

Soit p un réel fixé appartenant à $]0,1[$. On veut construire une tribu $\mathcal{F}$ sur Ω rendant les fonctions π_n mesurables, et une probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{F})$ telle que pour tout $n \geq 1$,
$$\mathsf{P}\{\pi_n = 1\} = p, \quad \mathsf{P}\{\pi_n = 0\} = 1 - p.$$

Question 1. Soit $\mathcal{G}$ une tribu sur Ω. Montrer que π_n est $\mathcal{G}$-$\mathcal{P}(\{0,1\})$ mesurable si et seulement si les ensembles $\{\pi_n = 1\}$ et $\{\pi_n = 0\}$ appartiennent à $\mathcal{G}$. La réunion $\bigcup_{n\geq 1} \pi_n^{-1}\big(\mathcal{P}(\{0,1\})\big)$ est-elle une tribu ?

Réponse. On suppose les π_n $\mathcal{G}$-$\mathcal{P}(\{0,1\})$ mesurables. La tribu $\mathcal{P}(\{0,1\})$ contient les singletons $\{0\}$ et $\{1\}$, donc nécessairement $\mathcal{G}$ contient $\pi_n^{-1}(\{0\})$ et $\pi_n^{-1}(\{1\})$, autrement dit $\{\pi_n = 0\}$ et $\{\pi_n = 1\}$ appartiennent à $\mathcal{G}$.

Réciproquement, supposons que $\{\pi_n = 0\}$ et $\{\pi_n = 1\}$ appartiennent à $\mathcal{G}$. La tribu $\mathcal{P}(\{0,1\})$ étant égale à $\{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}$, pour établir la mesurabilité de π_n souhaitée, il suffit alors de vérifier que $\pi_n^{-1}(\emptyset)$ et $\pi_n^{-1}(\{0,1\})$ appartiennent à $\mathcal{G}$, ce qui est immédiat, car le premier ensemble vaut $\emptyset$, et le second Ω.

La réunion $\bigcup_{n\geq 1} \pi_n^{-1}\big(\mathcal{P}(\{0,1\})\big)$ n'est pas une tribu. En effet, elle n'est pas stable par intersection finie ; par exemple, $\pi_1^{-1}(\{0\}) \cap \pi_2^{-1}(\{0\}) = \{0\} \times \{0\} \times \{0,1\}^{\mathbb{N}^* \setminus \{1,2\}}$ qui n'est pas de la forme $\pi_n^{-1}(A)$ pour $n \geq 1$ et $A \subset \{0,1\}$.

Question 2. Posons $\Omega_n = \{0,1\}^n$ et $\Omega^{(n)} = \{0,1\}^{\mathbb{N}^* \setminus \{1,\dots,n\}}$ de sorte que $\Omega = \Omega_n \times \Omega^{(n)}$. Soit f_n la fonction de Ω dans Ω_n définie par $f_n(\omega) = \big(\pi_1(\omega), \dots, \pi_n(\omega)\big)$ et soit $\mathcal{F}_n = f_n^{-1}\big(\mathcal{P}(\Omega_n)\big)$. Montrer que :

a) $\mathcal{F}_n$ est une tribu,

b) $\mathcal{F}_n = \{A \times \Omega^{(n)}, A \subset \Omega_n\}$,

c) les fonctions $\pi_1, \dots, \pi_n$ sont $\mathcal{F}_n$-$\mathcal{P}(\{0,1\})$ mesurables.

Réponse.

a) L'ensemble $\mathcal{F}_n$ est l'image réciproque de $\mathcal{P}(\Omega_n)$, tribu sur Ω_n, par l'application f_n. C'est donc une tribu sur Ω.

b) Soit $C \subset \Omega$, alors

$$\begin{aligned} C \in \mathcal{F}_n &\iff \exists\, A \subset \Omega_n\,; \quad C = f_n^{-1}(A) \\ &\iff \exists\, A \subset \Omega_n\,; \quad C = \{\omega \in \Omega; (\pi_1(\omega), \dots, \pi_n(\omega)) \in A\} \\ &\iff \exists\, A \subset \Omega_n\,; \quad C = \{\omega \in \Omega; (\omega(1), \dots, \omega(n)) \in A\} \\ &\iff \exists\, A \subset \Omega_n\,; \quad C = A \times \Omega^{(n)}. \end{aligned}$$

La tribu $\mathcal{F}_n$ est donc égale à $\{A \times \Omega^{(n)}, A \subset \Omega_n\}$.

c) Pour $k \in \{1, \dots, n\}$ et $u \in \{0,1\}$, posons

$$C_{k,u} = \Omega_{k-1} \times \underbrace{\{u\}}_{k\text{-ième rang}} \times \{0,1\}^{\{k+1,\dots,n\}}.$$

L'ensemble $C_{k,u}$ est évidemment une partie de Ω_n et $\{\pi_k = u\}$ vaut $f_n^{-1}(C_{k,u})$, donc $\{\pi_k = u\} \in \mathcal{F}_n$, pour $u \in \{0,1\}$. Ainsi, d'après la question 1), l'application π_k est $\mathcal{F}_n$-$\mathcal{P}(\{0,1\})$ mesurable, et ce pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$.

Question 3. Pour tout $C \in \mathcal{F}_n$, on pose

$$\mathsf{P}_n(C) = \sum_{x \in f_n(C)} p^{|x|}(1-p)^{n-|x|},$$

où $|x|$ désigne le nombre de coordonnées de x égales à 1. Montrer que P_n est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F}_n)$ et que pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, on a $\mathsf{P}_n\{\pi_k = 1\} = p$.

Réponse. Montrons que la fonction d'ensembles P_n définie sur $\mathcal{F}_n$ est une probabilité.

– $\mathsf{P}_n(\emptyset) = \sum_{x \in \emptyset} p^{|x|}(1-p)^{n-|x|} = 0.$

– Soit $(C_k)_{k \geq 1}$ une suite d'éléments de $\mathcal{F}_n$ disjoints deux à deux. D'après 2.b), il existe une suite $(A_k)_{k \geq 1}$de parties de Ω_n telles que $C_k = A_k \times \Omega^{(n)}$ pour tout $k \geq 1$. La disjonction des C_k entraîne celle des A_k et par ailleurs, $f_n(C_k) = A_k$. Les $f_n(C_k)$, $k \geq 1$, forment donc une suite de parties de Ω_n disjointes deux à deux. Les sommes écrites ci-dessous sont donc des sommes finies et on a sachant que $f_n\big(\bigcup_{k \geq 1} C_k\big) = \bigcup_{k \geq 1} f_n\big(C_k\big)$,

$$\begin{aligned} \mathsf{P}_n\big(\bigcup_{k \geq 1} C_k\big) &= \sum_{x \in \bigcup_{k \geq 1} f_n(C_k)} p^{|x|}(1-p)^{n-|x|} \\ &= \sum_{k \geq 1} \sum_{x \in f_n(C_k)} p^{|x|}(1-p)^{n-|x|} \\ &= \sum_{k \geq 1} \mathsf{P}_n(C_k). \end{aligned}$$

P_n est donc σ-additive.

– P_n est d'après les deux points précédents une mesure, il nous reste à montrer que $\mathsf{P}_n(\Omega) = 1$.

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}_n(\Omega) &= \sum_{x \in f_n(\Omega)} p^{|x|}(1-p)^{n-|x|} \\
&= \sum_{x \in \Omega_n} p^{|x|}(1-p)^{n-|x|} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \sum_{x \in \Omega_n ; |x| = k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Le passage de la deuxième à la troisième ligne se justifie en disant que l'on fait une partition de Ω_n selon le nombre k de coordonnées de x égales à 1.
Le passage de la troisième à la quatrième ligne s'obtient en calculant le cardinal de chaque élément de cette partition, autrement dit en comptant le nombre d'éléments de $\{0,1\}^n$ ayant exactement k coordonnées égales à 1 : il y en a C_n^k.

En résumé, P_n est donc bien une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F}_n)$.

Calculons maintenant $\mathsf{P}_n\{\pi_k = 1\}$, pour $k \in \{1, \ldots, n\}$. D'après la réponse à la question 2.c), on sait que

$$\{\pi_k = 1\} = f_n^{-1}\big(\Omega_{k-1} \times \underbrace{\{1\}}_{k\text{-ième rang}} \times \{0,1\}^{\{k+1,\ldots,n\}}\big).$$

Cette remarque nous permet d'écrire

$$\mathsf{P}_n\{\pi_k = 1\} = \sum_{x \in \Omega_{k-1} \times \{1\} \times \{0,1\}^{\{k+1,\ldots,n\}}} p^{|x|}(1-p)^{n-|x|}. \tag{24}$$

Posons $\check{x} = (\pi_1(x), \ldots, \pi_{k-1}(x), \pi_{k+1}(x), \ldots, \pi_n(x))$. On a alors $x \in \Omega_{k-1} \times \{1\} \times \{0,1\}^{\{k+1,\ldots,n\}}$ si et seulement si $\check{x} \in \Omega_{n-1}$, et $|\check{x}| = |x| - 1$. On peut donc réécrire (24) de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}_n(\pi_k = 1) &= \sum_{\check{x} \in \Omega_{n-1}} p^{|\check{x}|+1}(1-p)^{n-(|\check{x}|+1)} \\
&= p \sum_{\check{x} \in \Omega_{n-1}} p^{|\check{x}|}(1-p)^{(n-1)-|\check{x}|} \\
&= p \times \mathsf{P}_{n-1}(\Omega) \\
&= p.
\end{aligned}$$

Question 4. Montrer que la suite $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ est croissante. En déduire que $\bigcup\limits_{n\geq 1} \mathcal{F}_n$ est une semi-algèbre sur Ω que l'on notera $\mathcal{C}$ dans la suite du problème.

Réponse. Pour établir la monotonie de la suite $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$, on utilise le résultat 2.b) :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_n &= \{A \times \Omega^{(n)}, A \subset \Omega_n\} \\ &= \{A \times \{0,1\} \times \Omega^{(n+1)}, A \subset \Omega_n\} \\ &\subset \mathcal{F}_{n+1}, \end{aligned}$$

puisque $A \times \{0,1\} \subset \Omega_{n+1}$ dès que $A \subset \Omega_n$.

Avant de montrer à proprement parler que $\mathcal{C} = \bigcup\limits_{n\geq 1} \mathcal{F}_n$ est une semi-algèbre, nous allons faire la remarque suivante : $\mathcal{C}$ contient $\emptyset$ et Ω (chaque $\mathcal{F}_n$ les contient), et est stable par intersection finie, union finie, passage au complémentaire. En effet, dès que l'on prend un nombre **fini** d'éléments de $\mathcal{C}$, on peut trouver $n_0 \geq 1$ tel que **tous** ces éléments de $\mathcal{C}$ soient dans la **même** tribu $\mathcal{F}_{n_0}$. A partir de là, les trois propriétés énoncées ci-dessus sont immédiates.
Toutes les propriétés qui définissent une semi-algèbre sont alors vérifiées, grâce à cette remarque.

Question 5. Soit P la fonction d'ensemble sur $\mathcal{C}$ définie par

$$\mathsf{P}(C) = \mathsf{P}_n(C) \text{ si } C \in \mathcal{F}_n.$$

Montrer que :

a) P est bien définie (vérifier que P_n et P_{n+1} coïncident sur $\mathcal{F}_n$),

b) P est additive sur $\mathcal{C}$,

c) $\mathsf{P}(\Omega) = 1$ et $\mathsf{P}(\emptyset) = 0$.

Réponse. On souhaite établir *in fine* que P se prolonge en une probabilité sur $(\Omega, \sigma(\mathcal{C}))$, et pour cela on utilisera le théorème d'extension du cours. Toutes les questions qui suivent, celle-ci comprise, ont pour but de vérifier les hypothèses de ce théorème.

a) La définition de P est ambigüe : si $C \in \mathcal{F}_n$, on sait qu'alors (croissance des $\mathcal{F}_n$) C est également dans $\mathcal{F}_{n+1}$. Ceci entraîne que l'on aurait $\mathsf{P}(C) = \mathsf{P}_n(C)$ et $\mathsf{P}(C) = \mathsf{P}_{n+1}(C)$. Il s'agit donc de vérifier que pour tout $C \in \mathcal{F}_n$,

$$\mathsf{P}_n(C) = \mathsf{P}_{n+1}(C).$$

D'après 2.b), $C \in \mathcal{F}_n$ entraîne qu'il existe $A \subset \Omega_n$ telle que $C = A \times \Omega^{(n)}$. Alors $f_{n+1}(C) = A \times \{0,1\} = (A \times \{0\}) \cup (A \times \{1\})$. Ceci justifie l'égalité suivante :

$$\mathsf{P}_{n+1}(C) = \sum_{x\in A\times\{0\}} p^{|x|}(1-p)^{(n+1)-|x|} + \sum_{x\in A\times\{1\}} p^{|x|}(1-p)^{(n+1)-|x|}.$$

En remarquant que, si $\tilde{x}$ désigne $(x(1), \ldots, x(n))$, $x \in A \times \{0\}$ équivaut à ($\tilde{x} \in A$ et $|\tilde{x}| = |x|$), de même que $x \in A \times \{1\}$ équivaut à ($\tilde{x} \in A$ et $|\tilde{x}| = |x| - 1$), on peut écrire

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}_{n+1}(C) &= \sum_{\tilde{x}\in A} p^{|\tilde{x}|}(1-p)^{(n+1)-|\tilde{x}|} + \sum_{\tilde{x}\in A} p^{|\tilde{x}|+1}(1-p)^{(n+1)-(|\tilde{x}|+1)} \\
&= (1-p)\sum_{\tilde{x}\in A} p^{|\tilde{x}|}(1-p)^{n-|\tilde{x}|} + p\sum_{\tilde{x}\in A} p^{|\tilde{x}|}(1-p)^{n-|\tilde{x}|} \\
&= \sum_{\tilde{x}\in A} p^{|\tilde{x}|}(1-p)^{n-|\tilde{x}|} \\
&= \mathsf{P}_n(C).
\end{aligned}$$

La fonction d'ensembles P est donc bien définie.

b) Considérons n éléments disjoints deux à deux de $\mathcal{C}$ notés $C_1, \ldots, C_n$. Chaque C_i est alors dans un certain $\mathcal{F}_{n_i}$. La suite des tribus $\mathcal{F}_n$ étant croissante, tous les C_i appartiennent à $\mathcal{F}_m$ dès que m est supérieur ou égal $\max\limits_{1\le i\le n} n_i$.

A partir de là, on n'a même pas besoin de supposer que $\overset{n}{\underset{i=1}{\cup}} C_i$ est dans $\mathcal{C}$ car la tribu $\mathcal{F}_m$ est stable par union finie. De même, en se servant du fait que P_m est une mesure sur $\mathcal{F}_m$, on obtient immédiatement les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}\Big(\overset{n}{\underset{i=1}{\cup}} C_i\Big) &= \mathsf{P}_m\Big(\overset{n}{\underset{i=1}{\cup}} C_i\Big) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}_m(C_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}(C_i)
\end{aligned}$$

P est donc bien additive sur $\mathcal{C}$.

c) Les ensembles Ω et $\emptyset$ étant dans $\mathcal{F}_1$ (par exemple), P_1 étant une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F}_1)$, on a $\mathsf{P}(\Omega) = \mathsf{P}_1(\Omega) = 1$ et $\mathsf{P}(\emptyset) = \mathsf{P}_1(\emptyset) = 0$.

Question 6. Soit $(C_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante d'éléments de $\mathcal{C}$. On veut établir que si les C_i sont tous non vides, alors

$$\underset{i\in\mathbb{N}}{\cap} C_i \neq \emptyset.$$

Réponse. Avant de commencer à prouver l'existence d'un élément $\bar{\omega}$ dans $\underset{i\in\mathbb{N}}{\cap} C_i$, nous allons établir le résultat préliminaire suivant :

Si $(B_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de parties non vides de Ω, alors pour tout $k \geq 1$,

$$\underset{i\in\mathbb{N}}{\cap} \pi_k(B_i) \neq \emptyset.$$

Preuve. Soit $k \geq 1$. Les propriétés de la suite $(B_i)_{i\in\mathbb{N}}$ entraînent que la suite $(\pi_k(B_i))_{i\in\mathbb{N}}$ est encore une suite **décroissante** de parties **non vides** de $\{0,1\}$. On distingue alors deux cas :

Premier cas : $\forall i \in \mathbb{N}$, $0 \in \pi_k(B_i)$. Il est alors immédiat que $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} \pi_k(B_i)$ est non vide, puisqu'elle contient 0.

Second cas : $\exists i_0 \in \mathbb{N}$, $0 \notin \pi_k(B_{i_0})$. Par décroissance de la suite, pour tout $i \geq i_0$, 0 ne peut appartenir à $\pi_k(B_i)$. Les ensembles $\pi_k(B_i)$, pour $i \geq i_0$, étant non vides, contiennent donc nécessairement 1. Toujours par monotonie de la suite $(\pi_k(B_i))_{i\in\mathbb{N}}$, si 1 appartient à $\pi_k(B_{i_0})$, il appartient $\pi_k(B_i)$, pour tout $i \in \{0,\ldots,i_0\}$. Au total, 1 appartient à tous les $\pi_k(B_i)$, et donc $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} \pi_k(B_i)$ est non vide.

Fin de la preuve.

Ce résultat établi, nous allons montrer que $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} C_i$ est non vide. Guidés par l'énoncé, il s'agit de montrer dans un premier temps que l'on peut effectivement construire l'élément $\bar{\omega}$ décrit dans l'énoncé, puis dans un second temps que cet $\bar{\omega}$ appartient bien à $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} C_i$. Pour ce faire, on introduit la propriété suivante pour un élément ω de Ω :

$$\forall\, i \in \mathbb{N}, \quad C_i \cap f_k^{-1}\big\{\big(\omega(1),\ldots,\omega(k)\big)\big\} \neq \emptyset. \tag{25}$$

(Ici et dans la suite, les parenthèses autour des accolades sont omises pour alléger l'écriture). Construisons par récurrence sur k un élément $\bar{\omega}$ de Ω vérifiant (25) pour tout $k \geq 1$.

Rang $k = 1$: le résultat préliminaire montre que $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} \pi_1(C_i)$ est non vide. Soit alors $\bar{\omega}(1) \in \bigcap_{i\in\mathbb{N}} \pi_1(C_i)$; pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\bar{\omega}(1)$ appartient à $\pi_1(C_i)$, ce qui implique $C_i \cap \pi_1^{-1}\big\{\bar{\omega}(1)\big\} \neq \emptyset$, pour tout $i \in \mathbb{N}$. Comme $f_1 = \pi_1$, nous venons de montrer la condition (25) pour $k = 1$.

Passage du rang k au rang $k+1$: on suppose $\bar{\omega}(1),\ldots,\bar{\omega}(k)$ construits et la la condition (25) vraie au rang k. La suite $(C_i)_{i\in\mathbb{N}}$ étant décroissante, celle formée des

$$C_i \cap f_k^{-1}\big\{\big(\bar{\omega}(1),\ldots,\bar{\omega}(k)\big)\big\},\ i \in \mathbb{N}$$

l'est encore, et le résultat préliminaire nous permet d'affirmer que

$$\bigcap_{i\in\mathbb{N}} \pi_{k+1}\Big(C_i \cap f_k^{-1}\big\{\big(\bar{\omega}(1),\ldots,\bar{\omega}(k)\big)\big\}\Big) \neq \emptyset.$$

Ceci justifie que l'on puisse choisir un élément dans cet ensemble, que l'on note $\bar{\omega}(k+1)$. Ceci nous permet d'enchaîner les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
&\bar{\omega}(k+1) \in \bigcap_{i\in\mathbb{N}} \pi_{k+1}\Big(C_i \cap f_k^{-1}\big\{\big(\bar{\omega}(1),\dots,\bar{\omega}(k)\big)\big\}\Big) \\
&\iff \forall i \in \mathbb{N}, \quad \exists\, \omega_i \in C_i \cap f_k^{-1}\big\{\big(\bar{\omega}(1),\dots,\bar{\omega}(k)\big)\big\}; \quad \pi_{k+1}(\omega_i) = \bar{\omega}(k+1) \\
&\iff \forall i \in \mathbb{N}, \quad \exists\, \omega_i \in C_i; \quad \omega_i(1) = \bar{\omega}(1),\dots,\omega_i(k) = \bar{\omega}(k) \text{ et } \omega_i(k+1) = \bar{\omega}(k+1) \\
&\iff \forall i \in \mathbb{N}, \quad \exists\, \omega_i \in C_i; \quad \omega_i \in f_{k+1}^{-1}\big\{\big(\bar{\omega}(1),\dots,\bar{\omega}(k+1)\big)\big\} \\
&\iff \forall i \in \mathbb{N}, \quad C_i \cap f_{k+1}^{-1}\big\{\big(\bar{\omega}(1),\dots,\bar{\omega}(k+1)\big)\big\} \neq \emptyset.
\end{aligned}$$

La condition (25) est encore vraie au rang $k+1$.
En résumé, on a construit un élément $\bar{\omega} = (\bar{\omega}(k))_{k\geq 1}$ de Ω tel que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall i \in \mathbb{N}, \quad C_i \cap f_k^{-1}\Big(\big\{\big(\bar{\omega}(1),\dots,\bar{\omega}(k)\big)\big\}\Big) \neq \emptyset.$$

Cet élément $\bar{\omega}$ vérifie donc bien (25) pour tout $k \geq 1$.

Dans le passage du rang k au rang $k+1$, nous avons justifié l'existence de $\bar{\omega}(k+1)$. Il nous reste donc à montrer que $\bar{\omega}$ est bien un élément de $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} C_i$. Or pour tout $i \in \mathbb{N}$, il existe k ($k(i)$ serait plus correct, mais ô combien plus lourd !) tel que $C_i \in \mathcal{F}_k$. L'appartenance de $\bar{\omega}$ à C_i équivaut alors (voir la réponse à la question 2.b)) à

$$\big(\bar{\omega}(1),\dots,\bar{\omega}(k)\big) \in f_k(C_i),$$

soit encore à

$$C_i \cap f_k^{-1}\big\{\big(\bar{\omega}(1),\dots,\bar{\omega}(k)\big)\big\} \neq \emptyset,$$

ce qui est vrai puisque $\bar{\omega}$ vérifie (25) pour tout $k \geq 1$!

Question 7. Montrer que si $(C_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante d'éléments de $\mathcal{C}$ tendant vers $\emptyset$, alors

$$\lim_{i\to+\infty} \mathsf{P}(C_i) = 0.$$

Réponse. Dire qu'une suite d'ensembles $(C_i)_{i\geq 1}$ décroît vers $\emptyset$ signifie que $\bigcap_{i\geq 1} C_i = \emptyset$. Les C_i étant éléments de $\mathcal{C}$, la question 6) entraîne que l'on a alors nécessairement les C_i tous égaux à $\emptyset$ à partir d'un certain rang. En passant aux probabilités, ceci conduit à $\mathsf{P}(C_i) = 0$ à partir du même rang. La stationnarité entraînant la convergence, on a

$$\lim_{i\to+\infty} \mathsf{P}(C_i) = 0.$$

Question 8. Montrer que si $(C_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite croissante d'éléments de $\mathcal{C}$ dont la réunion appartient encore à $\mathcal{C}$, alors

$$\lim_{i\to+\infty} \mathsf{P}(C_i) = \mathsf{P}\big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} C_i\big).$$

Réponse. Soit $(C_i)_{i\geq 1}$ une suite croissante d'éléments de $\mathcal{C}$, dont l'union appartient encore à $\mathcal{C}$. La propriété que l'on cherche à établir est une propriété de type continuité monotone séquentielle de P, et l'on a déjà établi à la question précédente une propriété de ce type. On va l'utiliser, en construisant à partir de la suite croissante $(C_i)_{i\geq 1}$ une suite décroissante d'éléments de $\mathcal{C}$ tendant vers $\emptyset$. Pour ce faire, on pose, pour tout $i \geq 1$,

$$D_i = C_i^c \setminus \Big(\bigcap_{i\geq 1} C_i^c\Big) = C_i^c \cap \Big(\bigcup_{i\geq 1} C_i\Big).$$

La suite $(C_i)_{i\geq 1}$ étant croissante, celle des $(C_i^c)_{i\geq 1}$ est décroissante, et du coup celle des $(D_i)_{i\geq 1}$ également. Quelle est la limite de cette dernière suite ?

$$\begin{aligned}
\bigcap_{i\geq 1} D_i &= \bigcap_{i\geq 1} \Big(C_i^c \cap \Big(\bigcup_{i\geq 1} C_i\Big)\Big) \\
&= \Big(\bigcap_{i\geq 1} C_i^c\Big) \cap \Big(\bigcup_{i\geq 1} C_i\Big) \\
&= \Big(\bigcup_{i\geq 1} C_i\Big)^c \cap \Big(\bigcup_{i\geq 1} C_i\Big) \\
&= \emptyset.
\end{aligned}$$

Pour pouvoir appliquer la question 7), il reste à vérifier l'appartenance de D_i à $\mathcal{C}$: par hypothèse, chaque C_i est dans $\mathcal{C}$, ainsi que $\bigcup_{i\geq 1} C_i$. $\mathcal{C}$ étant stable par passage au complémentaire et par intersection finie, on en déduit que $D_i = C_i^c \cap \Big(\bigcup_{i\geq 1} C_i\Big)$ est bien un élément de $\mathcal{C}$. On peut donc écrire $\lim_{i\to+\infty} \mathsf{P}(D_i) = 0$. Mais $\mathsf{P}(D_i) = \mathsf{P}\Big(\bigcup_{i\geq 1} C_i\Big) - \mathsf{P}(C_i)$, il vient donc immédiatement

$$\lim_{i\to+\infty} \mathsf{P}(C_i) = \mathsf{P}\Big(\bigcup_{i\geq 1} C_i\Big).$$

Question 9. Montrer que P est sous-σ-additive sur $\mathcal{C}$.

Réponse. Montrons que P est sous-σ-additive sur $\mathcal{C}$. Soit $(C_i)_{i\geq 1}$ une suite d'éléments de $\mathcal{C}$ telle que l'on ait encore $\bigcup_{i\geq 1} C_i \in \mathcal{C}$. L'idée (classique) consiste à écrire $\bigcup_{i\geq 1} C_i$ comme union d'une suite **croissante** d'éléments de $\mathcal{C}$, et à appliquer la propriété de continuité croissante obtenue sur P à la question 8). On écrit donc

$$\begin{aligned}
\bigcup_{i\geq 1} C_i &= \bigcup_{k\geq 1} \Big(\bigcup_{i=1}^{k} C_i\Big), \\
\mathsf{P}\Big(\bigcup_{i\geq 1} C_i\Big) &= \mathsf{P}\left(\bigcup_{k\geq 1} \Big(\bigcup_{i=1}^{k} C_i\Big)\right).
\end{aligned}$$

La suite des $\Big(\bigcup_{i=1}^{k} C_i\Big)_{k\geq 1}$ est une suite évidemment croissante d'éléments de $\mathcal{C}$ (stabilité de $\mathcal{C}$ par union finie), dont la réunion appartient encore à $\mathcal{C}$. On déduit de la question 8) :

$$\mathsf{P}\Big(\bigcup_{i\geq 1} C_i\Big) = \lim_{k\to+\infty} \mathsf{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{k} C_i\Big).$$

Par ailleurs, pour tout $k \geq 1$, les $C_i, i \in \{1, \ldots, k\}$, et $\overset{k}{\underset{i=1}{\cup}} C_i$, sont des éléments de $\mathcal{C}$, il existe donc n (dépendant de k) tel que ces $k+1$ ensembles soient dans le même $\mathcal{F}_n$. Ceci justifie la première des égalités qui suivent, ainsi que le passage de la quatrième à la cinquième ligne.

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}\Big(\overset{k}{\underset{i=1}{\cup}} C_i\Big) &= \mathsf{P}_n\Big(\overset{k}{\underset{i=1}{\cup}} C_i\Big) \\
&= \sum_{x \in f_n(\overset{k}{\underset{i=1}{\cup}} C_i)} p^{|x|}(1-p)^{n-|x|} \\
&= \sum_{x \in \overset{k}{\underset{i=1}{\cup}} f_n(C_i)} p^{|x|}(1-p)^{n-|x|} \\
&\leq \sum_{i=1}^{k} \sum_{x \in f_n(C_i)} p^{|x|}(1-p)^{n-|x|} \\
&\leq \sum_{i=1}^{k} \mathsf{P}_n(C_i) \\
\mathsf{P}\Big(\overset{k}{\underset{i=1}{\cup}} C_i\Big) &\leq \sum_{i=1}^{k} \mathsf{P}(C_i).
\end{aligned}$$

On passe à la limite en k dans cette dernière inégalité. Le terme de gauche tend vers $\mathsf{P}\Big(\underset{i\geq 1}{\cup} C_i\Big)$, nous l'avons établi. Le terme de droite, quant à lui, admet une limite dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ (série de terme général positif). On obtient donc au total la sous-σ-additivité de P :

$$\mathsf{P}\Big(\underset{i\geq 1}{\cup} C_i\Big) \leq \sum_{i\geq 1} \mathsf{P}(C_i).$$

Question 10. Conclure en appliquant le théorème d'extension du cours.

Réponse. Nous allons appliquer le théorème d'extension du cours (théorème 31, chapitre 1). D'après 5.c), $\mathsf{P}(\emptyset) = 0$, d'après 5.b), P est additive sur $\mathcal{C}$, et enfin, d'après 9), P est sous-σ-additive sur $\mathcal{C}$. Toutes les hypothèses du théorème d'extension sont donc vérifiées : P se prolonge en une probabilité (car $\mathsf{P}(\Omega) = 1$, d'après 5.c)) sur $\sigma(\mathcal{C})$.

Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IFP **Année 2002-03**

Corrigé du Devoir Surveillé du 27 novembre 2002

Ex 1. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire positive définie sur cet espace.

1) Rappelons que la variable aléatoire positive X sur $(\Omega, \mathcal{F})$ n'est rien d'autre qu'une application $\Omega \to \overline{\mathbb{R}}_+$, mesurable $\mathcal{F}$-Bor$(\overline{\mathbb{R}}_+)$. Par le théorème 2.23 du cours [10], X est limite (au sens de la convergence simple sur tout Ω) d'une suite croissante (X_n) de fonctions étagées mesurables positives. Ces fonctions étagées ne prennent chacune qu'un ensemble fini de valeurs distinctes. L'ensemble $X_n(\Omega)$ est donc *fini* pour tout n. Par mesurabilité de X_n pour les tribus $\mathcal{F}$ et Bor$(\overline{\mathbb{R}}_+)$, $X_n^{-1}(\{x\})$ appartient à $\mathcal{F}$ pour tout $x \in \overline{\mathbb{R}}_+$, donc en particulier pour tout $x \in X_n(\Omega)$. La fonction X_n est donc bien une variable aléatoire discrète, cf. corollaire 2.12 du cours.

2) On note F_n et F les fonctions de répartition respectives de X_n et X. Pour montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_n(x)$ converge en décroissant vers $F(x)$, considérons dans $\mathcal{F}$ la suite des évènements $A_n := \{X_n \leq x\}$, x quelconque étant *fixé*. En raison de la croissance de la suite (X_n), cette suite (A_n) est *décroissante pour l'inclusion*. En effet si $\omega \in A_{n+1}$, alors $X_{n+1}(\omega) \leq x$ et comme $X_n(\omega) \leq X_{n+1}(\omega)$, on a aussi $X_n(\omega) \leq x$, d'où $\omega \in A_n$. Ainsi pour tout entier n, $A_{n+1} \subset A_n$.

Notons $A := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ et vérifions que $A = \{X \leq x\}$. D'une part si $\omega \in A$, alors ω appartient à chacun des A_n, ce qui se traduit par la suite d'inégalités $X_n(\omega) \leq x$ pour tout n. En faisant tendre n vers l'infini, on en déduit l'inégalité *large* $X(\omega) \leq x$ et donc l'appartenance de ω à A. Ainsi A est inclus dans $\{X \leq x\}$. D'autre part si $\omega \in \{X \leq x\}$, alors $X(\omega) \leq x$ et comme $X(\omega)$ est la limite dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ de la suite croissante $\big(X_n(\omega)\big)_{n\in\mathbb{N}}$, on a pour tout n l'inégalité $X_n(\omega) \leq X(\omega)$, d'où $X_n(\omega) \leq x$ et ainsi ω appartient à *chacun* des A_n, donc aussi à leur intersection A. Ceci établit l'inclusion $\{X \leq x\} \subset A$ et achève la vérification de l'égalité de ces deux ensembles.

La *probabilité* $\mathbf{P}$ ayant la propriété de continuité séquentielle *décroissante* [11], on a

$$A_n \downarrow A \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P}(A_n) \downarrow \mathbf{P}(A).$$

En se souvenant que $F_n(x) = \mathbf{P}(X_n \leq x) = \mathbf{P}(A_n)$ et $F(x) = \mathbf{P}(X \leq x) = \mathbf{P}(A)$, on voit que le résultat annoncé est démontré.

[10] Dans le théorème du cours, la tribu sur l'ensemble d'arrivée est Bor$(\overline{\mathbb{R}})$, mais la lecture de la preuve montre immédiatement que l'on peut la remplacer par Bor$(\overline{\mathbb{R}}_+)$ qui contient elle aussi tous les intervalles $[k2^{-n}, (k+1)2^{-n}[$ et $[n, +\infty]$ dont les images réciproques par X servent à construire X_n.

[11] Pour une mesure μ quelconque, cette propriété n'est valide que pour les suites décroissantes (A_n) telles que pour un certain n_0, $\mu(A_{n_0}) < +\infty$, mais cette condition est automatiquement vérifiée pour toute suite décroissante si μ est une mesure *finie*.

Ex 2. *Loi uniforme sur la boule unité en grande dimension.*
On note λ_d la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$, $B_d(0,r)$ la boule fermée dans $\mathbb{R}^d$ de centre 0 et de rayon r, pour la distance associée à la norme euclidienne

$$\|x\|^2 := \sum_{i=1}^d x_i^2, \quad x = (x_1, \dots, x_d).$$

et $v(d) := \lambda_d\big(B_d(0,1)\big)$.

1) Pour $r > 0$, soit $h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $x \mapsto rx$ l'homothétie de centre 0 et de rapport r. On sait que pour tout borélien A de $\mathbb{R}^d$, $\lambda_d\big(h(A)\big) = r^d\lambda_d(A)$ (cf. cours, Prop. 1.39 iv). En remarquant que $B_d(0,r) = h\big(B_d(0,1)\big)$, on en déduit immédiatement que

$$\forall r > 0, \quad \lambda_d\big(B_d(0,r)\big) = r^d v(d). \tag{26}$$

2) Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et $U : \Omega \to \mathbb{R}^d$ un vecteur aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{F})$, autrement dit une application *mesurable* $\mathcal{F}$-Bor$(\mathbb{R}^d)$. La norme euclidienne N considérée comme application $N : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x\|$ est continue donc borélienne, c'est-à-dire ici mesurable Bor$(\mathbb{R}^d)$-Bor$(\mathbb{R})$. On en déduit que $R := \|U\| = N \circ U$ est mesurable $\mathcal{F}$-Bor$(\mathbb{R})$ comme composée d'applications mesurables. Autrement dit R est une *variable aléatoire réelle* sur $(\Omega, \mathcal{F})$.

Supposons maintenant que la loi de U (sous $\mathbf{P}$) soit la loi uniforme sur $B_d(0,1)$, donc donnée par

$$\forall A \in \mathrm{Bor}(\mathbb{R}^d), \quad \mathbf{P}(U \in A) = \frac{\lambda_d\big(A \cap B_d(0,1)\big)}{\lambda_d\big(B_d(0,1)\big)} = \frac{1}{v(d)}\lambda_d\big(A \cap B_d(0,1)\big). \tag{27}$$

La fonction de répartition F de R est définie sur $\mathbb{R}$ par $F(r) = \mathbf{P}(R \leq r)$. Si $r < 0$, $\{R \leq r\} = \{\omega \in \Omega;\ \|U\| \leq r\} = \emptyset$, donc $F(r) = 0$. Si $r = 0$, $\{R \leq 0\} = \{R = 0\} = \{U = 0\}$ et en appliquant (27) avec $A = \{0\}$, on obtient $F(0) = 0$ puisque la mesure de Lebesgue d'un singleton dans $\mathbb{R}^d$ est nulle. Pour $r > 0$, on a l'équivalence :

$$\|U\| \leq r \quad \Leftrightarrow \quad U \in B_d(0,r).$$

En appliquant alors (27) avec $A = B_d(0,r)$, on obtient :

$$\mathbf{P}(R \leq r) = \mathbf{P}(\|U\| \leq r) = \mathbf{P}\big(U \in B_d(0,r)\big) = \frac{1}{v(d)}\lambda_d\big(B_d(0,r) \cap B_d(0,1)\big).$$

Pour $0 < r \leq 1$, $B_d(0,r) \cap B_d(0,1) = B_d(0,r)$ et pour $r > 1$, cette intersection est égale à $B_d(0,1)$. En utilisant (26), on obtient finalement :

$$F(r) = \mathbf{P}(R \leq r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r \leq 0 \\ r^d & \text{si } 0 < r \leq 1 \\ 1 & \text{si } r > 1. \end{cases} \tag{28}$$

Par précaution, on vérifie qu'il s'agit bien d'une fonction de répartition : elle est croissante sur $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}$ (donc *a fortiori* continue à droite et limitée à gauche en tout point) et a pour limites 0 en $-\infty$ et 1 en $+\infty$.

Remarquons au passage que dès que $d > 1$, R ne suit pas la loi uniforme sur $[0,1]$. On pouvait s'en douter dès le départ, en regardant le cas $d = 2$. Si U suit la loi uniforme sur le disque unité $B_2(0,1)$, la probabilité que U « tombe » dans le disque $B_2(0,1/10)$ est le rapport de l'aire de ce disque à celle du disque unité, soit $1/100$. La probabilité que U « tombe » dans la couronne de centre 0, de rayon intérieur $9/10$ et de rayon extérieur 1 est égale au rapport de l'aire de cette couronne à celle du disque unité, soit $1-(9/10)^2 = 1-81/100 = 19/100$. Ainsi $\mathbf{P}(R \in]0,1/10]) = 1/100$, et $\mathbf{P}(R \in]9/10,1]) = 19/100$. Si R suivait la loi uniforme sur $[0,1]$, ces deux probabilités seraient égales toutes les deux à $1/10$.

3) Le réel m est *une* médiane de la variable aléatoire réelle R s'il vérifie à la fois $\mathbf{P}(R \leq m) \geq 1/2$ et $\mathbf{P}(R \geq m) \geq 1/2$. Il est commode d'exprimer ces deux conditions à l'aide de F. La première s'écrit simplement $F(m) \geq 1/2$. Pour la seconde, on note que

$$\mathbf{P}(R \geq m) = \mathbf{P}(R > m) + \mathbf{P}(R = m) = 1 - F(m) + \mathbf{P}(R = m).$$

Comme F est continue en tout point, la loi de R n'a pas de masse ponctuelle[12] d'où $\mathbf{P}(R = m) = 0$. Ainsi $\mathbf{P}(R \geq m) = 1 - F(m)$ et la recherche des médianes de R se réduit à la résolution du systèmes d'inégalités :

$$\left\{\begin{array}{rcl} F(m) & \geq & 1/2 \\ 1 - F(m) & \geq & 1/2 \end{array}\right. \quad\Leftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{rcl} F(m) & \geq & 1/2 \\ F(m) & \leq & 1/2 \end{array}\right. \quad\Leftrightarrow\quad F(m) = 1/2.$$

Un coup d'oeil sur (28) nous assure que cette dernière équation n'a certainement aucune solution m extérieure à l'intervalle $]0,1[$. La résolution de l'équation $F(m) = 1/2$ pour $0 < m < 1$ est immédiate puisqu'elle s'écrit $m^d = 1/2$. On a donc une solution unique $m = 2^{-1/d}$. En conclusion, R a une unique médiane :

$$\operatorname{med}(R) = 2^{-1/d}.$$

Voici une application ludique pour salle de T.P. informatique. Construisez un algorithme générant un vecteur aléatoire de loi uniforme sur la boule unité de $\mathbb{R}^3$ (par exemple par la méthode du rejet) et proposez à un autre joueur de parier que le point aléatoire généré va tomber dans la boule $B(0,r)$ tandis que vous pariez qu'il tombera dans son complémentaire dans $B(0,1)$. Poussez le vice jusqu'à laisser votre adversaire proposer la valeur de r pour laquelle il pense que le jeu est équilibré[13]...

4) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons U_n un vecteur aléatoire de loi uniforme sur $B_n(0,1)$, $R_n := \|U_n\|$ et F_n la fonction de répartition de r_n. Pour $0 < \varepsilon < 1$, on a

$$\mathbf{P}(1 - \varepsilon < R_n \leq 1) = F_n(1) - F_n(1-\varepsilon) = 1 - (1-\varepsilon)^n.$$

[12]Rappelons que l'on a toujours $\mathbf{P}(R = m) = F(m) - F(m-0)$, où $F(m-0)$ désigne la limite à gauche de F au point m.

[13]Cette valeur est bien sûr $2^{-1/3} \simeq 0{,}794$.

Par conséquent, quand n tend vers $+\infty$, $\mathbf{P}(1-\varepsilon < R_n \leq 1)$ tend vers 1. La traduction pratique de ce résultat est qu'en grande dimension, l'essentiel de la masse de la loi uniforme sur la boule unité est concentrée au voisinage de la *sphère* unité $S_n(0,1) := \{x \in \mathbb{R}^n;\ \|x\| = 1\}$.

Pour se faire une idée, supposons que l'on ait programmé pour $n = 1000$ la simulation[14] d'un vecteur aléatoire U_n de loi uniforme sur $B_n(0,1)$. Avant de lancer ce générateur, on peut parier que le vecteur U_n aura une norme supérieure à 0,99. La probabilité de gagner ce pari est d'environ 0,999 957.

Ex 3. Le but de cet exercice est d'établir que toute f λ-intégrable sur $\mathbb{R}$, vérifie pour λ-presque tout $x \in \mathbb{R}$, l'estimation asymptotique $f(nx) = o(n^\alpha)$ quand $n \to +\infty$.

1) Commençons par examiner l'effet d'un changement d'échelle $\varphi : x \mapsto cx$ sur une intégrale de Lebesgue. L'application φ est continue, donc borélienne. Elle est aussi bijective d'inverse *ponctuel* $\varphi^{-1} : y \mapsto \frac{1}{c}y$. On en déduit facilement la détermination de l'inverse *ensembliste* d'un borélien B de $\mathbb{R}$:

$$\varphi^{-1}(B) = \{x \in \mathbb{R};\ \varphi(x) \in B\} = \{\varphi^{-1}(y);\ y \in B\} = \Big\{\frac{1}{c}y;\ y \in B\Big\} =: \frac{1}{c}B. \tag{29}$$

Par transfert φ de l'espace mesuré $\big(\mathbb{R}, \mathrm{Bor}(\mathbb{R}), \lambda\big)$ vers $\big(\mathbb{R}, \mathrm{Bor}(\mathbb{R}), \nu := \lambda \circ \varphi^{-1}\big)$, on a pour toute $g : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}_+$, borélienne

$$\int_{\mathbb{R}} (g \circ \varphi)\, \mathrm{d}\lambda = \int_{\mathbb{R}} g\, \mathrm{d}\nu.$$

On identifie la mesure image ν grâce à (29) et à la formule de calcul de la mesure de Lebesgue de l'homothétique d'un borélien (cf. cours, Prop. 1.39 iv) :

$$\forall B \in \mathrm{Bor}(\mathbb{R}), \quad \nu(B) = \lambda\big(\varphi^{-1}(B)\big) = \lambda\Big(\frac{1}{c}B\Big) = \frac{1}{c}\lambda(B).$$

Ceci montre que ν est la mesure $\frac{1}{c}\lambda$. On en déduit que :

$$\forall c > 0, \quad \int_{\mathbb{R}} g(cx)\, \mathrm{d}\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} g\, \mathrm{d}\Big(\frac{1}{c}\lambda\Big) = \frac{1}{c}\int_{\mathbb{R}} g(y)\, \mathrm{d}\lambda(y). \tag{30}$$

2) Soit $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$, λ-intégrable sur $\mathbb{R}$ et $\alpha > 0$ une constante. En appliquant la formule de changement de variable (30) à la fonction borélienne positive $g = |f|$, on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} |n^{-\alpha} f(nx)|\, \mathrm{d}\lambda(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{n^{\alpha+1}} \int_{\mathbb{R}} |f(y)|\, \mathrm{d}\lambda(y) \right\} = \left\{ \int_{\mathbb{R}} |f|\, \mathrm{d}\lambda \right\} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha+1}} < +\infty.$$

En effet, l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} |f|\, \mathrm{d}\lambda$ est finie par l'hypothèse d'intégrabilité de f et la série de Riemann de terme général $n^{-(\alpha+1)}$ converge car α est strictement positif, donc $\alpha + 1 > 1$.

[14] La méthode du rejet serait calamiteuse ici car le rapport des volumes de $[-1,1]^n$ et $B_n(0,1)$ est équivalent à $\sqrt{n\pi}\big(\frac{2n}{\mathrm{e}\pi}\big)^{n/2}$. Il y a un algorithme bien plus performant ne nécessitant que la simulation de 1000 variables aléatoires gaussiennes $N(0,1)$ et une uniforme sur $[0,1]$.

3) Posons pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) := n^{-\alpha} f(nx)$. Il est clair que chaque f_n hérite de la mesurabilité de f (par composition de f avec l'homothétie continue $x \mapsto nx$ et multiplication par la constante $n^{-\alpha}$). D'après la question précédente, on a la convergence

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} |f_n| \, \mathrm{d}\lambda < +\infty.$$

On en déduit que la série de fonctions mesurables positives $\sum_{n\geq 1} |f_n|$ est λ-intégrable sur $\mathbb{R}$, donc aussi finie λ-presque partout (cf. cours prop. 4.19 ou cor. 4.23). Par conséquent

$$\sum_{n\geq 1} |f_n(x)| < +\infty, \quad \text{pour } \lambda\text{-presque tout } x \in \mathbb{R}.$$

Comme le terme général d'une série convergente (dans $\mathbb{R}$) tend nécessairement vers zéro, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} n^{-\alpha} f(nx) = 0, \quad \text{pour } \lambda\text{-presque tout } x \in \mathbb{R}. \tag{31}$$

4) Pour voir que la clause « λ-presque tout x » n'est pas superflue dans (31), construisons un exemple de fonction f λ-intégrable sur $\mathbb{R}$ telle que : $\lim_{n\to+\infty} n^{-\alpha} f(n) = +\infty$. Ainsi la convergence dans (31) n'aura pas lieu pour $x = 1$. On en déduit facilement qu'elle n'aura alors lieu pour *aucun* $x \in \mathbb{N}^*$.

L'exemple le plus simple est sans doute $f := (+\infty)\mathbf{1}_{\mathbb{N}^*}$. Cette fonction est mesurable et nulle λ-p.p., donc λ intégrable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n^{-\alpha} f(n) = n^{-\alpha} \times (+\infty) = +\infty$. Un autre exemple presque aussi simple où f ne prend que des valeurs finies est $f := \sum_{k\in\mathbb{N}^*} k^{\alpha+1}\mathbf{1}_{\{k\}}$. Là encore f est mesurable et nulle λ-p.p., donc λ-intégrable. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n^{-\alpha} f(n) = n^{-\alpha} n^{\alpha+1} = n$, donc $n^{-\alpha} f(n)$ tend vers l'infini avec n.

Dans les deux exemples précédents, (31) est évidente directement. En effet, ces deux fonctions sont nulles en dehors de $\mathbb{N}^*$. Si x n'est pas rationnel, nx ne peut appartenir à $\mathbb{N}^*$ et donc $f(nx) = 0$. Ainsi, au moins pour $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, la suite de terme général $n^{-\alpha} f(nx)$ est identiquement nulle donc trivialement convergente vers 0.

La construction suggérée par l'énoncé permet d'exhiber un exemple de fonction f avec $\int_{\mathbb{R}} f \, \mathrm{d}\lambda \neq 0$, où (31) est loin d'être évidente directement et où la convergence dans (31) n'a lieu pour aucun $x \in \mathbb{N}^*$. Cherchons donc f de la forme $f = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \mathbf{1}_{I_k}$, où les I_k sont des intervalles. En prenant les I_k deux à deux disjoints et en imposant à chaque I_k de contenir l'entier k, on aura pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(n) = a_n$. En prenant par exemple $a_n := n^{\alpha+1}$, on obtient bien la divergence cherchée puisque $n^{-\alpha} f(n) = n$. Il reste à vérifier que l'on peut choisir les I_k de façon que f soit effectivement λ-intégrable. La mesurabilité de f est évidente puisqu'il s'agit d'une série de fonctions mesurables positives. L'interversion série intégrale pour les fonctions mesurables positives (corollaire du th. de Beppo Levi, cf. cor. 3.12 du cours) nous donne

$$\int_{\mathbb{R}} f \, \mathrm{d}\lambda = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{I_k} \lambda = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \lambda(I_k).$$

En prenant par exemple $I_k = [k,\, k+\varepsilon_k]$, il suffit donc d'ajuster les longueurs ε_k des intervalles I_k de façon que la série de terme général $a_k\varepsilon_k$ soit convergente et donc que f soit intégrable. Finalement on voit que la fonction

$$f := \sum_{k=1}^{+\infty} k^{\alpha+1}\mathbf{1}_{[k,k+k^{-\alpha-3}]}$$

convient.
Remarque. La propriété (31) appliquée à cette fonction f implique que pour λ-presque tout x de $]0,1[$, la condition $nx \in I_n$ n'est vérifiée que pour un nombre *fini* d'indices n. On sait d'autre part que pour λ-presque tout x de $]0,1[$, la suite de terme général $nx-[nx]$ (*i.e.*, nx modulo 1) est *dense* dans $]0,1[$. Un peu de méditation s'impose ici pour se convaincre de la compatibilité ces deux affirmations...et de la profondeur de (31).

Problème.

On note λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Le but du problème est d'établir une inégalité entre l'intégrale de la dérivée presque partout d'une fonction croissante et la variation de cette fonction.

1) Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, borélienne et λ-intégrable sur tout intervalle borné de $\mathbb{R}$. On suppose que g a une limite à droite au point a. Cela signifie qu'il existe un réel ℓ (que nous noterons ultérieurement $g(a+0)$) tel que :

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ \forall x\in]a,a+\delta[,\quad \ell-\varepsilon<g(x)<\ell+\varepsilon. \tag{32}$$

Fixons $\varepsilon>0$. On déduit de (32) que pour $0<h<\delta$, et pour tout $x\in]a,a+h[$, $\ell-\varepsilon<g(x)<\ell+\varepsilon$. Cette inégalité montre que la fonction borélienne g est bornée sur l'intervalle de mesure finie $]a,a+h[$, donc λ-intégrable sur cet intervalle[15]. Par croissance de l'intégrale, on déduit de cet encadrement que

$$\forall h\in]0,\delta[,\quad \int_{]a,a+h[}(\ell-\varepsilon)\,\mathrm{d}\lambda \le \int_{]a,a+h[} g\,\mathrm{d}\lambda \le \int_{]a,a+h[}(\ell+\varepsilon)\,\mathrm{d}\lambda. \tag{33}$$

On peut remplacer dans (33) l'intervalle d'intégration $]a,a+h[$ par $[a,a+h]$ sans changer la valeur des intégrales car la mesure de Lebesgue ne charge pas les singletons. D'autre part si c est une constante, $\int_{[a,a+h]} c\,\mathrm{d}\lambda = c\lambda([a,a+h]) = ch$. En appliquant ceci avec $c=\ell-\varepsilon$ et $c=\ell+\varepsilon$, on obtient après division par $h>0$ dans (33) :

$$\forall h\in]0,\delta[,\quad \ell-\varepsilon \le \frac{1}{h}\int_{[a,a+h]} g\,\mathrm{d}\lambda \le \ell+\varepsilon. \tag{34}$$

Pour obtenir cet encadrement, nous avons travaillé avec $\varepsilon>0$ fixé et un $\delta>0$ dépendant de ε, donné par (32). Comme nous n'avons utilisé aucune hypothèse particulière sur ε, autre que $\varepsilon>0$, nous avons en fait montré que :

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ \forall h\in]0,\delta[,\quad \ell-\varepsilon \le \frac{1}{h}\int_{[a,a+h]} g\,\mathrm{d}\lambda \le \ell+\varepsilon. \tag{35}$$

[15] Donc l'hypothèse de l'énoncé « g λ-intégrable sur tout intervalle borné » est superflue.

Ceci nous donne la conclusion attendue puisque (35) est exactement l'écriture avec quantificateurs de la convergence :

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{1}{h}\int_{[a,a+h]} g(x)\,\mathrm{d}\lambda(x) = \ell = g(a+0). \tag{36}$$

2) Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissante, montrons qu'elle est borélienne. Pour cela il suffit de prouver que $F^{-1}(C)$ est un borélien de $\mathbb{R}$ pour tout $C \in \mathcal{C}$, où $\mathcal{C}$ désigne une famille de boréliens telle que $\sigma(\mathcal{C}) = \mathrm{Bor}(\mathbb{R})$. Prenons $\mathcal{C} := \{]-\infty, b];\ b \in \mathbb{R}\}$. Nous allons vérifier que pour tout $b \in \mathbb{R}$, $B := F^{-1}(]-\infty, b])$ est soit l'ensemble vide, soit un *intervalle* de $\mathbb{R}$, donc toujours un borélien de $\mathbb{R}$. En effet, si B n'est pas vide, posons

$$a := \sup B = \sup\{t \in \mathbb{R};\ F(t) \le b\}.$$

Si $x < a$, il existe[16] $t \in B$ (c'est-à-dire vérifiant $F(t) \le b$) tel que $x < t \le a$. Or F est croissante, donc $F(x) \le F(t) \le b$, d'où $x \in B$. Ce raisonnement étant valable pour tout $x < a$, on en déduit que B contient l'intervalle $]-\infty, a[$. Si $a = +\infty$, nécessairement $B = \mathbb{R}$. Si $a < +\infty$, pour tout $x > a = \sup B$, $x \notin B$. Par conséquent B ne peut être alors que l'un des deux intervalles $]-\infty, a[$ ou $]-\infty, a]$. Ainsi dans tous les cas B est soit vide soit un intervalle de $\mathbb{R}$.

3) Si $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est croissante, elle est λ-intégrable sur tout intervalle d'extrémités a, b, $-\infty < a < b < +\infty$. En effet, F est borélienne d'après la question précédente, il suffit donc de vérifier que $\int_{[a,b]} |F|\,\mathrm{d}\lambda < +\infty$. Si c'est vrai pour l'intervalle $[a,b]$ fermé, cela vaudra aussi pour chacun des trois autres intervalles d'extrémités a et b, puisque λ ne chargeant pas les singletons, les intégrales sur ces intervalles seront égales à $\int_{[a,b]} |F|\,\mathrm{d}\lambda$.

Par croissance de F, on a

$$\forall x \in [a,b], \quad F(a) \le F(x) \le F(b).$$

Remarquons que comme F est à valeurs dans $\mathbb{R}$, $F(a)$ et $F(b)$ sont des *réels*, donc *finis*. De l'encadrement précédent on déduit :

$$\forall x \in [a,b], \quad -F(b) \le -F(x) \le -F(a),$$

d'où[17]

$$|F(x)| = \max\bigl(F(x), -F(x)\bigr) \le \max\bigl(F(b), -F(a)\bigr) \le \max\bigl(|F(a)|, |F(b)|\bigr) =: M < +\infty.$$

Il en résulte la majoration :

$$\int_{[a,b]} |F|\,\mathrm{d}\lambda \le \int_{[a,b]} M\,\mathrm{d}\lambda = M\lambda([a,b]) = M(b-a) < +\infty.$$

[16] Rappelons que le sup de B est le *plus petit* des majorants de l'ensemble B. Donc si $x < a$, x n'est pas un majorant de B et il existe au moins un élément de B strictement supérieur à x

[17] L'auteur du corrigé présente ses excuses pour cet étalage de détails sordides au lecteur qui aura spontanément pensé à l'inégalité $|F(x)| \le \max\bigl(|F(a)|, |F(b)|\bigr)$. Il précise pour sa décharge qu'il a malheureusement lu dans 90% des copies corrigées l'inégalité $|F(x)| \le |F(b)|$ et suggère aux tenants de cette inégalité de considérer l'exemple $a = -1$, $b = 0$ et $F(x) = x\ldots$

On suppose dans toute la suite que $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est croissante, continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$, dérivable λ-presque partout sur $\mathbb{R}$. On admet que l'ensemble D des points où F est dérivable est un borélien de $\mathbb{R}$ et que $\lambda(D^c) = 0$. On définit la fonction f par :

$$f(x) := \begin{cases} F'(x) & \text{si } x \in D, \\ 0 & \text{si } x \in D^c. \end{cases}$$

On se propose de prouver que pour tous réels a, b $(-\infty < a < b < +\infty)$,

$$\int_{[a,b]} f \,\mathrm{d}\lambda \leq F(b) - F(a). \tag{37}$$

4) Fixons une suite (h_n) de réels strictement positifs, convergente vers 0 et posons

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G_n(x) := \frac{F(x+h_n) - F(x)}{h_n}, \quad G(x) := \liminf_{n\to+\infty} G_n(x).$$

Notons que chaque G_n est définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ à cause de la croissance de F. La fonction G est *définie sur tout* $\mathbb{R}$ (ce qui n'est pas forcément le cas pour F') et à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. On a

$$\forall x \in D, \quad f(x) = F'(x) = \liminf_{n\to+\infty} \frac{F(x+h_n) - F(x)}{h_n} = G(x). \tag{38}$$

Remarquons au passage que pour $x \in D$, $G(x)$ est un *réel* (donc fini). En rappelant la convention d'arithmétique dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ « $(+\infty) \times 0 = 0$ », on déduit de (38) que f peut s'écrire

$$f = \big(\liminf_{n\to+\infty} G_n\big)\mathbf{1}_D = G\mathbf{1}_D. \tag{39}$$

Dans ce produit, le second facteur est une fonction borélienne comme indicatrice d'un borélien. C'est donc une fonction mesurable Bor($\mathbb{R}$)-Bor($\mathbb{R}_+$). Comme cette fonction ne prend que des valeurs réelles, elle reste mesurable Bor($\mathbb{R}$)-Bor($\overline{\mathbb{R}}_+$) (voir corollaire 2.11 du cours). Pour établir la mesurabilité Bor($\mathbb{R}$)-Bor($\overline{\mathbb{R}}_+$) de G, il suffit de vérifier la même mesurabilité pour chaque G_n.

La fonction F est mesurable Bor($\mathbb{R}$)-Bor($\mathbb{R}$) d'après la question 2. Il en va de même pour $F(\,.\,+h_n)$, composée de F avec la translation $x \mapsto x + h_n$ qui est continue donc borélienne. On en déduit que la fonction $G_n = h_n^{-1}\big(F(\,.\,+h_n) - F\big)$ est elle aussi mesurable Bor($\mathbb{R}$)-Bor($\mathbb{R}$). De plus G_n ne prenant que des valeurs positives est aussi mesurable Bor($\mathbb{R}$)-Bor($\mathbb{R}_+$), car pour tout $y \geq 0$, $G_n^{-1}([0,y]) \in$ Bor($\mathbb{R}$) et ceci suffit pour avoir la mesurabilité de G_n pour Bor($\mathbb{R}_+$), cf. corollaire 2.10 iv) du cours. Finalement G_n est aussi mesurable Bor($\mathbb{R}$)-Bor($\overline{\mathbb{R}}_+$) par une nouvelle invocation du corollaire 2.11 et cette mesurabilité passe à $G = \liminf G_n$. Revenant à (39), on conclut que f est mesurable Bor($\mathbb{R}$)-Bor($\overline{\mathbb{R}}_+$) comme produit de deux fonctions ayant cette même mesurabilité. De plus comme f ne prend que des valeurs finies, elle est aussi mesurable Bor($\mathbb{R}$)-Bor($\mathbb{R}_+$).

5) Les fonctions f et G sont toutes deux mesurables Bor($\mathbb{R}$)-Bor($\overline{\mathbb{R}}_+$), donc l'ensemble $A := \{f \neq G\}$ est un borélien de $\mathbb{R}$. D'après la définition de f on a clairement $A \subset D^c$ d'où $\lambda(A) = 0$. Ainsi les fonctions boréliennes positives f et G sont égales λ-presque partout sur $\mathbb{R}$, elles ont donc même intégrale sur $[a,b]$, ce qui s'écrit :

$$\int_{[a,b]} f(x)\,\mathrm{d}\lambda(x) = \int_{[a,b]} \liminf_{n\to+\infty} \frac{F(x+h_n)-F(x)}{h_n}\,\mathrm{d}\lambda(x). \tag{40}$$

6) Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la translation $x \mapsto x+h$. En raison de l'invariance de la mesure de Lebesgue par translation, on a $\lambda\circ\varphi^{-1} = \lambda$. Par transfert φ de l'espace mesuré $\bigl(\mathbb{R}, \mathrm{Bor}(\mathbb{R}), \lambda\bigr)$ vers $\bigl(\mathbb{R}, \mathrm{Bor}(\mathbb{R}), \nu := \lambda\circ\varphi^{-1} = \lambda\bigr)$, on a pour toute $g : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, ν-intégrable sur $\mathbb{R}$,

$$\int_{\mathbb{R}} (g\circ\varphi)\,\mathrm{d}\lambda = \int_{\mathbb{R}} g\,\mathrm{d}\nu = \int_{\mathbb{R}} g\,\mathrm{d}\lambda. \tag{41}$$

En raison de l'équivalence entre les encadrements $a \le x \le b$ et $a+h \le x+h \le b+h$, on a l'égalité $\mathbf{1}_{[a,b]}(x) = \mathbf{1}_{[a+h,b+h]}(x+h)$, d'où

$$\int_{[a,b]} F(x+h)\,\mathrm{d}\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} F(x+h)\mathbf{1}_{[a,b]}(x)\,\mathrm{d}\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} F(x+h)\mathbf{1}_{[a+h,b+h]}(x+h)\,\mathrm{d}\lambda(x).$$

Cette dernière intégrale est de la forme $\int_{\mathbb{R}}(g\circ\varphi)\,\mathrm{d}\lambda$ avec $g = F\mathbf{1}_{[a+h,b+h]}$ et g est bien λ-intégrable sur $\mathbb{R}$ puisque F est λ-intégrable sur tout intervalle d'extrémités finies (ici $a+h$ et $b+h$) par la question 3. La formule de transfert (41) nous donne

$$\int_{\mathbb{R}} F(x+h)\mathbf{1}_{[a+h,b+h]}(x+h)\,\mathrm{d}\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} F(y)\mathbf{1}_{[a+h,b+h]}(y)\,\mathrm{d}\lambda(y) = \int_{[a+h,b+h]} F\,\mathrm{d}\lambda.$$

Nous venons ainsi d'établir pour tout réel h, l'égalité :

$$\int_{[a,b]} F(x+h)\,\mathrm{d}\lambda(x) = \int_{[a+h,b+h]} F(y)\,\mathrm{d}\lambda(y). \tag{42}$$

Comme $h_n > 0$ tend vers zéro, il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \ge n_0$, $a < a+h_n < b$. On a alors successivement (voir justifications ci-dessous) :

$$\begin{aligned}
\int_{[a,b]} \bigl(F(x+h_n)-F(x)\bigr)\,\mathrm{d}\lambda(x) &= \int_{[a,b]} F(x+h_n)\,\mathrm{d}\lambda(x) - \int_{[a,b]} F(x)\,\mathrm{d}\lambda(x) && (43)\\
&= \int_{[a+h_n,b+h_n]} F\,\mathrm{d}\lambda - \int_{[a,b]} F\,\mathrm{d}\lambda && (44)\\
&= \int_{[a+h_n,b[} F\,\mathrm{d}\lambda + \int_{[b,b+h_n]} F\,\mathrm{d}\lambda \\
&\quad - \int_{[a,a+h_n]} F\,\mathrm{d}\lambda - \int_{]a+h_n,b]} F\,\mathrm{d}\lambda && (45)\\
&= \int_{[b,b+h_n]} F\,\mathrm{d}\lambda - \int_{[a,a+h_n]} F\,\mathrm{d}\lambda. && (46)
\end{aligned}$$

Justifications :

(43) : par linéarité de l'intégrale.

(44) : par application de (42) avec $h = h_n$.

(45) : si A et B sont deux boréliens *disjoints* et F est intégrable sur $A \cup B$, elle l'est aussi sur A et sur B et $\int_{A\cup B} F \,\mathrm{d}\lambda = \int_A F \,\mathrm{d}\lambda + \int_B F \,\mathrm{d}\lambda$. C'est une conséquence immédiate de la définition de l'intégrabilité et de la relation $\mathbf{1}_{A\cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B$. On applique ceci avec $A = [a + h_n, b[$ et $B = [b, b + h_n]$ d'une part et avec $A' = [a, a + h_n]$, $B' =]a + h_n, b]$ d'autre part. Signalons à cette occasion qu'il n'y a pas à proprement parler de relation de Chasles pour l'intégrale de Lebesgue. En effet cette relation dans le cadre de l'intégrale de Riemann exploite la convention $\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_d^c f(x)\,\mathrm{d}x$. Si $c < d$, on n'a pas en général pour une intégrale de Lebesgue la relation $\int_{[c,d]} f \,\mathrm{d}\lambda = \int_{[d,c]} f \,\mathrm{d}\lambda$, tout simplement parce que l'intervalle $[d, c]$ est l'ensemble vide (c'est l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que $d \le x \le c$), ce qui annule automatiquement la seconde intégrale.

(46) : comme la mesure de Lebesgue ne charge par les singletons, on a $\int_{[a+h_n,b[} F \,\mathrm{d}\lambda = \int_{]a+h_n,b]} F \,\mathrm{d}\lambda$, ce qui légitime la simplification effectuée pour obtenir (46).

Finalement, en utilisant (46) et la linéarité de l'intégrale, on a pour tout $n \ge n_0$:

$$\int_{[a,b]} \frac{F(x + h_n) - F(x)}{h_n} \,\mathrm{d}\lambda(x) = \frac{1}{h_n} \int_{[b,b+h_n]} F \,\mathrm{d}\lambda - \frac{1}{h_n} \int_{[a,a+h_n]} F \,\mathrm{d}\lambda.$$

En appliquant le résultat de la question 1 avec $g = F$ et en notant que les limites à droite $F(b + 0)$ et $F(a + 0)$ sont *finies*, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{[a,b]} \frac{F(x + h_n) - F(x)}{h_n} \,\mathrm{d}\lambda(x) = F(b + 0) - F(a + 0). \tag{47}$$

7) Nous pouvons maintenant conclure la preuve de (37). Il suffit de combiner (40), le lemme de Fatou appliqué à la suite de fonctions mesurables positives (G_n), (47) et la continuité à droite de F aux points a et b :

$$\begin{aligned}
\int_{[a,b]} f(x)\,\mathrm{d}\lambda(x) &= \int_{[a,b]} \liminf_{n\to+\infty} \frac{F(x + h_n) - F(x)}{h_n} \,\mathrm{d}\lambda(x)\\
&\le \liminf_{n\to+\infty} \int_{[a,b]} \frac{F(x + h_n) - F(x)}{h_n} \,\mathrm{d}\lambda(x)\\
&= \lim_{n\to+\infty} \int_{[a,b]} \frac{F(x + h_n) - F(x)}{h_n} \,\mathrm{d}\lambda(x)\\
&= F(b + 0) - F(a + 0) = F(b) - F(a).
\end{aligned}$$

8) L'inégalité dans (37) peut être stricte, comme le montre l'exemple $F := \mathbf{1}_{[0,+\infty[}$. Cette fonction est croissante sur $\mathbb{R}$, continue à droite en tout point, dérivable partout sauf en $x = 1$ et de dérivée nulle. La fonction f associée est donc la fonction nulle sur $\mathbb{R}$, d'où $\int_{[0,1]} f \,\mathrm{d}\lambda = 0 < F(1) - F(0) = 1 - 0 = 1$.

Signalons qu'il existe aussi des exemples (beaucoup moins élémentaires) de fonctions F *continues* sur tout $\mathbb{R}$ pour laquelle l'inégalité (37) est stricte : voir le problème sur l'escalier de Cantor dans les Annales d'IFP 2001–2002.

Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IFP **Année 2002-03**

Corrigé du devoir nº 3

Problème 1

1 - En vue d'appliquer le théorème de dérivation sous le signe somme, nous allons établir certaines majorations de fonctions. Nous utiliserons aussi le résultat élémentaire suivant :

> *Toute fonction réelle continue sur* $[1, +\infty[$*, respectivement sur* $]0, 1]$*, qui a une limite réelle quand* x *tend vers* $+\infty$*, respectivement quand* x *tend vers 0 par valeurs* > 0*, est bornée.*

Dans les inégalités qui suivent, a et A sont des réels quelconques fixés tels que $0 < a < A$. On suppose que $a < x < A$ et on rappelle que

$$\forall t > 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (t)^n = \mathrm{e}^{n \log t}.$$

Cas 1 : $t \geq 1$

$$|\mathrm{e}^{-t}(\log t)^n t^{x-1}| \leq \mathrm{e}^{-t}(\log t)^n t^{A-1} \leq M(n, A)\cdot \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}},$$

où $M(n, A) = \sup\limits_{t \geq 1} \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}(\log t)^n t^{A-1}$ vérifie $0 < M(n, A) < +\infty$, d'après le résultat élémentaire rappelé ci-dessus, puisque $\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}(\log t)^n t^{A-1} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$.

Cas 2 : $0 < t \leq 1$

$$|\mathrm{e}^{-t}(\log t)^n t^{x-1}| \leq |\log t|^n t^{a-1} \leq m(n, a)\frac{1}{t^{1-\frac{a}{2}}},$$

où $m(n, a) = \sup\limits_{0<t\leq 1} |\log t|^n t^{\frac{a}{2}}$ vérifie $0 < m(n, a) < +\infty$ puisque $|\log t|^n t^{\frac{a}{2}} \xrightarrow[t \to 0, t>0]{} 0$.

On en déduit que

$$(1) \qquad \forall t > 0,\ |\mathrm{e}^{-t}(\log t)^n t^{x-1}| \leq m(n, a)\frac{1}{t^{1-\frac{a}{2}}}\mathbf{1}_{]0,1[}(t) + M(n, A)\cdot \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\mathbf{1}_{[1,+\infty[}(t),$$

cette fonction majorante, indépendante du paramètre x variant dans $]a, A[$, étant λ-intégrable sur $]0, +\infty[$, ce qui se démontre facilement en passant à l'intégrale de Riemann généralisée. De plus, pour tout réel $t > 0$, la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-t}(\log t)^n t^{x-1}$ est dérivable sur $]a, A[$ et sa dérivée est la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-t}(\log t)^{n+1} t^{x-1}$. On en déduit, pour $n = 0$, que Γ est bien définie sur $]a, A[$, puis, en appliquant le théorème de dérivation sous le signe somme, en utilisant notamment (1) pour $n = 1$, que Γ est dérivable sur cet intervalle et que sa dérivée vérifie

$$\forall x \in]a, A[, \quad \Gamma'(x) = \int_{]0,+\infty[} \mathrm{e}^{-t} (\log t) t^{x-1} \, \lambda(\mathrm{d}t).$$

On peut ensuite itérer le procédé et, à l'aide d'une démonstration par récurrence, démontrer que Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]a, A[$ et que

$$\forall x \in]a, A[, \quad \Gamma^{(n)}(x) = \int_{]0,+\infty[} \mathrm{e}^{-t} (\log t)^n t^{x-1} \, \lambda(\mathrm{d}t). \tag{2}$$

Ceci étant vrai quels que soient les réels a et A tels que $0 < a < A$, on en déduit que Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ et que pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel $x > 0$, $\Gamma^{(n)}(x)$ est donné par (2).

2 - Pour tous réels $a, s > 0$, en faisant le changement de variables $u = at$ dans l'intégrale de Lebesgue suivante d'une fonction continue positive, on obtient

$$\int_{]0,+\infty[} t^{s-1} \mathrm{e}^{-at} \, \lambda(\mathrm{d}t) = \int_{]0,+\infty[} \frac{u^{s-1}}{a^{s-1}} \mathrm{e}^{-u} \frac{1}{a} \, \lambda(\mathrm{d}u) = \frac{\Gamma(s)}{a^s}.$$

Sur $]0, +\infty[$, la fonction $t \mapsto \dfrac{t^{s-1}}{e^t - 1}$ est continue positive. Dans le calcul qui suit, on intervertira une intégrale et une série de fonctions mesurables positives, ce qui est licite :

$$\begin{aligned}
\int_{]0,+\infty[} \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} \lambda(\mathrm{d}t) &= \int_{]0,+\infty[} \frac{\mathrm{e}^{-t} t^{s-1}}{1 - \mathrm{e}^{-t}} \lambda(\mathrm{d}t) \\
&= \int_{]0,+\infty[} \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{s-1} \mathrm{e}^{-nt} \Big) \, \lambda(\mathrm{d}t) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{]0,+\infty[} \mathrm{e}^{-t} t^{s-1} \mathrm{e}^{-nt} \, \lambda(\mathrm{d}t) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{]0,+\infty[} \mathrm{e}^{-nt} t^{s-1} \, \lambda(\mathrm{d}t) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Gamma(s)}{n^s} \leq +\infty.
\end{aligned}$$

Si $s > 1$, la série obtenue est convergente. En effet, $\displaystyle\int_{]0,+\infty[} \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} \lambda(\mathrm{d}t) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} \, \mathrm{d}t$, intégrale de Riemann généralisée d'une fonction continue positive sur $]0, +\infty[$, qui est convergente parce que

$$\frac{t^{s-1}}{e^t - 1} \sim_{0+} \frac{1}{t^{2-s}} \quad \text{et} \quad \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} \sim_{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{s-1}.$$

Finalement, $\displaystyle\int_{]0,+\infty[} \frac{t^{s-1}}{e^t-1}\,\lambda(\mathrm{d}t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Gamma(s)}{n^s} < +\infty.$

3 - Soit n un entier ≥ 0. $\displaystyle\int_{]0,+\infty[} t^{2n}\mathrm{e}^{-t^2}\,\lambda(\mathrm{d}t)$ a un sens comme intégrale de Lebesgue d'une fonction mesurable positive sur $]0,+\infty[$. Faisons le changement de variables $t^2 = u$ ou $t = \sqrt{u}$, directement dans cette intégrale de Lebesgue (la valeur absolue du jacobien $\dfrac{1}{2\sqrt{u}}$ ne se voit pas car celui-ci est positif) :

$$\int_{]0,+\infty[} t^{2n}\mathrm{e}^{-t^2}\,\lambda(\mathrm{d}t) = \int_{]0,+\infty[} u^n\mathrm{e}^{-u}\frac{1}{2\sqrt{u}}\,\lambda(\mathrm{d}u) = \frac{1}{2}\int_{]0,+\infty[} u^{n-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-u}\,\lambda(\mathrm{d}u) = \frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{2}\cdot$$

4 - a désigne maintenant un réel quelconque. La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}\cos at$ est λ-intégrable sur $[0,+\infty[$ puisque c'est une fonction continue, donc mesurable, telle que

$$\forall t \geq 0, \quad |\mathrm{e}^{-t^2}\cos at| \leq \mathrm{e}^{-t^2},$$

qui est λ-intégrable d'après la question précédente appliquée à $n = 0$. De plus,

$$f(a) = \int_{]0,+\infty[} \mathrm{e}^{-t^2}\cos at\,\lambda(\mathrm{d}t) = \int_{]0,+\infty[} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n(at)^{2n}\mathrm{e}^{-t^2}}{(2n)\,!}\,\lambda(\mathrm{d}t).$$

On peut appliquer le théorème d'interversion d'une intégrale et d'une série de fonctions parce que

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left|\frac{(-1)^n(at)^{2n}\mathrm{e}^{-t^2}}{(2n)\,!}\right| \leq \mathrm{e}^{-t^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{|a|^nt^n}{n\,!} = \mathrm{e}^{|a|t-t^2},$$

qui est λ-intégrable sur $[0,+\infty[$. On en déduit que

$$f(a) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^na^{2n}}{(2n)\,!}\int_{]0,+\infty[} t^{2n}\mathrm{e}^{-t^2}\,\lambda(\mathrm{d}t),$$

puis, d'après la question précédente, que

$$f(a) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^na^{2n}}{(2n)\,!}\cdot\frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{2}\cdot \tag{3}$$

Or on sait que la fonction Γ vérifie les égalités

$$\forall x > 0, \quad \Gamma(x+1) = x\cdot\Gamma(x) \quad \text{et} \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \tag{4}$$

ce qui se démontre en intégrant par parties, via l'intégrale de Riemann généralisée

$$\forall x > 0,\ \ \Gamma(x+1) = \int_{]0,+\infty[} \mathrm{e}^{-t}t^x\,\lambda(\mathrm{d}t) = \left[-\mathrm{e}^{-t}t^x\right]_0^{+\infty} + x\int_{]0,+\infty[} \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\,\lambda(\mathrm{d}t) = x\cdot\Gamma(x),$$

puis, pour calculer $\Gamma(\frac{1}{2})$, en faisant le changement de variables $\sqrt{t} = u$ dans l'intégrale de Lebesgue,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_{]0,+\infty[} \frac{1}{\sqrt{t}} \mathrm{e}^{-t}\, \lambda(\mathrm{d}t) = 2\int_{]0,+\infty[} \mathrm{e}^{-u^2}\, \lambda(\mathrm{d}u) = \sqrt{\pi}.$$

En appliquant les relations (4) à $\Gamma(n+\frac{1}{2})$, on trouve

$$\begin{aligned}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) &= \left(n-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right) = \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\times\cdots\times\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}\times\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\\ &= \frac{(2n)\,!}{2^{2n}\cdot n\,!}\sqrt{\pi}.\end{aligned}$$

Finalement, d'après (3),

$$f(a) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n\,!}\left(\frac{a^2}{4}\right)^n = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot \mathrm{e}^{-\frac{a^2}{4}}.$$

Problème 2

1 - $\alpha_n = \int_{]a,b[} \cos^2(nx)\,\lambda(\mathrm{d}x) = \int_{[a,b]} \cos^2(nx)\,\lambda(\mathrm{d}x)$ se calcule comme l'intégrale de Riemann d'une fonction continue sur un intervalle fermé borné, ce qui donne, en passant à l'angle double,

$$\alpha_n = \frac{b-a}{2} + \frac{1}{2}\int_a^b \cos(2nx)\,\mathrm{d}x = \frac{b-a}{2} + \frac{\sin(2nb)-\sin(2na)}{4n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}\lambda(]a,b[).$$

2 - Si U est un ouvert borné, U est la réunion d'une famille dénombrable infinie d'intervalles ouverts deux à deux disjoints, nécessairement bornés, vides ou non, notés $I_p,\ p \geq 1$, d'après le théorème de Cantor. Comme la mesure ν_n sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ de densité $\cos^2(n\bullet)$ est σ-additive,

$$\nu_n(U) = \int_U \cos^2(nx)\,\lambda(\mathrm{d}x) = \sum_{p=1}^{+\infty}\nu_n(I_p) = \sum_{p=1}^{+\infty}\int_{I_p}\cos^2(nx)\,\lambda(\mathrm{d}x).$$

De plus, pour tous entiers $p, n \geq 1$, notamment d'après la question précédente,

$$\int_{I_p}\cos^2(nx)\,\lambda(\mathrm{d}x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}\lambda(I_p),\ \int_{I_p}\cos^2(nx)\,\lambda(\mathrm{d}x) \leq \lambda(I_p) \text{ et } \sum_{p=1}^{+\infty}\lambda(I_p) = \lambda(U) < +\infty.$$

Nous avons donc une suite (indicée par n) de fonctions définies sur $\mathbb{N}^*$ (dont le point courant est noté p) qui converge partout sur $\mathbb{N}^*$ vers la fonction $\varphi\ :\ p \mapsto \frac{1}{2}\lambda(I_p)$. De plus, cette suite de fonctions est dominée par 2φ (première inégalité) qui est intégrable par rapport à la mesure de comptage sur $\mathbb{N}^*$ (deuxième inégalité). On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée et conclure que

$$\int_U \cos^2(nx)\,\lambda(\mathrm{d}x) = \sum_{p=1}^{+\infty} \int_{I_p} \cos^2(nx)\,\lambda(\mathrm{d}x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{+\infty} \lambda(I_p) = \frac{\lambda(U)}{2}\cdot$$

3 - Si F est un fermé borné de $\mathbb{R}$, soit U un ouvert borné de $\mathbb{R}$ contenant F. Alors $U \setminus F$ est un ouvert borné de $\mathbb{R}$, d'où il résulte, les intégrales ci-dessous étant finies, que

$$\int_F \cos^2(nx)\,\lambda(\mathrm{d}x) = \int_U \cos^2(nx)\,\lambda(\mathrm{d}x) - \int_{U\setminus F} \cos^2(nx)\,\lambda(\mathrm{d}x),$$

puis, quand $n \longrightarrow +\infty$ et d'après la question précédente, que

$$\int_F \cos^2(nx)\,\lambda(\mathrm{d}x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}\big(\lambda(U) - \lambda(U\setminus F)\big) = \frac{\lambda(F)}{2},$$

parce que $\lambda(U) = \lambda(F) + \lambda(U\setminus F)$ et que ces nombres sont finis.

On se donne maintenant un borélien borné B de $\mathbb{R}$. D'après l'énoncé, il existe une suite croissante $(F_n,\, n \geq 1)$ de fermés de $\mathbb{R}$ et une suite décroissante $(U_n,\, n \geq 1)$ d'ouverts <u>bornés</u> de $\mathbb{R}$ tels que

$$F_n \subseteq B \subseteq U_n \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \lambda(F_n) = \lim_{n\to+\infty} \lambda(U_n) = \lambda(B).$$

On en déduit, pour tous entiers $n, p \geq 1$, que

$$\int_{F_n} \cos^2(px)\,\lambda(\mathrm{d}x) \leq \int_B \cos^2(px)\,\lambda(\mathrm{d}x) \leq \int_{U_n} \cos^2(px)\,\lambda(\mathrm{d}x)$$

puis, quand $p \longrightarrow +\infty$, que

$$\frac{\lambda(F_n)}{2} \leq \liminf_{p\to+\infty} \int_B \cos^2(px)\,\lambda(\mathrm{d}x) \leq \limsup_{p\to+\infty} \int_B \cos^2(px)\,\lambda(\mathrm{d}x) \leq \frac{\lambda(U_n)}{2},$$

ce qui montre, quand $n \longrightarrow +\infty$, que

$$\liminf_{p\to+\infty} \int_B \cos^2(px)\,\lambda(\mathrm{d}x) = \limsup_{p\to+\infty} \int_B \cos^2(px)\,\lambda(\mathrm{d}x) = \frac{\lambda(B)}{2}\cdot$$

En résumé, pour tout borélien borné B de $\mathbb{R}$, on a donc

$$\int_B \cos^2(nx)\,\lambda(\mathrm{d}x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\lambda(B)}{2}\cdot \tag{5}$$

3.bis - La propriété (5) péniblement obtenue ci-dessus s'obtient facilement en utilisant la théorie des séries de Fourier. B étant un borélien borné, choisissons un entier k assez grand pour que $B \subseteq [-k\pi, k\pi]$ et introduisons la fonction φ définie sur $[-\pi, \pi]$ par

$$\forall u \in [-\pi, \pi], \quad \varphi(u) = \mathbf{1}_B(ku).$$

φ étant de carré intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue sur $[-\pi, \pi]$ comme fonction bornée et parce que $\lambda([-\pi, \pi]) = 2\pi < +\infty$, introduisons également ses coefficients de Fourier $c_n(\varphi)$, $n \in \mathbb{Z}$, définis par

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{]-\pi,\pi[} \varphi(u) \mathrm{e}^{-inu} \, \lambda(\mathrm{d}u).$$

Ils vérifient la relation de Parseval, soit

$$\frac{1}{2\pi} \int_{]-\pi,\pi[} |\varphi(u)|^2 \, \lambda(\mathrm{d}u) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(\varphi)|^2,$$

dont on déduit que

$$c_n(\varphi) \xrightarrow[|n| \to +\infty]{} 0, \quad \text{puis} \quad \int_{]-\pi,\pi[} \varphi(u) \cos nu \, \lambda(\mathrm{d}u) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0,$$

en prenant la partie réelle de $c_n(\varphi)$. Or

$$\int_{]-\pi,\pi[} \varphi(u) \cos nu \, \lambda(\mathrm{d}u) = \frac{1}{k} \int_{]-k\pi,k\pi[} \mathbf{1}_B(v) \cos \frac{nv}{k} \, \lambda(\mathrm{d}v) = \frac{1}{k} \int_B \cos \frac{nv}{k} \, \lambda(\mathrm{d}v),$$

parce que $B \subseteq [-k\pi, k\pi]$. On en déduit, en faisant tendre n vers $+\infty$ suivant les multiples de k, que

$$\int_B \cos nx \, \lambda(\mathrm{d}x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0,$$

ce qui implique, comme on l'a vu précédemment, que

$$\int_B \cos^2 nx \, \lambda(\mathrm{d}x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{\lambda(B)}{2} \cdot$$

4 - Comme $B = \bigcup_{j=0}^{+\infty} B_j$ et que ces boréliens sont deux à deux disjoints, comme de plus la mesure ν_n est σ-additive, $\nu_n(B) = \sum_{j=0}^{+\infty} \nu_n(B_j)$ ou, en exprimant la mesure ν_n à l'aide de sa densité,

$$\int_B \cos^2 nx \, \lambda(\mathrm{d}x) = \sum_{j=0}^{+\infty} \int_{B_j} \cos^2 nx \, \lambda(\mathrm{d}x).$$

La série du deuxième membre est l'intégrale par rapport à la mesure de comptage de $\mathbb{N}$ de la fonction $j \mapsto \int_{B_j} \cos^2 nx \, \lambda(\mathrm{d}x)$. Quand n tend vers $+\infty$, cette suite de fonctions converge vers la fonction $j \mapsto \frac{\lambda(B_j)}{2}$, d'après la question précédente, parce que les boréliens B_j sont bornés et cette convergence est dominée par la fonction $j \mapsto \lambda(B_j)$ qui est

intégrable sur $\mathbb{N}$ par rapport à sa mesure de comptage puisque $\lambda(B)=\sum_{j=0}^{+\infty}\lambda(B_j)<+\infty$.
On peut donc appliquer la théorème de convergence dominée et conclure que

$$\int_B \cos^2 nx\,\lambda(\mathrm{d}x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sum_{j=0}^{+\infty}\frac{\lambda(B_j)}{2} = \frac{\lambda(B)}{2}\cdot$$

4.bis - $\mathbf{1}_B$ étant λ-intégrable sur $\mathbb{R}$ puisque $\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_B\,d\lambda = \lambda(B) < +\infty$, on en déduit en appliquant le théorème de Riemann-Lebesgue que

$$\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_B(x)\cdot \mathrm{e}^{-iux}\,\lambda(\mathrm{d}x) \xrightarrow[|u|\to+\infty]{} 0.$$

En prenant la partie réelle de cette intégrale et en faisant tendre u vers $+\infty$ suivant les entiers, on obtient directement

$$\int_B \cos nx\,\lambda(\mathrm{d}x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

résultat qui contient tous les précédents !

5 - Supposons que $(a_n,\ n\geq 1)$ ne converge pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Il existerait donc $\varepsilon>0$ et une suite strictement croissante $\big(n_k,\ k\geq 1\big)$ d'entiers ≥ 1 tels que

$$\forall k\geq 1,\quad |a_{n_k}|\geq \varepsilon.$$

On en déduirait que $\big(\cos(n_k\bullet),\ k\geq 1\big)$ converge λ-presque partout sur B vers 0, donc que $\int_B \cos^2(n_kx)\,\lambda(\mathrm{d}x) \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$ d'après le théorème de convergence dominée, ce qui prouverait que $\lambda(B)=0$ d'après la question précédente, ce qui est absurde.

Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IFP **Année 2002-03**

Corrigé du Devoir n° 4

Ex 1. *Application du théorème de Fubini à l'interversion série-intégrale*

1) Montrons que pour toute fonction borélienne $g : I \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, on a

$$\int_I Fg\,\mathrm{d}\lambda = \sum_{k=0}^{+\infty} |c_k| \int_I |x|^k g(x)\,\mathrm{d}\lambda(x).$$

On considère la fonction :

$$\begin{array}{rccl} \varphi\ :\ & (\mathbb{N}\times I) & \longrightarrow & \overline{\mathbb{R}} \\ & (k,x) & \longmapsto & c_k x^k g(x) \end{array}$$

$\mathbb{N}$ est muni de la tribu $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ et I de la tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Vérifions que la fonction φ est $\mathcal{P}(\mathbb{N})\otimes\mathcal{B}(\mathbb{R}) - \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ mesurable. Soit $a\in\mathbb{R}$, on a

$$\varphi^{-1}([a,+\infty]) = \{(k,x)\in\mathbb{N}\times I,\ c_k x^k g(x)\in[a,+\infty]\}.$$

Pour $k\in\mathbb{N}$, notons

$$I_k = \{x\in I,\ c_k x^k g(x)\in[a,+\infty]\},$$

$I_k\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$, car g est mesurable et $x\mapsto x^k$ est continue. On a

$$\varphi^{-1}([a,+\infty]) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{k\}\times I_k \in \mathcal{P}(\mathbb{N})\otimes\mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

la fonction φ est donc $\mathcal{P}(\mathbb{N})\otimes\mathcal{B}(\mathbb{R})-\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ mesurable, il en est de même pour la fonction $|\varphi|$ qui est de plus positive. En considérant la somme infinie comme une intégrale par rapport à la mesure de comptage ν et en appliquant le théorème de Tonelli-Fubini, on obtient :

$$\begin{aligned} \textstyle\int_I Fg\,\mathrm{d}\lambda &= \int_I \Big(\sum_{k=0}^{+\infty} |c_k||x|^k\Big) g(x)\,\mathrm{d}\lambda(x) \\ &= \int_I\int_{\mathbb{N}} |\varphi(k,x)|\ \mathrm{d}\nu(k)\,\mathrm{d}\lambda(x) \\ &= \int_{\mathbb{N}}\int_I |\varphi(k,x)|\,\mathrm{d}\lambda(x)\ \mathrm{d}\nu(k) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}\int_I |c_k||x|^k g(x)\,\mathrm{d}\lambda(x) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}|c_k|\int_I |x|^k g(x)\,\mathrm{d}\lambda(x). \end{aligned}$$

2) On en déduit une condition suffisante pour que

$$\int_I fg \, \mathrm{d}\lambda = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k \int_I x^k g(x) \, \mathrm{d}\lambda(x).$$

Comme g et f ne sont plus des fonctions positives, cette égalité a lieu si l'on peut appliquer le théorème de Fubini, la condition suffisante est donc que la fonction φ soit intégrable par rapport à la mesure produit $\nu \otimes \lambda$, c'est-à-dire que $|\varphi|$ soit intégrable, soit encore

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |c_k| \int_I |x|^k g(x) \, \mathrm{d}\lambda(x) < +\infty.$$

3) On montre que

$$\int_0^1 \frac{(x \ln x)^2}{1+x^2} \, \mathrm{d}x = 2 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k+1)^3}.$$

Comme $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(x \ln x)^2}{1+x^2} = 0$, la fonction définie par $x \mapsto \dfrac{(x \ln x)^2}{1+x^2}$ est prolongeable par continuité sur $[0,1]$. Les intégrales de Riemann et de Lebesgue coïncident donc. On applique alors la question précédente à

$$I = [0,1], \ g(x) = (x \ln x)^2, \ f(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^{2k}.$$

Il faut vérifier que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \int_I x^{2k} g(x) \, \mathrm{d}\lambda(x) < +\infty.$$

Or,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \int_I x^{2k} g(x) \, \mathrm{d}\lambda(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_I x^{2k} (x \ln x)^2 \, \mathrm{d}\lambda(x),$$

et

$$\int_I (x \ln x)^2 x^{2k} \, \mathrm{d}\lambda(x) = \int_I x^{2k+2} (\ln x)^2 \, \mathrm{d}\lambda(x) = \int_0^1 x^{2k+2} (\ln x)^2 \, \mathrm{d}x,$$

cette dernière intégrale se calcule par deux intégrations par parties successives et on obtient

$$\int_0^1 x^{2k+2} (\ln x)^2 \, \mathrm{d}x = -\frac{2}{2k+3} \int_0^1 x^{2k+2} \ln x \, \mathrm{d}x = \frac{2}{(2k+3)^2} \int_0^1 x^{2k+2} \, \mathrm{d}x = \frac{2}{(2k+3)^3}.$$

On a bien $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2}{(2k+3)^3} < +\infty$ et, par conséquent,

$$\int_0^1 \frac{(x \ln x)^2}{1+x^2} \, \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \int_I x^{2k+2} (\ln x)^2 \, \mathrm{d}\lambda(x) = 2 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+3)^3} = 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k+1)^3}.$$

4) On montre que

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{\mathrm{e}^x - 1}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a}{k^2 + a^2}\ .$$

La fonction $x \mapsto \dfrac{\sin ax}{\mathrm{e}^x - 1}$ est continue sur $]0, +\infty[$ et son intégrale de Riemann est absolument convergente, en effet :

- en 0, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin ax}{\mathrm{e}^x - 1} = a$, la fonction est donc prolongeable par continuité
- en $+\infty$, on a : $0 \leq \left|\dfrac{\sin ax}{\mathrm{e}^x - 1}\right| \leq \dfrac{1}{\mathrm{e}^x - 1} \sim \mathrm{e}^{-x}$, dont l'intégrale est convergente.

Par ailleurs, $\forall x \in]0, +\infty[$, on a $\dfrac{1}{\mathrm{e}^x - 1} = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{1 - \mathrm{e}^{-x}} = \mathrm{e}^{-x} \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-kx}$.

On a donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{\mathrm{e}^x - 1}\,\mathrm{d}x = \int_I \frac{\sin ax}{\mathrm{e}^x - 1}\,\mathrm{d}\lambda(x) = \int_I (\sin ax)\,\mathrm{e}^{-x} \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-kx}\,\mathrm{d}\lambda(x).$$

L'intégrale étant absolument convergente, on a

$$\int_I \frac{|\sin ax|}{\mathrm{e}^x - 1}\,\mathrm{d}\lambda(x) = \int_I \int_{\mathbb{N}} |\sin ax|\,\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{-kx}\ \mathrm{d}\nu(k)\,\mathrm{d}\lambda(x) < +\infty,$$

et, comme la fonction $(k, x) \mapsto (\sin ax)\,\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{-kx}$ est $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) - \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ mesurable, on peut appliquer le théorème de Fubini qui nous donne

$$\int_I (\sin ax)\,\mathrm{e}^{-x} \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-kx}\,\mathrm{d}\lambda(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_I (\sin ax)\,\mathrm{e}^{-kx}\,\mathrm{d}\lambda(x).$$

Calculons $\displaystyle\int_I (\sin ax)\,\mathrm{e}^{-kx}\,\mathrm{d}\lambda(x)$ en remarquant qu'elle coïncide avec l'intégrale de Riemann et en effectuant deux intégrations par parties successives :

$$J_k = \int_0^{+\infty} (\sin ax)\,\mathrm{e}^{-kx}\,\mathrm{d}x = \frac{a}{k} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-kx} \cos ax\,\mathrm{d}x = -\frac{a^2}{k^2} J_k + \frac{a}{k^2}$$

d'où

$$J_k = \frac{a}{k^2 + a^2},$$

et

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{\mathrm{e}^x - 1}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a}{k^2 + a^2}\ .$$

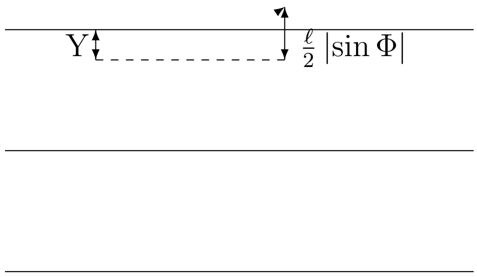
Ex 2. *L'aiguille de Buffon*

« Échec »

« Succès »

On note Y la distance du milieu de l'aiguille à la droite du réseau la plus proche. Y prend ses valeurs dans $[0, \frac{a}{2}]$. On note Φ une mesure de l'angle entre les droites du réseau (toutes orientées dans le même sens) et l'aiguille orientée du chas vers la pointe. Φ prend ses valeurs dans $[0, 2\pi]$.

Y et Φ sont des variables aléatoires. La connaissance du couple $(Y(\omega), \Phi(\omega))$ suffit pour savoir s'il y a ou non intersection.



Nous ferons les hypothèses suivantes sur les variables aléatoires Y et Φ :

(H_1) Y suit la loi uniforme sur $[0, \frac{a}{2}]$.

(H_2) Φ suit la loi uniforme sur $[0, 2\pi]$.

(H_3) Y et Φ sont indépendantes.

1) On note E l'événement « l'aiguille coupe l'une des droites du réseau ». La longueur de la projection de la demi-aiguille sur une droite orthogonale au réseau est $Z = \frac{\ell}{2}|\sin\Phi|$. Il y a donc intersection si et seulement si la distance Y du centre de l'aiguille à la droite du réseau la plus proche est inférieure ou égale à Z. Ceci nous permet d'écrire l'évènement E sous la forme :

$$E = \left\{ Y \leq \frac{\ell}{2}|\sin\Phi| \right\}.$$

2) Comme Y et Φ sont indépendantes, la loi du couple est le produit des lois marginales : $P_{(Y,\Phi)} = P_Y \otimes P_\Phi$. Comme ces lois marginales sont à densités par rapport à λ_1, on en déduit que $P_{(Y,\Phi)}$ est à densité $f_Y \otimes f_\Phi$ par rapport à λ_2. D'où

$$f_{(Y,\Phi)}(y,t) = f_Y(y) f_\Phi(t) = \frac{2}{a}\mathbf{1}_{[0,a/2]}(y)\frac{1}{2\pi}\mathbf{1}_{[0,2\pi]}(t) = \frac{1}{a\pi}\mathbf{1}_{[0,a/2]\times[0,2\pi]}(y,t).$$

On voit ainsi que le couple (Y,Φ) suit la loi uniforme sur le rectangle $[0, a/2] \times [0, 2\pi]$.

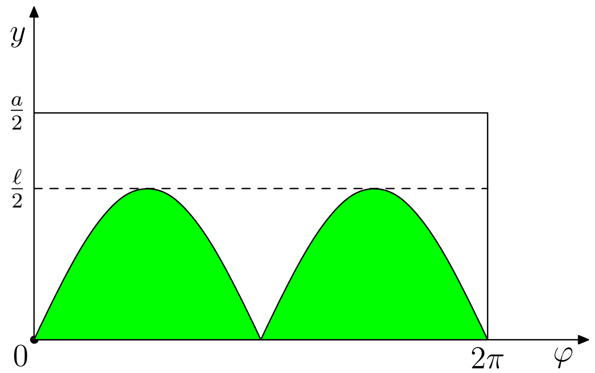
3) Notons D le borélien de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$D := \left\{ (t, y) \in [0, 2\pi] \times [0, a/2];\ y \leq \frac{\ell}{2} |\sin t| \right\}.$$

Comme l'évènement E s'écrit aussi $\{(\Phi, Y) \in D\}$, on peut calculer $\mathbf{P}(E)$ en utilisant la loi du couple (Φ, Y) qui est la loi uniforme sur $[0, 2\pi] \times [0, a/2]$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(E) = \mathbf{P}\big((\Phi, Y) \in D\big) &= P_{(\Phi,Y)}(D) \\
&= \int_D f_{(\Phi,Y)}(y,t)\,\mathrm{d}\lambda_2(y,t) \\
&= \frac{1}{a\pi} \lambda_2\big(D \cap [0, 2\pi] \times [0, a/2]\big) \\
&= \frac{1}{a\pi} \lambda_2(D),
\end{aligned}$$

en remarquant que $D \subset [0, 2\pi] \times [0, a/2]$. Le calcul de $\mathbf{P}(E)$ se réduit ainsi à celui de l'aire de l'hypographe de la fonction $g : t \mapsto \frac{\ell}{2} |\sin t| \mathbf{1}_{[0,2\pi]}(t)$.



Par conséquent

$$\lambda_2(D) = \int_{[0,2\pi]} g\,\mathrm{d}\lambda_2 = \int_0^{2\pi} \frac{\ell}{2} |\sin t|\,\mathrm{d}t = \ell \int_0^{\pi} \sin t\,\mathrm{d}t = 2\ell.$$

La conversion de l'intégrale de Lebesgue (par rapport à λ_1) en intégrale de Riemann est légitime ici car la fonction g est continue et l'ensemble d'intégration est un intervalle fermé borné. Finalement,

$$\mathbf{P}(E) = \frac{2\ell}{a\pi}$$

4) On effectue une suite de lancers de l'aiguille et on note E_i l'évènement « lors du $i$ème lancer, l'aiguille intersecte une des droites du réseau ». On pose $X_i = \mathbf{1}_{E_i}$ et

$$F_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Les X_i sont des variables aléatoires de Bernoulli, de paramètre $p := \mathbf{P}(E_I) = \mathbf{P}(E)$. Elles sont clairement dans $L^1(\Omega)$, puisque bornées. Les E_i forment une suite d'évènements mutuellement indépendants et de même probabilité p. Il en résulte que les X_i forment une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi Bern(p). Par la loi forte des grands nombres pour des variables i.i.d. et intégrables (théorème de Khintchine),

$$F_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} \mathbf{E}X_1 = \mathbf{P}(E).$$

Compte-tenu du calcul de $\mathbf{P}(E)$, on peut réécrire ce résultat sous la forme :

$$\frac{2\ell}{aF_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} \pi.$$

L'interprétation physique est la suivante. Si on réalise *une* série de lancers avec n grand, la valeur $F_n(\omega)$ observée nous fournira l'approximation

$$\frac{2\ell}{aF_n(\omega)} \simeq \pi.$$

On considère ainsi qu'il est physiquement impossible d'observer un ω n'appartenant pas à l'évènement de probabilité 1 $\{F_n$ converge vers $p\}$.

Le document de la page 64 représente les résultats de 1200 lancers réalisés avec une allumette et un réseau tracé sur une feuille de format A4. On a ici $\ell = a = 4,5$ cm et $p = \frac{2}{\pi} \simeq 0,637$. Les lancers sont regroupés par dizaine. Les bits 0 ou 1 sont les valeurs observées pour $X_i(\omega)$. Après chaque dizaine on a noté le nombre d'intersection observées sur la dizaine et le nombre d'intersections cumulé depuis le début des lancers. Le tableau des fréquences observées F_{10k} pour $k = 1, \dots, 120$ est présenté page 65. Cette expérience permet de proposer l'estimation :

$$\pi \simeq \frac{2}{0,627} \simeq 3,1898.$$

Si vous avez la patience et le loisir de réaliser votre propre expérience, vous trouverez probablement une valeur légèrement différente…

Bien entendu, cette méthode pour calculer π n'est pas très performante. On peut montrer que sa vitesse de convergence est en $O(n^{-1/2})$. Son intérêt est essentiellement d'ordre culturel et historique.

Résultats de 1200 lancers

0111110001	6	6	1111111011	9	69	1011111110	8	131
0101111011	7	13	1110100111	7	76	1001110111	7	138
0011100110	5	18	0111100010	5	81	1101101110	7	145
1110011101	7	25	1110111100	7	88	1001011110	6	151
1110000011	5	30	0000100101	3	91	0111110001	6	157
0001111001	5	35	0001111011	6	97	1101001001	5	162
1101000101	5	40	1110011001	6	103	1101001100	5	167
1101111000	6	46	1011111110	8	111	1110100101	6	173
1111011111	9	55	1101010101	6	117	0110001100	4	177
1000100111	5	60	1100100111	6	123	1011010110	6	183

1011101011	7	190	0111110011	7	251	1101100110	6	315
1101100010	5	195	0110110111	7	258	1011011101	7	322
1100000111	5	200	1011110010	6	264	1100101111	7	329
0001111111	7	207	0000111001	4	268	1111010010	6	335
0010001101	4	211	0111100101	6	274	1110001111	7	342
0101001011	5	216	1111111101	9	283	0101001111	6	348
0100111011	6	222	1101010101	6	289	1001100101	5	353
0111111101	8	230	0111111110	8	297	1101111001	7	360
1111111010	8	238	0011101000	4	301	1010111111	8	368
1110001011	6	244	0111111101	8	309	0111101000	5	373

1001110011	6	379	1011011100	6	444	0111111110	8	518
1111011111	9	388	1011111010	7	451	0100010010	3	521
0110011111	7	395	1011110111	8	459	0101101011	6	527
1000011101	5	400	0011001111	6	465	0011111011	7	534
1111100111	8	408	1000001101	4	469	1100100101	5	539
1010010001	4	412	1011011111	8	477	1010110110	6	545
0100001110	4	416	1111111111	10	487	1111101101	8	553
1111011010	7	423	1011111101	8	495	1110111101	8	561
1010111110	7	430	1011111101	8	503	1110110110	7	568
1101011111	8	438	1110011101	7	510	0111001101	6	574

1000010110	4	578	1101001001	5	634	1100110011	6	690
0110110110	6	584	1110111111	9	643	1010111101	7	697
1000101100	4	588	0110110110	6	649	1010111110	7	704
1011011101	7	595	1000001000	2	651	1111111111	10	714
1100110110	6	601	1000011000	3	654	0011011110	6	720
1111011010	7	608	0111001011	6	660	0111111110	8	728
0001000110	3	611	1100010100	4	664	1001111101	7	735
0001110001	4	615	0101110110	6	670	0100111101	6	741
1111100111	8	623	1111111001	8	678	0100110101	5	746
0010111110	6	629	0000111111	6	684	1110101010	6	752

Tableau des fréquences observées

$10k$	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
		0,600	0,650	0,600	0,625	0,600	0,583	0,571	0,575	0,611
100	0,600	0,627	0,633	0,623	0,629	0,607	0,606	0,606	0,617	0,616
200	0,615	0,624	0,627	0,630	0,629	0,628	0,623	0,619	0,618	0,610
300	0,610	0,613	0,609	0,606	0,609	0,603	0,600	0,600	0,605	0,610
400	0,610	0,612	0,614	0,614	0,609	0,609	0,615	0,615	0,619	0,614
500	0,618	0,618	0,619	0,621	0,620	0,622	0,621	0,619	0,621	0,624
600	0,622	0,621	0,626	0,627	0,625	0,628	0,624	0,621	0,622	0,623
700	0,626	0,625	0,626	0,629	0,628	0,625	0,628	0,632	0,635	0,637
800	0,637	0,640	0,635	0,635	0,636	0,634	0,634	0,636	0,637	0,638
900	0,638	0,635	0,635	0,632	0,633	0,633	0,633	0,630	0,628	0,629
1000	0,629	0,628	0,630	0,630	0,626	0,623	0,623	0,621	0,620	0,622
1100	0,622	0,622	0,622	0,623	0,626	0,626	0,628	0,628	0,628	0,627
1200	0,627									

Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IFP **Année 2002-03**

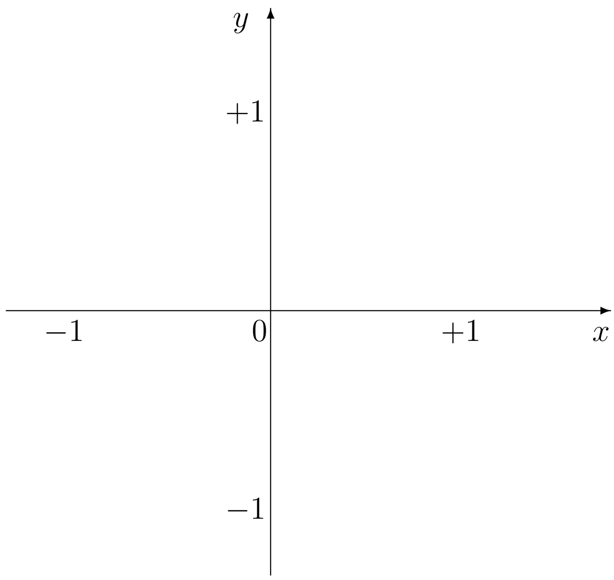
Corrigé de l'Examen du 30 janvier 2003

Ex 1. *Loi uniforme sur la boule unité en grande dimension (4 points).*
Dans tout l'exercice, on note λ_d la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$, $B_d(0,r)$ la boule fermée de centre 0 et de rayon r, pour la distance associée à la norme

$$\|x\|_1 := \sum_{i=1}^{d} |x_i|, \quad x = (x_1, \dots, x_d)$$

et $v(d) := \lambda_d\big(B_d(0,1)\big)$.

1) Dans cette question, $d = 2$. La boule unité est le carré de sommets les points $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$ et $(0,-1)$. Le côté a pour longueur $\sqrt{2}$ et comme la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^2$ est invariante par rotation, son aire est la même que celle d'un carré à côtés parallèles aux axes et de longueur $\sqrt{2}$, d'où $\lambda_2(B_2(0,1)) = (\sqrt{2})^2 = 2$. On pouvait aussi le voir remarquant que les axes du repère découpent $B_2(0,1)$ en 4 triangles rectangles de même aire $1/2$.



Soit (X,Y) un vecteur aléatoire de loi uniforme sur $B_2(0,1)$. Sa loi est donc à densité $(x,y) \mapsto f(x,y) = c\mathbf{1}_{B_2(0,1)}(x,y)$ par rapport à λ_2. La valeur de la constante c se détermine facilement en écrivant que

$$1 = \int_{\mathbb{R}^2} f \,\mathrm{d}\lambda_2 = c\lambda_2\big(B_2(0,1)\big) = cv(2) = 2c,$$

d'où $c = 1/2$. On sait que lorsque (X, Y) a une loi à densité par rapport à λ_2, ses composantes sont à densité par rapport à λ_1 et que les densités respectives f_X et f_Y s'obtiennent par intégration partielle de f. En outre dans le cas qui nous occupe, il est clair par symétrie que X et Y ont *même loi* (car $\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = f(y,x)$ et la fonction $(x,y) \mapsto f(y,x)$ est la densité du couple (Y, X)). Il suffit donc de calculer f_X.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}\lambda_1(y) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{B_2(0,1)}(x,y)\,\mathrm{d}\lambda_1(y). \tag{48}$$

On remarque maintenant que :

$$\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{1}_{B_2(0,1)}(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| > 1, \\ 0 & \text{si } |x| \le 1 \text{ et } |y| > 1 - |x|, \\ 1 & \text{si } |x| \le 1 \text{ et } |y| \le 1 - |x|. \end{cases}$$

Notons I_x l'intervalle $[-(1-|x|), 1-|x|]$, en remarquant que si $|x| > 1$, I_x est l'ensemble vide[18]. L'égalité précédente peut alors se réécrire

$$\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{1}_{B_2(0,1)}(x,y) = \mathbf{1}_{I_x}(y).$$

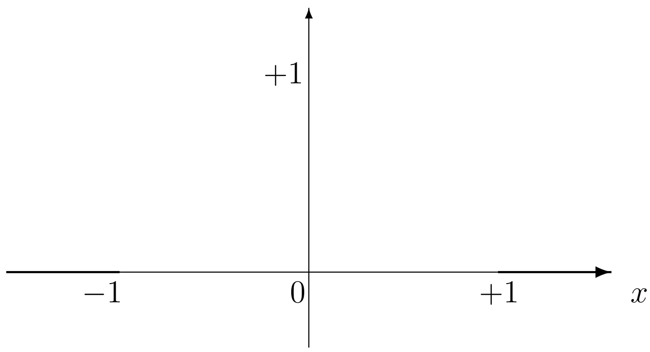
En reportant dans (48), on en déduit :

$$f_X(x) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{I_x}(y)\,\mathrm{d}\lambda_1(y) = \frac{1}{2}\lambda_1(I_x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| > 1, \\ \frac{1}{2}(2 - 2|x|) & \text{si } |x| \le 1. \end{cases}$$

D'où

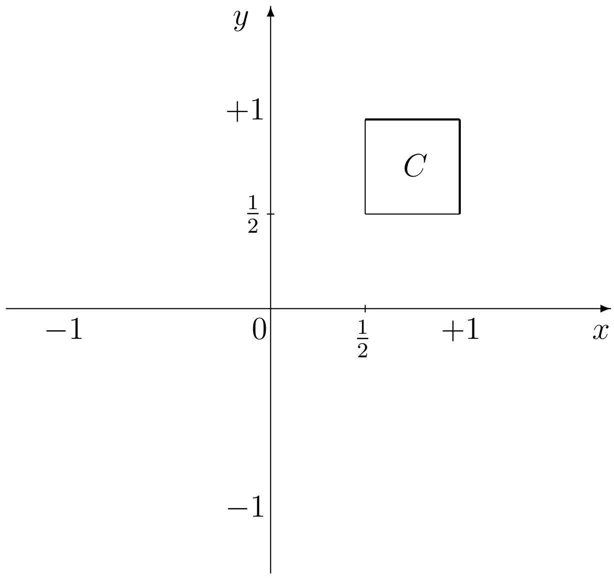
$$f_X(x) = (1 - |x|)\mathbf{1}_{[-1,1]}(x).$$

La variable aléatoire X suit donc la loi triangulaire, dont la densité a la représentation graphique suivante.



Pour voir que X et Y ne sont pas indépendantes, on montre que $P_{(X,Y)} \neq P_X \otimes P_Y$ en comparant la masse attribuée par chacune de ces deux mesures au carré $C =]1/2, 1]^2$.

[18] L'intervalle $[a, b]$ est l'ensemble des $y \in \mathbb{R}$ tels que $a \le y \le b$, cet ensemble est vide quand $a > b$.



Comme $C \cap B_2(0,1) = \emptyset$, on a clairement $P_{(X,Y)}(C) = 0$. D'autre part, X et Y ayant même loi,

$$\begin{aligned} P_X \otimes P_Y(C) = P_X(]1/2,1])P_Y(]1/2,1]) &= \big(P_X(]1/2,1])\big)^2 \\ &= \left\{ \int_{]1/2,1]} (1-x)\,\mathrm{d}\lambda_1(x) \right\}^2 \\ &= \left\{ \int_{1/2}^{1} (1-x)\,\mathrm{d}x \right\}^2 = \frac{1}{64}. \end{aligned}$$

Ainsi $P_{(X,Y)}(C) \neq P_X \otimes P_Y(C)$, donc X et Y ne sont pas indépendantes.

2) Les questions 2) à 5) sont exactement les mêmes que lors du D.S. de novembre. Seule la norme a changé. Mais il est clair (voir le corrigé du D.S.) que les résultats obtenus sont valables avec *n'importe quelle norme*.

Ex 2. *Caractérisation de certaines mesures par leurs moments.*

Soient $-\infty < a < b < +\infty$ fixés et μ, ν deux mesures *finies* sur $\big([a,b], \mathrm{Bor}([a,b])\big)$ telles que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \int_{[a,b]} x^k \,\mathrm{d}\mu(x) = \int_{[a,b]} x^k \,\mathrm{d}\nu(x). \tag{49}$$

1) Remarquons d'abord que dans (49) les intégrales sont bien définies. En effet la fonction continue (donc borélienne) $x \mapsto x^k$ est bornée sur $[a,b]$, donc intégrable relativement à n'importe quelle mesure finie sur $[a,b]$. Par linéarité de l'intégrale, on déduit immédiatement de (49) que si $g(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n$,

$$\int_{[a,b]} g \,\mathrm{d}\mu = \sum_{k=0}^{n} c_k \int_{[a,b]} x^k \,\mathrm{d}\mu(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k \int_{[a,b]} x^k \,\mathrm{d}\nu(x) = \int_{[a,b]} g \,\mathrm{d}\nu. \tag{50}$$

2) Soit $(g_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions $[a,b]\to\mathbb{R}$, μ-intégrables sur $[a,b]$ qui converge *uniformément* [19] sur $[a,b]$ vers f :

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists n_0=n_0(\varepsilon),\ \forall n\geq n_0,\ \forall x\in[a,b],\quad |g_n(x)-f(x)|<\varepsilon. \tag{51}$$

En particulier pour $\varepsilon=1$ et $n_0=n_0(1)$, on a pour tout $x\in[a,b]$,

$$|f(x)|-|g_{n_0}(x)|\leq|g_{n_0}(x)-f(x)|<1,\quad \text{d'où}\quad |f(x)|\leq|g_{n_0}(x)|+1.$$

De plus f étant mesurable comme limite sur $[a,b]$ d'une suite de fonctions mesurables, on peut intégrer cette dernière inégalité sur $[a,b]$ pour en déduire

$$\int_{[a,b]}|f|\,\mathrm{d}\mu\leq\int_{[a,b]}(|g_{n_0}|+1)\,\mathrm{d}\mu=\int_{[a,b]}|g_{n_0}|\,\mathrm{d}\mu+\mu([a,b])<+\infty,$$

car g_{n_0} est μ-intégrable et la mesure μ est finie. Ainsi f est μ-intégrable sur $[a,b]$. Cette intégrabilité étant acquise, on dispose pour tout n de la majoration

$$\left|\int_{[a,b]}g_n\,\mathrm{d}\mu-\int_{[a,b]}f\,\mathrm{d}\mu\right|=\left|\int_{[a,b]}(g_n-f)\,\mathrm{d}\mu\right|\leq\int_{[a,b]}|g_n-f|\,\mathrm{d}\mu,$$

laquelle combinée avec (51) nous donne[20]

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists n_0=n_0(\varepsilon),\ \forall n\geq n_0,\quad \left|\int_{[a,b]}g_n\,\mathrm{d}\mu-\int_{[a,b]}f\,\mathrm{d}\mu\right|\leq\int_{[a,b]}\varepsilon\,\mathrm{d}\mu=\varepsilon\mu([a,b]).$$

La constante $\mu([a,b])$ étant finie ceci établit la convergence :

$$\int_{[a,b]}g_n\,\mathrm{d}\mu\xrightarrow[n\to+\infty]{}\int_{[a,b]}f\,\mathrm{d}\mu.$$

3) Pour en déduire

$$\forall f \text{ continue } [a,b]\to\mathbb{R},\quad \int_{[a,b]}f\,\mathrm{d}\mu=\int_{[a,b]}f\,\mathrm{d}\nu, \tag{52}$$

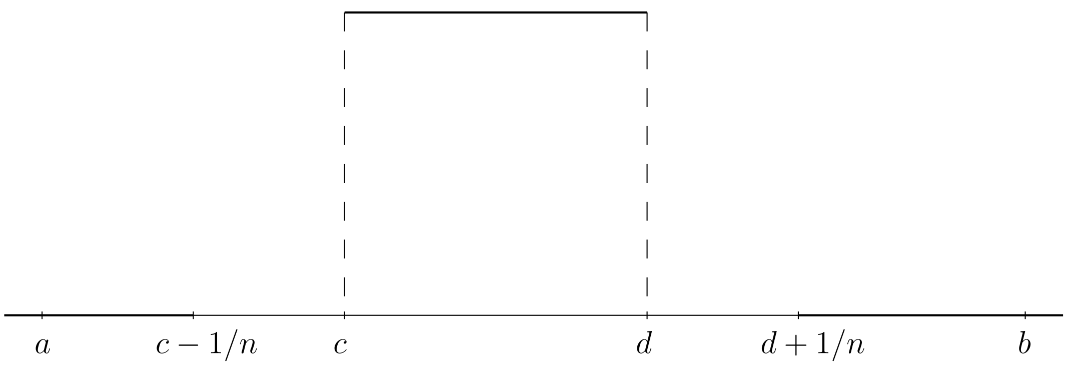
fixons une fonction continue quelconque f. Par le théorème de Weierstrass, f est limite *uniforme* sur $[a,b]$ d'une suite de fonctions polynômes g_n. Par (50) appliqué avec $g=g_n$, on a pour tout n, l'égalité $\int_{[a,b]}g_n\,\mathrm{d}\mu=\int_{[a,b]}g_n\,\mathrm{d}\nu$. La question 2) nous permet alors de faire tendre n vers l'infini dans cette égalité pour obtenir $\int_{[a,b]}f\,\mathrm{d}\mu=\int_{[a,b]}f\,\mathrm{d}\nu$.

[19] L'énoncé ne précise pas si les g_n sont à valeurs dans $\mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{C}$. La démonstration qui suit est correcte pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Nous excluons les fonctions à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ pour pouvoir écrire la convergence uniforme à l'aide de g_n-f sans risquer de tomber sur l'écriture prohibée « $\infty-\infty$ ». La convergence uniforme de g_n vers f lorsque ces fonctions sont à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ devrait s'écrire à l'aide d'une distance métrisant la topologie de $\overline{\mathbb{R}}$ au lieu de la distance usuelle de $\mathbb{R}$, $d(x,y)=|x-y|$. Il n'y a de toutes façons pas d'inconvénient à écarter $\overline{\mathbb{R}}$ comme ensemble d'arrivée puisque le résultat de cette question sera appliqué à la question suivante avec f continue sur $[a,b]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ et g_n fonction polynôme.

[20] Notons que dans (51), n_0 ne dépend pas de x, ce qui permet de réécrire (51) sous la forme fonctionnelle : $\forall\varepsilon>0$, $\exists n_0=n_0(\varepsilon)$, $\forall n\geq n_0$, $|g_n-f|<\varepsilon$.

4) Pour en déduire que $\mu = \nu$, on rappelle d'abord que la tribu borélienne de $[a, b]$ est engendrée par le π-système $\mathcal{C}$ des intervalles $[c, d]$, $a \leq c < d \leq b$. Par le théorème d'unicité des mesures, il suffit donc de vérifier que $\forall [c, d] \in \mathcal{C}$, $\mu([c, d]) = \nu([c, d])$. Pour cela, fixons un intervalle $[c, d] \in \mathcal{C}$ quelconque et admettons un instant que l'on dispose d'une suite $(f_n)_{n \geq n_0}$ de fonctions continues $[a, b] \to [0, 1]$, qui converge ponctuellement vers $\mathbf{1}_{[c,d]}$. Par (52) appliqué à la fonction continue f_n, on a pour tout $n \geq n_0$, $\int_{[a,b]} f_n \, d\mu = \int_{[a,b]} f_n \, d\nu$. Comme $0 \leq f_n \leq 1$ et μ, ν sont des mesures finies, le théorème de convergence dominée nous permet de faire tendre n vers l'infini dans cette égalité pour obtenir $\int_{[a,b]} \mathbf{1}_{[c,d]} \, d\mu = \int_{[a,b]} \mathbf{1}_{[c,d]} \, d\nu$, autrement dit, $\mu([c, d]) = \nu([c, d])$. Pour compléter la preuve, il ne nous reste donc plus qu'à construire la suite f_n ayant les propriétés requises.

Nous détaillerons cette construction dans le cas $a < c < d < b$, les autres configurations ($c = a$ ou $d = b$) s'en déduisant par une adaptation facile. On prend d'abord n_0 assez grand pour que $a \leq c - 1/n_0$ et $d + 1/n_0 \leq b$. Pour $n \geq n_0$, on définit f_n comme la fonction continue $[a, b] \to [0, 1]$, nulle hors de $]c - 1/n, d + 1/n[$, valant 1 sur $[c, d]$ et affine sur chacun des intervalles $[c - 1/n, c]$ et $[d, d + 1/n]$.



Par construction on a bien f_n continue et $0 \leq f_n \leq 1$. Vérifions la convergence ponctuelle de f_n vers $\mathbf{1}_{[c,d]}$. Si $x \in [a, b] \setminus [c, d]$, à partir d'un rang $n_1 = n_1(x)$ assez grand, x est extérieur à $[c - 1/n, d + 1/n]$ et donc $f_n(x) = 0$, pour tout $n \geq n_1$. Dans ce cas, la limite de $f_n(x)$ est 0. Si $x \in [c, d]$, $f_n(x) = 1$ pour tout $n \geq n_0$ et donc la limite de $f_n(x)$ est 1. On a donc bien pour tout $x \in [a, b]$, convergence de $f_n(x)$ vers $\mathbf{1}_{[c,d]}(x)$.

Dans le cas particulier $c = a$ et $d < b$, on prend f_n égale à 1 sur $[a, d]$, nulle en dehors de $[a, d + 1/n[$ et affine sur $[d, d + 1/n[$. Graphiquement, on remplace le trapèze isocèle dessiné par le graphe de f_n dans le cas précédent par un trapèze rectangle. Dans le cas $a < c < d = b$, on fait de même. Enfin le cas $a = c$ et $d = b$ est trivial, il suffit de prendre pour f_n la fonction constante égale à 1 sur $[a, b]$.

5) Montrons que si X et Y sont deux variables aléatoires bornées telles que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{E}X^k = \mathbf{E}Y^k$, elles ont même loi. Nous allons en fait généraliser un peu

la question et montrer le résultat pour deux v.a. bornées presque-sûrement. Dire que X est p.s. bornée signifie qu'il existe deux constantes réelles $a' < b'$ telles que $\mathbf{P}(X \in [a', b']) = 1$. De même pour Y avec des constantes a'' et b''. En posant $a := \min(a', a'')$ et $b := \max(b', b'')$, on a clairement :

$$\mathbf{P}(X \in [a, b]) = 1 \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(Y \in [a, b]) = 1.$$

Il en résulte immédiatement que

$$\forall B \in \mathrm{Bor}(\mathbb{R}) \text{ tel que } B \subset \mathbb{R} \setminus [a, b], \quad P_X(B) = 0 = P_Y(B), \tag{53}$$

$$\forall B \in \mathrm{Bor}(\mathbb{R}) \text{ tel que } B \supset [a, b], \quad P_X(B) = 1 = P_Y(B). \tag{54}$$

Comme X et Y sont p.s. bornées, elles ont des moments de tout ordre. En appliquant le théorème de transfert, on peut exprimer $\mathbf{E}X^k$ à l'aide de la loi P_X de X :

$$\mathbf{E}X^k = \int_\Omega X(\omega)^k \,\mathrm{d}\mathbf{P}(\omega) = \int_\mathbb{R} x^k \,\mathrm{d}P_X(x) = \int_{[a,b]} x^k \,\mathrm{d}P_X(x) + \int_{\mathbb{R}\setminus[a,b]} x^k \,\mathrm{d}P_X(x).$$

Cette dernière intégrale est nulle puisque $P_X(\mathbb{R} \setminus [a, b]) = 0$. En appliquant le même argument à $\mathbf{E}Y^k$, nous pouvons traduire l'hypothèse par

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \int_{[a,b]} x^k \,\mathrm{d}P_X(x) = \int_{[a,b]} y^k \,\mathrm{d}P_Y(y).$$

Par la question 4), on en déduit que les mesures finies P_X et P_Y coïncident sur tout intervalle $[c, d] \subset [a, b]$. Il est alors facile de voir que P_X et P_Y ont même fonction de répartition. En effet, la f.d.r. F_X de P_X est donnée par $F_X(x) = P_X(]-\infty, x])$. On voit alors immédiatement en utilisant (53) et (54) que :

1. si $x < a$, $]-\infty, x] \subset \mathbb{R} \setminus [a, b]$, d'où $P_X(]-\infty, x]) = 0$;
2. si $a \leq x \leq b$, $P_X(]-\infty, x]) = P_X(]-\infty, a[) + P_X([a, x]) = P_X([a, x])$ car $]-\infty, a[\subset \mathbb{R} \setminus [a, b]$;
3. si $x > b$, $]-\infty, x] \supset [a, b]$, donc $P_X(]-\infty, x]) = 1$.

On a exactement le même calcul avec P_Y à la place de P_X. Ceci nous permet d'écrire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ P_X([a, x]) & \text{si } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{si } x > b \end{cases} \qquad F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ P_Y([a, x]) & \text{si } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{si } x > b \end{cases}$$

Quand $a \leq x \leq b$, $[a, x]$ est un intervalle fermé inclus dans $[a, b]$, donc $P_X([a, x]) = P_Y([a, x])$. On voit ainsi que $F_X(x) = F_Y(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ainsi les *lois* P_X et P_Y ont même fonction de répartition, elles sont donc égales.

Ex 3. *Tir à l'arc*

On modélise le point d'impact de la flèche par le vecteur aléatoire gaussien (X, Y) de densité par rapport à λ_2 :

$$f : (x, y) \longmapsto \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(\frac{-(x^2 + y^2)}{2\sigma^2}\right).$$

1) La densité f du vecteur aléatoire (X, Y) peut s'écrire aussi, grâce aux propriétés de la fonction exponentielle :

$$f(x, y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma^2}\right) \times \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-y^2}{2\sigma^2}\right) = g(x)g(y),$$

où g est la densité de la loi $\mathfrak{N}(0, 1)$. Autrement dit $f = g \otimes g$. On sait alors que les composantes du vecteur aléatoire sont indépendantes et que la loi de X a pour densité g et celle de Y aussi, cf. proposition 5.42 du cours[21].

2) Pour déterminer la loi du vecteur aléatoire (R, U), on calcule de deux façons $\mathbf{E}h(R, U)$ pour h borélienne positive quelconque.

Première façon : on utilise le transfert $\Omega' \xrightarrow{(R,U)} \mathbb{R}^2$.

$$\mathbf{E}h(R, U) = \int_\Omega h(R, U)\,\mathrm{d}\mathbf{P} = \int_{\Omega'} h(R, U)\,\mathrm{d}\mathbf{P} = \int_{\mathbb{R}^2} h(r, u)\,\mathrm{d}P_{R,U}(r, u), \tag{55}$$

où l'on a noté $P_{R,U}$ la loi du couple (R, U).

Deuxième façon : comme $(R, U) = \varphi(X, Y)$, on utilise le transfert $\Omega' \xrightarrow{(X,Y)} \mathbb{R}^2 \setminus \Delta$, suivi du changement de variable $\varphi : (x, y) \mapsto (r, u)$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}h(R, U) = \int_{\Omega'} h(R, U)\,\mathrm{d}\mathbf{P} &= \int_{\Omega'} h\big(\varphi(X, Y)\big)\,\mathrm{d}\mathbf{P} \\
&= \int_{\mathbb{R}^2\setminus\Delta} h\big(\varphi(x, y)\big)\,\mathrm{d}P_{X,Y}(x, y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^2\setminus\Delta} h\big(\varphi(x, y)\big) f(x, y)\,\mathrm{d}\lambda_2(x, y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^2\setminus\Delta} h\big(\varphi(x, y)\big) \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(\frac{-(x^2 + y^2)}{2\sigma^2}\right) \mathrm{d}\lambda_2(x, y).
\end{aligned}$$

Dans cette dernière intégrale, le passage en cordonnées polaires φ défini par l'énoncé réalise un C^1-difféomorphisme de l'ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus \Delta$ sur l'ouvert $]0, +\infty[\times] - \pi, \pi[$ et par un calcul classique $\big|\mathrm{Jac}\big(\varphi^{-1}\big)(r, u)\big| = r$. Nous en déduisons :

$$\mathbf{E}h(R, U) = \int_{]0,+\infty[\times]-\pi,\pi[} h(r, u) \frac{r}{2\pi\sigma^2} \exp\left(\frac{-r^2}{2\sigma^2}\right) \mathrm{d}\lambda_2(r, u).$$

[21] Il est clair que les constantes de proportionnalité c telle que $f_X = cg$ et c' telle que $f_Y = c'g$ sont égales à 1 parce que g est déjà une densité de probabilité.

Ce résultat s'écrit encore

$$\mathbf{E}h(R,U) = \int_{\mathbb{R}^2} h(r,u)\frac{r}{2\pi\sigma^2}\exp\left(\frac{-r^2}{2\sigma^2}\right)\mathbf{1}_{]0,+\infty[\times]-\pi,\pi[}(r,u)\,\mathrm{d}\lambda_2(r,u). \tag{56}$$

En appliquant le lemme de caractérisation des mesures par les intégrales des fonctions mesurables positives h, la comparaison des égalités (55) et (56), vraies pour toute h de ce type, nous permet d'identifier $P_{R,U}$ comme la mesure ayant pour densité par rapport à λ_2 la fonction

$$f_{R,U} : (r,u) \longmapsto \frac{r}{2\pi\sigma^2}\exp\left(\frac{-r^2}{2\sigma^2}\right)\mathbf{1}_{]0,+\infty[\times]-\pi,\pi[}(r,u).$$

On remarque que cette densité est de la forme $g_1 \otimes g_2$ (*i.e.* $f_{R,U}(r,u) = g_1(r)g_2(u)$) avec

$$g_1(r) = \frac{r}{\sigma^2}\exp\left(\frac{-r^2}{2\sigma^2}\right)\mathbf{1}_{]0,+\infty[}(r), \quad g_2(u) = \frac{1}{2\pi}\mathbf{1}_{]-\pi,\pi[}(u).$$

Il en résulte que les variables aléatoires R et U sont indépendantes et que leur loi a une densité proportionnelle à g_1 pour R et à g_2 pour U. En fait comme g_2 est déjà une densité de probabilité (c'est celle de la loi uniforme sur $]-\pi,\pi[$), les constantes de proportionnalité valent 1. En conclusion, R suit la loi de densité g_1 et U suit la loi uniforme sur $]-\pi,\pi[$.

3) Calcul de $\mathbf{E}R$. Comme R est une variable aléatoire *positive*, on peut écrire directement sans se soucier de l'intégrabilité et en notant que g_1 est nulle sur $]-\infty,0]$:

$$\mathbf{E}R = \int_{\mathbb{R}} rg_1(r)\,\mathrm{d}\lambda_1(r) = \int_{]0,+\infty[} rg_1(r)\,\mathrm{d}\lambda_1(r) = \int_0^{+\infty} rg_1(r)\,\mathrm{d}r,$$

la conversion de l'intégrale de Lebesgue $\int_{]0,+\infty[}$ en intégrale de Riemann généralisée $\int_0^{+\infty}$ se justifiant par la positivité et la continuité de la fonction $r \mapsto rg_1(r)$ sur $]0,+\infty[$. Grâce à la parité de la fonction à intégrer, on a alors

$$\mathbf{E}R = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{r^2}{\sigma^2}\exp\left(\frac{-r^2}{2\sigma^2}\right)\mathrm{d}r = \frac{\sqrt{2\pi}}{2\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}r^2\exp\left(\frac{-r^2}{2\sigma^2}\right)\mathrm{d}r = \frac{\sqrt{2\pi}}{2\sigma}\mathbf{E}Z^2,$$

où Z est une variable aléatoire de loi gaussienne[22] $\mathfrak{N}(0,\sigma)$. On voit immédiatement que $\mathbf{E}Z = 0$ et donc $\mathbf{E}Z^2 = \operatorname{Var} Z = \sigma^2$. On obtient ainsi

$$\mathbf{E}R = \sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \tag{57}$$

ce qui justifie *a posteriori* l'intégrabilité de la variable aléatoire *positive* R puisque $\mathbf{E}R = \mathbf{E}|R| < +\infty$.

[22]Le lecteur qui n'aimerait pas cette petite astuce de l'introduction de Z peut toujours effectuer le changement de variable $t = r/\sigma$ et intégrer par parties de façon à faire apparaître un exposant impair de t dans l'intégrale...

La formule (57) confirme l'idée que le paramètre σ mesure l'adresse de l'archer. Plus il est petit, plus « en moyenne » le point d'impact de la flèche sera proche du centre de la cible. L'interprétation de $\mathbf{E}R$ comme la valeur moyenne des distances au centre observées sur un grand nombre de tirs se justifie théoriquement par la loi forte des grands nombres. En effet R est intégrable et la loi forte des grands nombres de Khintchine nous dit que si $(R_k)_{k\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi que R,

$$T_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} R_k \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} \mathbf{E}R.$$

Compte-tenu de (57), on en déduit que

$$Z_n := \sqrt{\frac{2}{\pi}}T_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} \sigma.$$

En pratique, on observe n tirs du même archer et on relève les valeurs numériques des distances au centre $r_1,\dots,r_n$ des points d'impact de la flèche. On interprète ces valeurs numériques comme les valeurs $r_1 = R_1(\omega_0),\dots,r_n = R_n(\omega_0)$, pour un même ω_0. On *parie* alors que cet ω_0 (qui ne nous est pas directement accessible) se trouve dans l'ensemble $\Omega_0 := \{\omega \in \Omega;\ Z_n(\omega) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sigma\}$. La probabilité de gagner ce pari est $\mathbf{P}(\Omega_0) = 1$. Ceci légitime l'estimation du paramètre inconnu σ par la valeur approchée $Z_n(\omega_0)$ fournie par les observations.

Ex 4. *Vrai ou faux ?*

1) *Si K est un compact de $\mathbb{R}^2$, $\lambda_2(K) < +\infty$.*

C'est vrai puisqu'un compact d'un espace métrique est toujours borné. On peut donc inclure K dans un carré $[-m,m]^2$ pour m assez grand. D'où

$$\lambda_2(K) \leq \lambda_2\big([-m,m]^2\big) = (2m)^2 < +\infty.$$

La propriété est vraie plus généralement pour tout compact de $\mathbb{R}^d$.

2) *Si A est un borélien au plus dénombrable de $\mathbb{R}$, la mesure de Lebesgue de sa frontière est nulle.*

C'est faux. Contre-exemple $A = \mathbb{Q}$. Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, sa fermeture $\overline{\mathbb{Q}}$ est $\mathbb{R}$. D'autre part $\mathbb{Q}$ est d'intérieur vide car il ne contient aucun intervalle de $\mathbb{R}$ (dans un tel intervalle, il y a toujours au moins un irrationnel et en fait une infinité non dénombrable). Donc $\partial\mathbb{Q} = \overline{\mathbb{Q}} \setminus \mathring{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}\setminus\emptyset = \mathbb{R}$, d'où $\lambda_1(\partial\mathbb{Q}) = +\infty$.

3) *Soit $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ un espace mesuré et $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite croissante de fonctions $\Omega \to \mathbb{R}_+$, mesurables $\mathcal{F}$-Bor$(\mathbb{R}_+)$, de limite f ($f_n \uparrow f$). Alors*

$$\mu(\{f_n \leq 1\}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mu(\{f \leq 1\}) \quad \text{et} \quad \mu(\{f_n < 1\}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mu(\{f < 1\}). \tag{58}$$

C'est faux. Voici un contre-exemple valable pour les deux affirmations : $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{F} = \text{Bor}(\mathbb{R})$, $\mu = \lambda_1$ et $f_n := 2\mathbf{1}_{[-n,n]}$. La suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ est croissante et converge ponctuellement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction constante 2. On voit immédiatement que $\{f_n < 1\} = \{f_n \leq 1\} =]-\infty, -n[\cup]n, +\infty[$, d'où

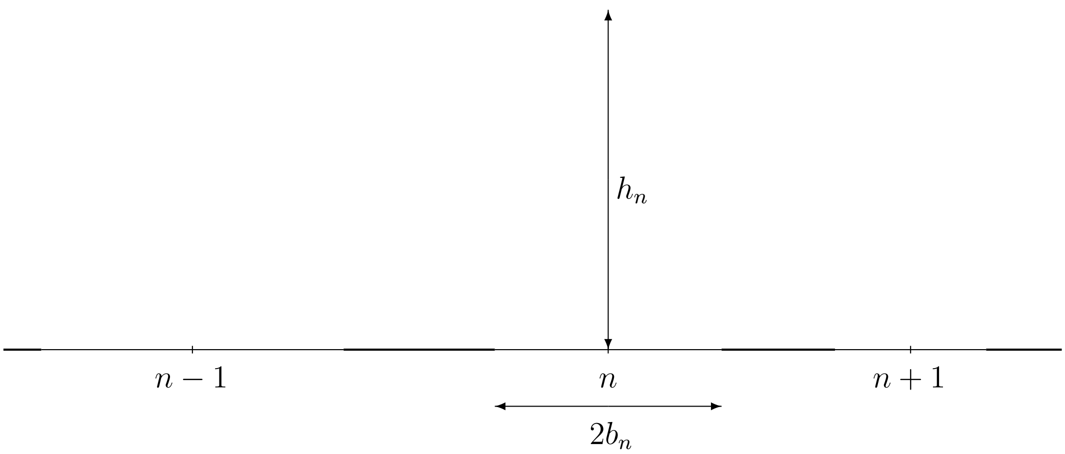
$$\mu(\{f_n \leq 1\}) = \mu(\{f_n < 1\}) = \lambda_1\big(]-\infty, -n[\cup]n, +\infty[\big) = +\infty.$$

Quand n tend vers l'infini, ces deux suites constantes convergent vers $+\infty$. D'autre part $\{f \leq 1\} = \{f < 1\} = \emptyset$ puisque f est la fonction constante égale à 2, donc il n'y a aucun x de $\mathbb{R}$ vérifiant $f(x) \leq 1$. Ainsi aucune des deux convergences (58) n'a lieu pour cet exemple.

La croissance de la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ implique la décroissance au sens de l'inclusion de la suite d'ensembles $\{f_n \leq 1\}$. On ne peut pourtant pas utiliser la continuité séquentielle de μ pour conclure à (58), car il nous manque l'hypothèse $\mu(\{f_1 \leq 1\}) < +\infty$. Par contre si μ est une mesure finie, alors elle a automatiquement la propriété de continuité séquentielle décroissante et dans ce cas la première convergence dans (58) est vraie. La seconde reste fausse. Contre-exemple : $\Omega = [0, 1]$, $\mathcal{F} = \mathrm{Bor}([0, 1])$, $\mu = \lambda_1$ et $f_n = 1 - 1/n$ (fonction constante sur Ω).

4) *Si $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est continue et λ_1-intégrable sur $\mathbb{R}_+$, $f(x)$ tend vers zéro quand x tend vers $+\infty$.*

C'est faux. Voici une famille de contre-exemples. On considère une fonction f dont le graphe est une ligne polygonale dessinant une suite de triangles isocèles localisés aux points d'abscisse $n \in \mathbb{N}^*$, de base $[n - b_n, n + b_n]$ (avec $b_n \leq 1/2$ pour éviter tout chevauchement) et de hauteur h_n. L'aire du n-ième triangle est ainsi $b_n h_n$ et la seule condition pour que f soit λ_1-intégrable sur $\mathbb{R}_+$ est que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n h_n$ converge.



Cette condition n'impose nullement à h_n de tendre vers 0. Par exemple en prenant

$$b_n = \frac{1}{2n^3}, \quad h_n = n, \quad n \geq 1,$$

on obtient une fonction f continue et λ_1-intégrable sur $\mathbb{R}_+$ telle que $f(n) = n$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers l'infini. Ceci empêche f de tendre vers 0 à l'infini.

5) *Si* $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ *est décroissante, elle a une limite finie* ℓ *en* $+\infty$ *et pour toute fonction* g λ_1*-intégrable sur* $[0, +\infty[$, $\int_{\mathbb{R}_+} f(nx)g(x)\,\mathrm{d}\lambda_1(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \int_{\mathbb{R}_+} g(x)\,\mathrm{d}\lambda_1(x)$.

C'est vrai. Rappelons d'abord qu'une fonction monotone est borélienne. Ainsi la décroissance de f et la mesurabilité de g impliquent la mesurabilité de la fonction $x \mapsto f(nx)g(x)$. Vérifions ensuite que f a pour limite en $+\infty$ le réel $\ell := \inf_{\mathbb{R}_+} f$. Cet infimum est un réel (de $[0, f(0)]$), donc fini puisque pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f(0) \geq f(x) \geq 0$ car f est décroissante et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Comme ℓ est le plus grand minorant de l'ensemble $f(\mathbb{R}_+)$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $x_\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ tel que $\ell \leq f(x_\varepsilon) < \ell + \varepsilon$. Par décroissance de f, on en déduit que pour tout $x \geq x_\varepsilon$, $\ell \leq f(x) < \ell + \varepsilon$. Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on a bien $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$.

Pour tout $x > 0$, on a donc $\lim_{n\to+\infty} f(nx) = \ell$ et cette convergence implique celle de $f(nx)g(x)$ vers $\ell g(x)$, sauf peut-être dans le cas où $\ell = 0$ et $g(x) = +\infty$. La fonction g étant λ_1-intégrable sur $\mathbb{R}_+$ est finie λ_1-presque partout sur $\mathbb{R}_+$, on a donc dans tous les cas :

$$f(nx)g(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{\lambda_1-\text{p.p.}} \ell g(x). \tag{59}$$

En raison de la décroissance et de la positivité de f, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \bigl|f(nx)g(x)\bigr| \leq f(0)|g(x)|,$$

ce qui montre que la convergence (59) est dominée par la fonction λ_1-intégrable $f(0)|g|$. Par le théorème de Lebesgue $\int_{\mathbb{R}_+} f(nx)g(x)\,\mathrm{d}\lambda_1(x)$ converge alors vers $\ell \int_{\mathbb{R}_+} g(x)\,\mathrm{d}\lambda_1(x)$.

6) *Si* X *et* Y *sont deux variables aléatoires réelles dont les lois* P_X *et* P_Y *ont chacune une densité par rapport à* λ_1*, alors la loi de* $X + Y$ *a aussi une densité par rapport à* λ_1.

C'est faux. Il suffit pour le voir de prendre X de loi uniforme sur $[0, 1]$ et de poser $Y = -X$. Alors Y est aussi à densité puisque Y suit la loi uniforme sur $[-1, 0]$. Pourtant $X + Y$ est la variable aléatoire constante 0, donc de loi la masse de Dirac en 0 qui elle, n'a pas de densité par rapport à λ_1. Le même argument fonctionne avec n'importe quelle variable aléatoire X à densité f, puisque $Y := -X$ est à densité $g : x \mapsto f(-x)$.

7) *Pour toute mesure* finie μ *sur l'espace mesurable* $(\Omega, \mathcal{F})$ *et toute application* $f : \Omega \to \mathbb{R}$*, mesurable* $\mathcal{F}$-Bor$(\mathbb{R})$*, la fonction* $F : x \mapsto F(x) := \int_\Omega \cos\bigl(xf(\omega)\bigr)\,\mathrm{d}\mu(\omega)$ *est définie et continue sur* $\mathbb{R}$.

C'est vrai. Il s'agit d'une application immédiate du théorème de continuité sous le signe somme. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ fixé, l'application $\omega \mapsto \cos\bigl(xf(\omega)\bigr)$ est mesurable comme composée de f mesurable $\mathcal{F}$-Bor$(\mathbb{R})$ avec l'application continue donc borélienne $t \mapsto \cos(xt)$. Pour tout $\omega \in \Omega$, la fonction $x \mapsto \cos\bigl(xf(\omega)\bigr)$ est continue sur $\mathbb{R}$. On a de plus la domination :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall \omega \in \Omega, \quad \bigl|\cos\bigl(xf(\omega)\bigr)\bigr| \leq g(\omega) := 1$$

et la fonction constante g est μ-intégrable sur Ω puisque μ est une mesure finie.

8) *Soit* $(X_k)_{k\geq 1}$ *une suite de v. a. indépendantes et de même loi de Bernoulli de paramètre* $p \in]0,1[$. *Alors* $T_n := \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n X_k \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} +\infty$.

C'est vrai. Pour le voir, il suffit d'écrire

$$T_n = \sqrt{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k\right) = \sqrt{n}\frac{S_n}{n}$$

et de remarquer que par la loi forte des grands nombres (les X_k sont i.i.d. et bornées donc intégrables), S_n/n converge presque sûrement vers $\mathbf{E}X_1 = p > 0$. On en déduit que T_n tend p.s. vers $+\infty$ et on a même un équivalent :

$$T_n \sim p\sqrt{n} \quad \text{p.s.}$$

Remarque : le même argument se généralise immédiatement à une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi quelconque pourvu que X_1 soit intégrable et $\mathbf{E}X_1 \neq 0$. Sous ces hypothèses, T_n tend p.s. vers $+\infty$ si $\mathbf{E}X_1 > 0$ et vers $-\infty$ si $\mathbf{E}X_1 < 0$. Par contre le résultat n'est plus vrai si $\mathbf{E}X_1 = 0$. Pour s'en convaincre, considérons une suite i.i.d. $(Y_k)_{k\geq 1}$ telle que Y_1 soit de carré intégrable et non p.s. constante et notons $\sigma^2 = \operatorname{Var} Y_1$ ($\sigma > 0$). Alors selon le théorème limite central :

$$S_n^* := \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\sum_{k=1}^n (Y_k - \mathbf{E}Y_k) \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{loi}} \mathfrak{N}(0,1). \tag{60}$$

En posant $X_k := (Y_k - \mathbf{E}Y_k)/\sigma$, on voit que $S_n^* = T_n$. Les X_k sont i.i.d. d'espérance nulle (et de carré intégrable, donc *a fortiori* $X_1 \in L^1(\Omega)$). Supposons que T_n converge p.s. vers $+\infty$ et montrons que c'est contradictoire avec (60). On commence par remarquer que la convergence p.s. de T_n vers $+\infty$ implique :

$$\forall a > 0, \quad \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(T_n > a) = 1. \tag{61}$$

En effet en posant $A_n := \{\omega \in \Omega;\ T_n(\omega) > a\}$, on a convergence p.s. de $\mathbf{1}_{A_n}$ vers la constante 1 et cette convergence est dominée par la v.a. constante 1 qui est $\mathbf{P}$-intégrable sur Ω. Par convergence dominée, on en déduit que $\mathbf{E}\mathbf{1}_{A_n}$ converge vers $\mathbf{E}(1) = 1$, autrement dit $\mathbf{P}(A_n)$ tend vers 1. Notons Φ la fonction de répartition de la loi $\mathfrak{N}(0,1)$ et choisissons $a > 0$, par exemple $a = 2$. Par continuité de Φ, (60) et l'égalité $T_n = S_n^*$, on a convergence de $\mathbf{P}(T_n \leq 2)$ vers $\Phi(2) \simeq 0{,}977\,2$. On en déduit que $\mathbf{P}(T_n > 2)$ converge vers $1 - \Phi(2) \simeq 0{,}022\,8 < 1$, ce qui contredit (61).

Le cas d'une suite de Bernoulli avec $p = 0$ ne relève pas du théorème limite central. En effet alors $X_k = 0$ p.s. et pour tout $n \geq 1$, $T_n = 0$ p.s., d'où l'on déduit la convergence presque sûre de T_n vers 0.

Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IFP **Année 2002-03**

Corrigé de l'examen (deuxième session), septembre 2003

Ex 5. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) := \sin(x^2 + y^2)$. On note

$$D_n := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 < n\pi\}, \qquad I_n := \int_{D_n} f \, d\lambda_2.$$

1) D_n est le disque ouvert de centre 0 et de rayon $\sqrt{n\pi}$. C'est donc un borélien borné et $\lambda_2(D_n)$ est fini. De plus la fonction continue (donc borélienne) f est bornée par 1 ($|f| \leq 1$). On en déduit immédiatement l'intégrabilité de f sur D_n par rapport à λ_2 puisque $\int_{D_n} |f| \, d\lambda_2 \leq \lambda_2(D_n) < +\infty$. Ceci justifie l'existence de l'intégrale I_n.

Le passage en coordonnées polaires s'impose naturellement comme la première méthode à essayer pour le calcul de I_n. Considérons pour cela le C^1-difféomorphisme

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}_+ \times \{0\} \longrightarrow]0, +\infty[\times]0, 2\pi[,$$

dont l'inverse est donné par

$$\forall (r, \theta) \in]0, +\infty[\times]0, 2\pi[, \quad \varphi^{-1}(r, \theta) = (x, y) \text{ avec } \begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta. \end{cases}$$

Rappelons le calcul du jacobien de φ^{-1} :

$$\operatorname{Jac}(\varphi^{-1})(r, \theta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r.$$

Notons $\Delta_n = D_n \cap (\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}_+ \times \{0\})$, autrement dit le disque D_n privé du segment horizontal $[0, \sqrt{n\pi}[\times\{0\}$. Comme ce segment a une λ_2 mesure nulle, $I_n = \int_{D_n} f \, d\lambda_2 = \int_{\Delta_n} f \, d\lambda_2$. L'image par φ de l'ouvert Δ_n est le rectangle ouvert $]0, \sqrt{n\pi}[\times]0, 2\pi[$. La formule générale de changement de variable par C^1-difféomorphisme nous donne donc ici :

$$I_n = \int_{\Delta_n} f(x, y) \, d\lambda_2(x, y) = \int_{]0, \sqrt{n\pi}[\times]0, 2\pi[} \sin(r^2) r \, d\lambda_2(r, \theta).$$

L'ensemble d'intégration étant un produit cartésien, le corollaire du théorème de Fubini pour les fonctions à variables séparées (ici de la forme $f_1(r) f_2(\theta)$) nous donne

$$I_n = \int_{]0, \sqrt{n\pi}[} \sin(r^2) r \, d\lambda_1(r) \int_{]0, 2\pi[} d\lambda_1(\theta) = 2\pi \int_0^{\sqrt{n\pi}} \sin(r^2) r \, dr,$$

où le passage de l'intégrale de Lebesgue à l'intégrale de Riemann est légitime puisque la fonction $r \to \sin(r^2)r$ est continue sur $[0, n\pi]$. En effectuant dans cette dernière intégrale le changement de variable $t = r^2$, on obtient finalement :

$$I_n = \pi \int_0^{n\pi} \sin t \, \mathrm{d}t = \pi \left[-\cos t\right]_0^{n\pi} = \pi(1 - \cos n\pi) = \begin{cases} 2\pi & \text{si } n \text{ est impair,} \\ 0 & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

2) Le calcul précédent montre que la suite (I_n) *n'a pas de limite* quand n tend vers l'infini. Ceci empêche l'intégrabilité de f sur $\mathbb{R}^2$. Pour le voir raisonnons par l'absurde en supposant f λ_2-intégrable sur $\mathbb{R}^2$, ce qui implique $\int_{\mathbb{R}^2} |f| \, \mathrm{d}\lambda_2 < +\infty$. La suite de fonctions mesurables $f_n := f\mathbf{1}_{D_n}$ converge partout sur $\mathbb{R}^2$ vers f et est dominée par la fonction λ_2-intégrable $|f|$. Par le théorème de convergence dominée, on en déduit que $I_n = \int_{\mathbb{R}^2} f_n \, \mathrm{d}\lambda_2$ converge vers le réel $\int_{\mathbb{R}^2} f \, \mathrm{d}\lambda_2$, ce qui est contradictoire avec le résultat de la question précédente.

Remarque. Une adaptation immédiate du raisonnement ci-dessus montre que si (A_n) est une suite croissante de boréliens de réunion $\mathbb{R}^2$, la convergence de $\int_{A_n} f \, \mathrm{d}\lambda_2$ est *nécessaire* à la λ_2-intégrabilité de f sur $\mathbb{R}^2$. Cette convergence n'est pas *suffisante* pour l'intégrabilité de f. Pour s'en convaincre, il suffit de reprendre le calcul de la question précédente avec l'intégrale $J_n := \int_{D'_n} f \, \mathrm{d}\lambda_2$, où $D'_n = D_{2n}$ est le disque de centre 0 et de rayon $\sqrt{2n\pi}$. On voit immédiatement que $J_n = I_{2n} = 0$ pour tout n, donc que (J_n) converge. Pourtant on sait que f n'est pas λ_2-intégrable sur $\mathbb{R}^2$.

Ex 6. Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, indépendantes et de même loi normale $\mathfrak{N}(0, 1)$. Le vecteur aléatoire (X, Y) a donc pour densité $g \otimes g : (x, y) \mapsto (2\pi)^{-1} \exp(-(x^2 + y^2)/2)$, où g est la densité de la loi $\mathfrak{N}(0, 1)$.

1) Posons $(S, T) := (X, XY)$. Pour déterminer la loi de ce vecteur aléatoire, on calcule de deux façons $\mathbf{E}h(S, T) = \mathbf{E}h(X, XY)$, pour h fonction borélienne positive quelconque $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$.

Calcul par transfert $\Omega \xrightarrow{(S,T)} \mathbb{R}^2$:

$$\mathbf{E}h(S, T) = \int_\Omega h\big(S(\omega), T(\omega)\big) \, \mathrm{d}\mathbf{P}(\omega) = \int_{\mathbb{R}^2} h(s, t) \, \mathrm{d}P_{(S,T)}(s, t). \tag{62}$$

Calcul par transfert $\Omega \xrightarrow{(X,Y)} \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}h(S, T) &= \int_\Omega h\big(X(\omega), X(\omega)Y(\omega)\big) \, \mathrm{d}\mathbf{P}(\omega) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} h(x, xy) \, \mathrm{d}P_{(X,Y)}(x, y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} h(x, xy) \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2}\right) \mathrm{d}\lambda_2(x, y). \end{aligned} \tag{63}$$

Pour la comparaison avec (62), on est amené à considérer le changement de variable (*a priori* $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, sous réserve de modification ultérieure)

$$\varphi \ : (x, y) \longmapsto (s, t) = (x, xy).$$

Pour voir s'il est bijectif, essayons d'inverser φ. Cela revient à chercher si pour (s, t) donné dans $\mathbb{R}^2$, le système

$$\begin{cases} x &= s \\ xy &= t \end{cases}$$

a une solution (x, y) unique. C'est clairement le cas si $s \neq 0$ puisqu'alors le système équivaut à $x = s$ et $y = t/s$. Si $s = 0$ et $t \neq 0$, le système n'a pas de solution (la substitution de x par s dans la deuxième équation donne $0 = t$). Enfin si $s = 0$ et $t = 0$, le système a une infinité de solutions, tous les couples $(0, y)$ pour y réel quelconque. Cette discussion nous conduit à restreindre l'ensemble d'arrivée de φ à

$$D := \{(s, t) \in \mathbb{R}^2;\ s \neq 0\} = \mathbb{R}^2 \setminus (\{0\} \times \mathbb{R}).$$

Tout couple $(s, t) \in D$ a un antécédent unique par φ, c'est

$$(x, y) = \varphi^{-1}(s, t) = (s, t/s).$$

Pour faire de φ une bijection, il suffit donc maintenant de restreindre son ensemble de départ à

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}(D) &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ \exists (s, t) \in D,\ x = s,\ y = t/s\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ \exists (s, t) \in \mathbb{R}^2,\ s \neq 0,\ x = s,\ y = t/s\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x \neq 0\} = D. \end{aligned}$$

D'autre part il est clair que D est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et que son complémentaire dans $\mathbb{R}^2$ (la « droite » $\{0\} \times \mathbb{R}$) est de λ_2 mesure nulle. En revenant à (63), on peut donc écrire

$$\mathbf{E}h(S, T) = \int_D h(x, xy) \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2}\right) \mathrm{d}\lambda_2(x, y) \tag{64}$$

Le changement de variable $\varphi : D \to D$ est bijectif et on voit immédiatement que φ et φ^{-1} ont des dérivées partielles continues sur D. On a donc bien un C^1-difféomorphisme de l'ouvert D sur lui même. Le calcul du jacobien de φ^{-1} nous donne :

$$\operatorname{Jac}(\varphi^{-1})(s, t) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-t}{s^2} & \frac{1}{s} \end{vmatrix} = \frac{1}{s}.$$

Le changement de variable φ appliqué à l'intégrale du deuxième membre de (64) nous donne finalement :

$$\mathbf{E}h(S, T) = \int_D h(s, t) \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{1}{2}\Big(s^2 + \frac{t^2}{s^2}\Big)\right) \frac{1}{|s|} \mathrm{d}\lambda_2(s, t). \tag{65}$$

Soit μ la mesure de densité F par rapport à λ_2, F étant définie par $F(s,t) := 0$ si $(s,t) \notin D$ et

$$F(s,t) := \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{1}{2}\Big(s^2 + \frac{t^2}{s^2}\Big)\right) \frac{1}{|s|} \quad \text{si } (s,t) \in D.$$

La comparaison de (62) et (65) nous montre que $\int_{\mathbb{R}^2} h \,\mathrm{d}P_{(S,T)} = \int_{\mathbb{R}^2} h \,\mathrm{d}\mu$ pour toute fonction borélienne positive h, ce qui implique l'égalité de mesures $P_{(S,T)} = \mu$. Ainsi la loi du vecteur aléatoire (X, XY) est à densité F par rapport à λ_2.

On en déduit que $T = XY$ a une loi à densité F_T qui s'obtient par intégration partielle de F :

$$F_T(t) = \int_{\mathbb{R}} F(s,t)\,\mathrm{d}\lambda_1(s) = \int_{\mathbb{R}^*} \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{1}{2}\Big(s^2 + \frac{t^2}{s^2}\Big)\right) \frac{1}{|s|}\,\mathrm{d}\lambda_1(s).$$

Par parité de l'intégrande ($\forall s \neq 0,\ F(s,t) = F(-s,t)$), ceci s'écrit encore

$$F_T(t) = \frac{1}{\pi} \int_{]0,+\infty[} \exp\left(-\frac{1}{2}\Big(s^2 + \frac{t^2}{s^2}\Big)\right) \frac{1}{s}\,\mathrm{d}\lambda_1(s). \tag{66}$$

2) On pose $f(t) := \int_0^{+\infty} H(s,t)\,\mathrm{d}s$, avec

$$H(s,t) := \exp\left(-\frac{1}{2}\Big(s^2 + \frac{t^2}{s^2}\Big)\right) \frac{1}{s}.$$

Pour t fixé, $\int_0^{+\infty} H(s,t)\,\mathrm{d}s$ est une intégrale de Riemann généralisée. L'intégrande $H(\,.\,,t)$ est une fonction continue positive sur $]0,+\infty[$. La convergence en $+\infty$ de $\int_0^{+\infty} H(s,t)\,\mathrm{d}s$ résulte immédiatement de la majoration (valable pour tout t réel) :

$$\forall s \in [1,+\infty[, \quad 0 \leq H(s,t) \leq \exp(-s^2/2) \tag{67}$$

et de la convergence bien connue de $\int_1^{+\infty} \exp(-s^2/2)\,\mathrm{d}s$.

Examinons la convergence en 0. Si $t = 0$, la fonction positive $s \mapsto H(s,0)$ est équivalente à $1/s$ quand s tend vers 0 ce qui entraîne la divergence de l'intégrale généralisée $\int_0^1 H(s,0)\,\mathrm{d}s$. La fonction f n'est donc pas définie au point $t = 0$. Par contre si $t \neq 0$, la majoration

$$\forall s \in]0,1], \quad 0 \leq H(s,t) \leq \exp\left(-\frac{t^2}{2s^2}\right) \frac{1}{s} \tag{68}$$

montre que $H(s,t)$ tend vers 0 quand s tend vers 0 (pour le voir poser $u = 1/s$ et noter que $u \exp(-t^2u^2)$ tend vers 0 quand u tend vers $+\infty$). Dans ce cas on peut prolonger $H(\,.\,,t)$ par continuité à droite en 0 en posant $H(0,t) := 0$ et $\int_0^1 H(s,0)\,\mathrm{d}s$ devient une intégrale de Riemann ordinaire d'une fonction continue sur $[0,1]$, il n'y a donc aucun problème de convergence.

Finalement la seule restriction à la définition de $f(t)$ est $t \neq 0$. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^*$.

Remarque. Comme $f(t)$ est une intégrale généralisée absolument convergente d'une fonction continue sur $]0,+\infty[$, on peut la convertir en intégrale au sens de Lebesgue

$$\forall t \neq 0, \quad f(t) = \int_{]0,+\infty[} \exp\left(-\frac{1}{2}\Big(s^2 + \frac{t^2}{s^2}\Big)\right) \frac{1}{s} \,\mathrm{d}\lambda_1(s), \tag{69}$$

ce qui compte-tenu de (66), légitime l'égalité :

$$\forall t \neq 0, \quad F_T(t) = \frac{1}{\pi} f(t).$$

Autrement dit, πf est (une version de) la densité de XY.

Pour montrer la continuité de f sur $\mathbb{R}^*$, il suffit par parité ($f(-t) = f(t)$) de l'établir sur $]0,+\infty[$. On utilise pour cela (69) et le théorème de continuité sous le signe somme de Lebesgue. On note d'abord que pour tout $s \in]0,+\infty[$, $t \mapsto H(s,t)$ est une fonction continue sur $]0,+\infty[$. Il s'agit alors pour tout $t_0 > 0$ fixé, de trouver un voisinage $V(t_0)$ et une fonction intégrable g_0 telle que $\forall t \in V(t_0)$, $0 \leq H(s,t) \leq g_0(s)$.

En remarquant que pour s fixé, $H(s,t)$ est une fonction décroissante de t, on voit que n'importe quel intervalle de la forme $[\varepsilon,+\infty[$ avec $0 < \varepsilon < t_0$ peut convenir. Plus précisément, choisissons $V(t_0) := [t_0/2,+\infty[$ (comme $t_0 > 0$, $t_0/2$ est aussi strictement positif). On a alors

$$\forall t \in [t_0/2,+\infty[,\ \forall s \in]0,+\infty[\quad 0 \leq H(s,t) \leq H(s,t_0/2) =: g_0(s).$$

L'intégrabilité de g_0 sur $]0,+\infty[$ relativement à λ_1 résulte de la remarque ci-dessus puisque $\int_{]0,+\infty[} g_0(s)\,\mathrm{d}\lambda_1(s) = f(t_0/2)$. Le théorème de continuité sous le signe somme de Lebesgue nous permet alors d'affirmer que f est continue au point t_0. Comme t_0 était un réel positif *quelconque*, on en déduit que f est continue sur *tout l'intervalle* $]0,+\infty[$, puis sur $\mathbb{R}^*$ par parité.

3) Étudions la limite de $f(t)$ quand t tend vers 0^+. On remarque d'abord que la *décroissance* de $H(s,t)$ à s fixé passe immédiatement à f en intégrant par rapport à s l'inégalité

$$\forall s \in]0,+\infty[, \quad H(s,t) \geq H(s,t') \quad \text{pour } 0 < t \leq t'. \tag{70}$$

Il n'y a donc *a priori* que deux possibilités pour le comportement de f quand t tend vers 0^+. Ou bien f est bornée sur un voisinage de 0 et dans ce cas f aura une limite finie en 0^+, ou bien f tend vers $+\infty$ en 0^+. Nous allons montrer que c'est le deuxième cas qui est le bon. Pour cela, il suffit d'établir que si t_n est une suite décroissante dans $]0,+\infty[$, convergente vers 0, $f(t_n)$ tend vers $+\infty$ (il suffirait en fait grâce à la monotonie de f de le faire avec une suite particulière, par exemple $t_n = 1/n$). Posons $h_n := H(\,.\,,t_n)$. Les h_n sont des fonctions mesurables positives définies sur $]0,+\infty[$. En appliquant (70) avec $t = t_{n+1} \leq t_n = t'$, on obtient :

$$\forall s \in]0,+\infty[, \quad h_{n+1}(s) \geq h_n(s).$$

La suite (h_n) est donc une suite *croissante* de fonctions mesurables positives. Elle converge sur $]0,+\infty[$ vers $h : s \mapsto s^{-1}\exp(-s^2/2)$. Par le théorème de Beppo Levi, on en déduit

$$f(t_n) = \int_{]0,+\infty[} h_n \,\mathrm{d}\lambda_1 \uparrow \int_{]0,+\infty[} h \,\mathrm{d}\lambda_1 \quad (n \to +\infty).$$

Pour vérifier que $\int_{]0,+\infty[} h \,\mathrm{d}\lambda_1 = +\infty$, il suffit d'écrire :

$$\int_{]0,+\infty[} h \,\mathrm{d}\lambda_1 \geq \int_{]0,1]} h \,\mathrm{d}\lambda_1 \geq \exp(-1/2) \int_{]0,1]} \frac{1}{s} \,\mathrm{d}\lambda_1(s)$$

et de noter que cette dernière intégrale vaut $+\infty$ car on peut la convertir en l'intégrale de Riemann généralisée divergente $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}s}{s}$. En conclusion,

$$\lim_{t \to 0^+} f(t) = +\infty.$$

Problème

1) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $r \in \mathbb{R}^+$, on définit l'ensemble

$$A_n(r) := \big\{(x_1, \dots, x_n) \in [0,1]^n ;\ x_1 + \dots + x_n < r\big\}.$$

Vérifions que pour $0 < r \leq 1$, $A_n(r)$ est l'image de $A_n(1)$ par l'homothétie h de centre 0 et de rapport r. Soit y un élément quelconque de $h\big(A_n(1)\big)$. Cela signifie qu'il existe $x = (x_1, \dots, x_n) \in A_n(1)$ tel que $y = rx$. Les coordonnées de x vérifient $0 \leq x_i \leq 1$ pour tout $i = 1, \dots, n$ et $x_1 + \dots + x_n < 1$. Les coordonnées y_i de y vérifient donc $0 \leq y_i = rx_i \leq r \leq 1$ et $y_1 + \dots + y_n = r(x_1 + \dots + x_n) < r$. Ainsi y appartient à $A_n(r)$ et comme y était quelconque dans $h\big(A_n(1)\big)$, ceci prouve l'inclusion

$$h\big(A_n(1)\big) \subset A_n(r). \tag{71}$$

Pour vérifier l'inclusion dans l'autre sens, soit y quelconque dans $A_n(r)$ et posons $x = \frac{1}{r}y$. Alors $y = h(x)$ et les composantes x_i de x vérifient $x_i = \frac{1}{r}y_i \geq 0$ et $x_1 + \dots + x_n = \frac{1}{r}(y_1 + \dots + y_n) < \frac{1}{r}r = 1$. De plus par positivité des composantes de x, pour tout $i = 1, \dots, n$, $0 \leq x_i \leq x_1 + \dots + x_n \leq 1$. Ceci établit l'appartenance de x à $A_n(1)$, donc celle de $y = h(x)$ à $h\big(A_n(1)\big)$. Comme y était quelconque dans $A_n(r)$, nous avons ainsi vérifié que

$$A_n(r) \subset h\big(A_n(1)\big). \tag{72}$$

Des inclusions (71) et (72) découle l'égalité

$$A_n(r) = h\big(A_n(1)\big). \tag{73}$$

On en déduit immédiatement que

$$\lambda_n\big(A_n(r)\big) = r^n \lambda_n\big(A_n(1)\big). \tag{74}$$

2) Soit N une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Pour montrer que

$$\mathbf{E}N = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(N > k), \tag{75}$$

on commence par remarquer que l'évènement $\{N > k\}$ admet la décomposition en union dénombrable d'évènements deux à deux disjoints :

$$\{N > k\} = \cup_{j>k} \{N = j\}.$$

Par σ-additivité de $\mathbf{P}$, on en déduit

$$\mathbf{P}(N > k) = \sum_{j>k} \mathbf{P}(N = j).$$

En reportant cette expression dans le second membre de (75) et en introduisant le facteur $\mathbf{1}_{\{j>k\}}$ de façon à pouvoir le traiter comme une série double à termes *positifs* et ainsi permuter l'ordre des sommations, on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(N > k) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{j>k} \mathbf{P}(N = j) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} \mathbf{P}(N = j) \mathbf{1}_{\{j>k\}} \\ &= \sum_{j=1}^{+\infty} \mathbf{P}(N = j) \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{1}_{\{j>k\}}. \end{aligned} \tag{76}$$

Dans la série $\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{1}_{\{j>k\}}$, tous les termes d'indice $k \geq j$ sont nuls. Les autres valent 1 et il y en a exactement j, indexés par $k = 0, 1, \dots, j-1$. Cette série est donc une somme finie et vaut j. Le report de ce résultat dans (76) nous donne :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(N > k) = \sum_{j=1}^{+\infty} j \mathbf{P}(N = j) = \mathbf{E}N,$$

ce qui établit (75).

3) Soit $(U_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $[0, 1]$ et $S_n := U_1 + \cdots + U_n$. Par la loi forte des grands nombres, $n^{-1} S_n$ converge presque sûrement vers $\mathbf{E}U_1 = 1/2$. Cela signifie que

$$\Omega' := \left\{ \omega \in \Omega;\ \frac{1}{n} S_n(\omega) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2} \right\}$$

est un évènement de probabilité 1. Pour tout $\omega \in \Omega'$, $S_n(\omega)$ est équivalent à $n/2$ quand n tend vers $+\infty$, donc tend vers l'infini. Ainsi la suite de variable aléatoires S_n tend vers $+\infty$ au moins sur l'évènement Ω' de probabilité 1, ce qui implique sa convergence presque sûre vers $+\infty$.

Si ω est tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n(\omega) < 1$, la suite de réels $S_n(\omega)$ ne peut tendre vers $+\infty$, ce qui interdit l'appartenance de ω à Ω'. On a donc l'inclusion d'évènements : $\{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n < 1\} \subset \Omega'^c$, d'où

$$0 \leq \mathbf{P}(\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n < 1) \leq \mathbf{P}(\Omega'^c) = 0. \tag{77}$$

4) Définissons

$$N(\omega) := \min\bigl\{n \in \mathbb{N}^*; S_n(\omega) \geq 1\bigr\},$$

avec la convention habituelle $\min \emptyset := +\infty$. D'après (77), $\mathbf{P}(N = +\infty) = 0$, ce qui nous autorise à considérer N comme une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ (voir la remarque ci-dessous pour les questions de mesurabilité).

Fixons $k \in \mathbb{N}^*$. On a les équivalences

$$N(\omega) > k \quad \Leftrightarrow \quad \forall j \leq k,\ S_j(\omega) < 1 \quad \Leftrightarrow \quad S_k(\omega) < 1.$$

La première de ces équivalences résulte de la définition de N. La deuxième utilise le fait que la suite de réels $\bigl(S_j(\omega)\bigr)_{j\geq 1}$ est croissante car les $U_i(\omega)$ sont des réels positifs. Ces équivalences établissent l'égalité d'évènements $\{N > k\} = \{S_k < 1\}$. Comme $k \in \mathbb{N}^*$ était quelconque, on en déduit :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}(N > k) = \mathbf{P}(S_k < 1). \tag{78}$$

Le cas particulier de $\mathbf{P}(N > 0)$ est évident directement puisque par sa définition, $N(\omega)$ est toujours strictement positif. Donc $\mathbf{P}(N > 0) = 1$. On pourrait d'ailleurs englober ce cas dans (78) en posant $S_0 := 0$ par convention.

Remarque. Revenons sur les abus de langage suggérés et tolérés par l'énoncé. Telle qu'elle est définie, N est une application de Ω dans $\overline{\mathbb{N}}^* := \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$. Pour pouvoir parler de la « variable aléatoire » N et légitimer l'écriture $\mathbf{P}(N = +\infty)$, il faudrait donc en toute rigueur commencer par établir la *mesurabilité* de N relativement aux tribus $\mathcal{F}$ et $\mathcal{P}\bigl(\overline{\mathbb{N}}^*\bigr)$. Comme l'ensemble d'arrivée $\overline{\mathbb{N}}^*$ est dénombrable, cette mesurabilité équivaut à

$$\forall k \in \overline{\mathbb{N}}^*, \quad \{N = k\} \in \mathcal{F}. \tag{79}$$

Si $k \in \mathbb{N}^*$, cette appartenance à $\mathcal{F}$ résulte de l'égalité

$$\{N = k\} = \bigcap_{j<k} \{S_j < 1\} \cap \{S_k \geq 1\}$$

et de la mesurabilité des S_j comme sommes finies des variables aléatoires U_i. Si $k = +\infty$, on utilise encore la mesurabilité des S_j en écrivant que

$$\{N = +\infty\} = \bigcap_{j\in\mathbb{N}^*} \{S_j < 1\}$$

appartient à $\mathcal{F}$ comme intersection dénombrable d'éléments de $\mathcal{F}$. À ce stade, N est donc une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\overline{\mathbb{N}}^*$. Reste la question de sa transformation en variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Posons $\Omega'' := \{N < \infty\} = \{N = +\infty\}^c$. Par mesurabilité de N, Ω'' appartient à $\mathcal{F}$ et comme $\mathbf{P}(N = +\infty) = 0$, $\mathbf{P}(\Omega'') = 1$. La restriction de l'ensemble d'arrivée de N à $\mathbb{N}^*$ nous amène à restreindre son ensemble de départ à Ω''. Munissons alors Ω'' de la tribu $\mathcal{F}''$, trace de $\mathcal{F}$ sur Ω'', i.e. $\mathcal{F}'' := \{A \cap \Omega''; A \in \mathcal{F}\}$. Comme $\mathcal{F}''$ est incluse[23] dans $\mathcal{F}$, on munit $(\Omega'', \mathcal{F}'')$ de la mesure restriction de $\mathbf{P}$ qui reste une probabilité. En utilisant (79) et la définition de $\mathcal{F}''$, on vérifie facilement que $N : \Omega'' \to \mathbb{N}^*$ est mesurable $\mathcal{F}''$ - $\mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$. On a donc bien transformé N en variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et définie sur l'espace probabilisé $(\Omega'', \mathcal{F}'', \mathbf{P})$. Pour être complet, on peut remarquer que la loi de N n'est pas vraiment affectée par cette transformation. En effet dans la version originelle de $N : \Omega \to \overline{\mathbb{N}}^*$, la loi de N s'écrit

$$P_N = \sum_{k \in \overline{\mathbb{N}}^*} \mathbf{P}(N = k)\delta_k = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \mathbf{P}(N = k)\delta_k, \tag{80}$$

puisque $\mathbf{P}(N = +\infty)\delta_{+\infty}$ est la mesure nulle. Dans la version modifiée notée provisoirement $\tilde{N} : \Omega'' \to \mathbb{N}^*$, la loi de $\tilde{N}$ s'écrit aussi

$$P_{\tilde{N}} = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \mathbf{P}(N = k)\delta_k. \tag{81}$$

La différence entre P_N et $P_{\tilde{N}}$ est subtile. La première est une mesure sur la tribu $\mathcal{P}(\overline{\mathbb{N}}^*)$, la seconde sur $\mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$. Il résulte de (80) et (81) que $P_{\tilde{N}}$ est simplement la restriction de P_N de $\mathcal{P}(\overline{\mathbb{N}}^*)$ à $\mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$.

5) Les variables aléatoires U_i sont indépendantes et de même loi uniforme sur $[0,1]$, c'est à dire à densité $f = \mathbf{1}_{[0,1]}$ par rapport à λ_1. On en déduit que la loi du vecteur aléatoire $(U_1, \dots, U_k)$ est à densité $f^{\otimes k}$ par rapport à λ_k. Comme

$$f^{\otimes k}(x_1, \dots, x_k) = \mathbf{1}_{[0,1]}(x_1) \dots \mathbf{1}_{[0,1]}(x_k) = \mathbf{1}_{[0,1]^k}(x_1, \dots, x_k),$$

la loi de $(U_1, \dots, U_k)$ est la loi uniforme sur le cube $[0,1]^k$.

En particulier on a $\mathbf{P}\big((U_1, \dots, U_k) \in [0,1]^k \big) = 1$. On en déduit immédiatement que

$$\mathbf{P}(S_k < 1) = \mathbf{P}\big((U_1, \dots, U_k) \in A_k(1) \big) = P_{(U_1,\dots,U_k)}\big(A_k(1)\big) = \lambda_k\big(A_k(1) \cap [0,1]^k\big).$$

Comme $A_k(1) \subset [0,1]^k$, on a ainsi vérifié que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}(S_k < 1) = \lambda_k\big(A_k(1)\big). \tag{82}$$

6) On pose pour alléger $v_k := \lambda_k\big(A_k(1)\big)$. En utilisant l'identification $\lambda_k = \lambda_{k-1} \otimes \lambda_1$ (pour tout $k \geq 2$), on peut écrire les égalités suivantes dont la justification sera donnée

[23] Attention, ce n'est pas une *sous-tribu* de $\mathcal{F}$ car $\mathcal{F}''$ n'est pas une tribu sur Ω.

ci-après :

$$
\begin{aligned}
v_k &= \int_{[0,1]^k} \mathbf{1}_{\{x_1+\cdots+x_k<1\}} \,\mathrm{d}\lambda_k(x_1,\ldots,x_k) && (83)\\
&= \int_{[0,1]} \left\{ \int_{[0,1]^{k-1}} \mathbf{1}_{\{x_1+\cdots+x_{k-1}<1-x_k\}} \,\mathrm{d}\lambda_{k-1}(x_1,\ldots,x_{k-1}) \right\} \mathrm{d}\lambda_1(x_k) && (84)\\
&= \int_{[0,1]} \lambda_{k-1}\big(A_{k-1}(1-x_k)\big) \,\mathrm{d}\lambda_1(x_k) && (85)\\
&= \int_{[0,1]} (1-r)^{k-1}\lambda_{k-1}\big(A_{k-1}(1)\big) \,\mathrm{d}\lambda_1(r) && (86)\\
&= v_{k-1}\int_0^1 t^{k-1}\,\mathrm{d}t. && (87)
\end{aligned}
$$

Justifications.

(83) : $\lambda_k\big(A_k(1)\big) = \int_{\mathbb{R}^k} \mathbf{1}_{A_k(1)}$ et $\mathbf{1}_{A_k(1)}(x_1,\ldots,x_k) = \mathbf{1}_{[0,1]^k}(x_1,\ldots,x_k)\mathbf{1}_{\{x_1+\cdots+x_k<1\}}$.

(84) : on utilise l'identification $\lambda_k = \lambda_{k-1}\otimes\lambda_1$, mesure sur l'espace produit $[0,1]^k = [0,1]^{k-1}\times[0,1]$ et la définition de cette mesure produit, à savoir

$$\lambda_{k-1}\otimes\lambda_1(B) = \int_{[0,1]} \left\{ \int_{[0,1]^{k-1}} \mathbf{1}_B(x_1,\ldots,x_{k-1},x_k) \,\mathrm{d}\lambda_{k-1}(x_1,\ldots,x_{k-1}) \right\} \mathrm{d}\lambda_1(x_k)$$

pour tout B de la tribu produit, qui est identifiée ici avec la tribu borélienne de $[0,1]^k$.

(85) : analogue à (83), mais en sens inverse avec $k-1$ au lieu de k et $r = 1-x_k$ au lieu de $r=1$.

(86) : on a utilisé (74) avec $r = 1-x_k$.

(87) : conversion en intégrale de Riemann de l'intégrale de Lebesgue sur $[0,1]$ de la fonction continue $r\mapsto(1-r)^{k-1}$ et changement de variable $t = 1-r$.

Le calcul immédiat de l'intégrale dans (87) nous donne finalement la relation de récurrence :

$$\forall k\geq 2,\quad v_k = \frac{v_{k-1}}{k}.$$

Comme $A_1(1) = [0,1]$, le premier terme de la suite vaut $v_1 = 1$ et la récurrence se résout en

$$v_k = \frac{1}{k(k-1)\ldots 2}v_1 = \frac{1}{k!}. \tag{88}$$

7) Nous pouvons maintenant calculer $\mathbf{E}N$ en exploitant (75). En effet grâce à (78), (82) et (88), on a

$$\forall k\in\mathbb{N},\quad \mathbf{P}(N>k) = \frac{1}{k!}, \tag{89}$$

cette formule englobant les cas $k=0$ et $k=1$ évidents par calcul direct. En reportant dans (75), il vient

$$\mathbf{E}N = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!} = \mathrm{e}.$$

Comme sous-produit de (89), on peut expliciter les masses ponctuelles de la loi de N, puisque

$$\forall k \geq 2, \quad \mathbf{P}(N = k) = \mathbf{P}(N > k - 1) - \mathbf{P}(N > k) = \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!} = \frac{1}{k(k-2)!}.$$

Le cas $k = 1$ est évident directement : $\mathbf{P}(N = 1) = \mathbf{P}(S_1 \geq 1) = \mathbf{P}(U_1 \geq 1) = 0$.

8) Il est bien naturel de se demander si la même méthode permet de calculer $\mathbf{E}M$, où M est définie par

$$M(\omega) = \min\bigl\{n \in \mathbb{N}^*;\ S_n(\omega) \geq 2\bigr\}.$$

La réponse est négative. On voit facilement que les résultats des questions 2) à 5) du problème restent valides (en changeant la borne 1 par la borne 2). Par contre l'argument d'homothétie qui a grandement facilité le calcul de la question 6) n'est plus valable. Pour se convaincre que les $A_n(r)$ ne sont pas les homothétiques de $A_n(2)$ pour $0 < r \leq 2$, il suffit d'examiner le cas $n = 2$, cf. figure 1.

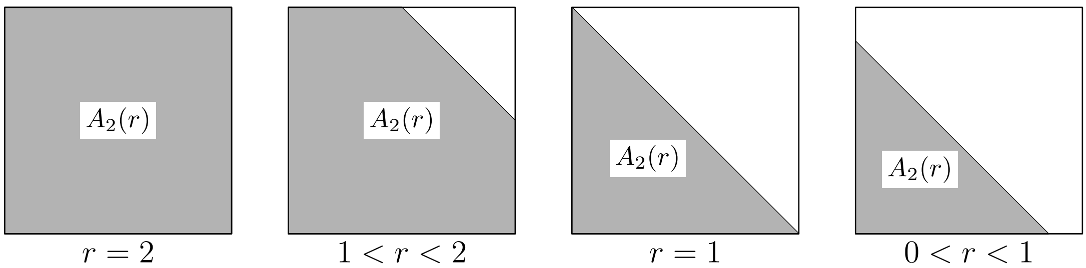


FIG. 1 – Les $A_2(r)$ ne sont pas homothétiques de $A_2(2)$

À titre d'illustration de ce problème, on présente ci-dessous les résultats d'une simulation informatique réalisée en Scilab (qui n'était évidemment pas exigible des candidats ayant passé l'épreuve de septembre). On simule 20 000 valeurs de N. En raison de la loi des grands nombres, leur moyenne arithmétique est un estimateur de $\mathbf{E}N$ dont la vraie valeur est $\mathrm{e} = 2{,}718\,281\,8\ldots$ De même la fréquence d'apparition de la valeur k estime la probabilité $\mathbf{P}(N = k) = \frac{1}{k(k-2)!}$. Bien que l'ensemble des valeurs possibles de N soit infini, il n'est pas surprenant que la plus grande valeur observée lors de ces 20 000 expériences soit 8, compte tenu de la décroissance rapide de $\mathbf{P}(N = k)$ vers 0 quand k tend vers l'infini. Voici une sortie du programme à l'état brut.

```
-->;exec("/home/suquet/Enseignement/IFP/Devoirs/Devoirs03/sept2003.sce");

 nombre d'expériences

    20000.
```

```
 estimateur de l'espérance de N :

    2.71565

 loi théorique P(N=k) et loi empirique (fréquence de k)

!   1.     0.             0.       !
!   2.     0.5            0.4967   !
!   3.     0.3333333      0.33925  !
!   4.     0.125          0.12435  !
!   5.     0.0333333      0.0323   !
!   6.     0.0069444      0.00635  !
!   7.     0.0011905      0.0009   !
!   8.     0.0001736      0.00015  !
!   9.     0.0000220      0.       !
!   10.    0.0000025      0.       !

 valeur maximale observée pour N:

    8.
```

Ex 7. *Vrai ou faux ?*

1) *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *un espace mesuré et* $(f_n)_{n\geq 1}$ *une suite de fonctions* $\Omega \to \mathbb{R}_+$*, mesurables* $\mathcal{F}$-$\mathrm{Bor}(\mathbb{R}_+)$. *On suppose qu'il existe un* $A \in \mathcal{F}$ *tel que* $\mu(A) > 0$ *et que pour tout* $\omega \in A$, $\lim_{n\to+\infty} f_n(\omega) = +\infty$. *Alors* $\lim_{n\to+\infty} \int_A f_n \,\mathrm{d}\mu = +\infty$.

C'est vrai. Le lemme de Fatou nous donne en effet :

$$\liminf_{n\to+\infty} \int_A f_n \,\mathrm{d}\mu \geq \int_A \liminf_{n\to+\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu = (+\infty)\mu(A) = +\infty,$$

car $\mu(A) > 0$. Par conséquent $\liminf_{n\to+\infty} \int_A f_n \,\mathrm{d}\mu = +\infty$, ce qui équivaut à la convergence de $\int_A f_n \,\mathrm{d}\mu$ vers $+\infty$.

2) *Si le vecteur aléatoire* (X, Y) *de* $\mathbb{R}^2$ *suit la loi uniforme sur le triangle*

$$T := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \leq x + y \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\right\},$$

ses composantes X *et* Y *sont deux variables aléatoires a) de même loi ; b) indépendantes.*

Le *a)* est vrai car la loi de (X, Y) est *symétrique*, ce qui signifie que (X, Y) et (Y, X) ont même loi donc mêmes lois marginales. Pour justifier cette symétrie, il suffit de remarquer que si Z est un vecteur aléatoire de loi uniforme sur un borélien B de $\mathbb{R}^d$ et h une transformation affine bijective de $\mathbb{R}^d$ sur $\mathbb{R}^d$, alors $h(Z)$ suit la loi uniforme sur $h(B)$ (évident par le théorème de changement de variable affine : la densité reste une fonction constante). On applique ceci avec $d = 2$, $B = T$, $Z = (X, Y)$ et $h : (x, y) \mapsto (y, x)$ en notant, c'est le point clé, que $h(T) = T$.

Le *b)* est faux, essentiellement parce que T n'est pas, même à un ensemble de mesure nulle près, un produit cartésien. De façon plus précise, nous allons vérifier que les *évènements* $\{X \geq 1/2\}$ et $\{Y \geq 1/2\}$ ne sont pas indépendants, ce qui suffit à interdire l'indépendance des *variables* aléatoires X et Y. Commençons par rappeler que puisque (X, Y) suit la loi uniforme sur T, on a pour tout borélien B de $\mathbb{R}^2$,

$$\mathbf{P}\big(\,(X,Y) \in B\,\big) = \frac{\lambda_2(B \cap T)}{\lambda_2(T)}. \tag{90}$$

Posons $A := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \leq x+y \leq 1,\ x \geq 1/2,\ y \geq 0\big\}$ et notons A' son image par la symétrie h (figure 2).

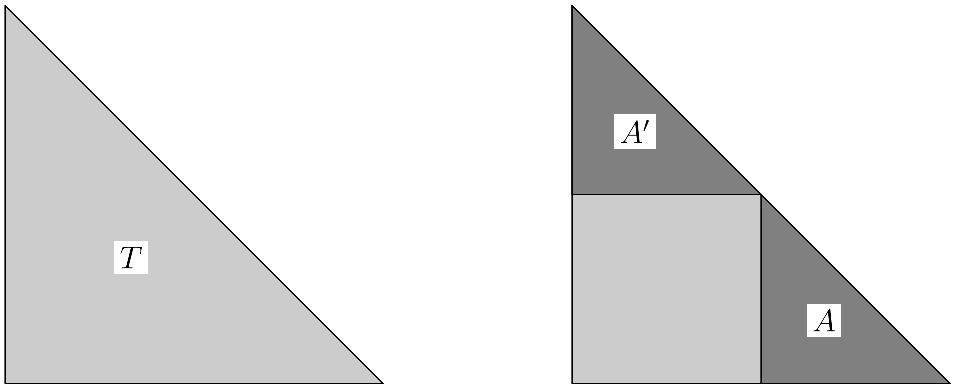


FIG. 2 –

On voit immédiatement grâce à (90) que

$$\mathbf{P}(X \geq 1/2) = \mathbf{P}\big(\,(X,Y) \in A\,\big) = \frac{1}{4}$$

et par symétrie que $\mathbf{P}(Y \geq 1/2) = 1/4$. Par ailleurs,

$$\mathbf{P}(X \geq 1/2 \text{ et } Y \geq 1/2) = \mathbf{P}\big(\,(X,Y) \in A \cap A'\,\big) = \frac{\lambda_2(\{(1/2, 1/2)\})}{\lambda_2(T)} = 0.$$

Par conséquent, $\mathbf{P}(X \geq 1/2 \text{ et } Y \geq 1/2) \neq \mathbf{P}(X \geq 1/2)\mathbf{P}(Y \geq 1/2)$, d'où la non-indépendance.

3) *Les évènements A et B de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ sont indépendants si et seulement si le vecteur aléatoire $(\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B)$ a une covariance nulle.*

C'est vrai, grâce au calcul élémentaire suivant, valable pour n'importe quelle paire d'évènements A et B :

$$\operatorname{Cov}(\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B) = \mathbf{E}(\mathbf{1}_A \mathbf{1}_B) - \mathbf{E}\mathbf{1}_A \mathbf{E}\mathbf{1}_B = \mathbf{E}\mathbf{1}_{A\cap B} - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A \cap B) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B).$$

4) *Si f est une fonction* $[0,1] \to \mathbb{R}$, *λ-intégrable sur* $[0,1]$, *alors elle est μ-intégrable sur* $[0,1]$ *pour toute mesure finie μ définie sur* $\big([0,1], \mathrm{Bor}([0,1])\big)$.

C'est faux. Voici un contre exemple. On prend f définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = x^{-1/2}$ si $0 < x \leq 1$. C'est une fonction mesurable positive, continue sur $]0,1]$ et l'intégrale de Riemann généralisée $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ converge, donc f est bien λ-intégrable sur $[0,1]$. Considérons maintenant la mesure finie

$$\mu := \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{k^{3/2}} \delta_{1/k}.$$

Il est clair que μ est une mesure finie puisque $\mu([0,1]) = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} k^{-3/2}$ est la somme d'une série convergente. Pourtant,

$$\int_{[0,1]} f \,\mathrm{d}\mu = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{k^{3/2}} \left(\frac{1}{k}\right)^{-1/2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = +\infty,$$

donc f n'est pas μ intégrable.

Un contre exemple encore plus simple s'obtient avec la même f en prenant pour μ la mesure à densité f par rapport à λ.