Fiche 9 - Statistiques - M1 ingé math
Tests uniforméments plus puissants

Emeline Schmisser, `emeline.schmisser@math.univ-lille1.fr`, bureau 314 (bâtiment M3).

Exercice 1 : Loi normale
Soient $(X_1, \dots, X_n)$ un échantillon d'une loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

1. Donner la région critique optimale de taille $\alpha = 0.05$ pour tester $H_0 : \sigma^2 = 1$ contre $H_1 : \sigma^2 = 2$.
2. Est-ce que la région critique reste optimale si on remplace H_1 par :
   (a) $H_1 : \sigma^2 = 4$
   (b) $H_1 : \sigma^2 > 1$?

Exercice 2.
Soit $X_1, \dots, X_n$ un échantillon de densité $\theta x^{\theta-1}\mathbf{1}_{0<x<1}$

1. Calculer une statistique exhaustive pour θ.
2. On pose $H_0 : \theta = 6$ contre $H_1 : \theta < 6$. Quelle est la forme région critique optimale ?
3. Y a-t-il un lien entre la statistique exhaustive et la région critique optimale ?

Exercice 3 : Néons
La durée de vie de tubes fluorescents d'un certain modèle suit une loi normale d'écart-type 150 heures et de moyenne μ inconnue. La durée moyenne d'un échantillon de 100 tubes a été trouvée égale à 1570 heures.

1. Calculer la zone de rejet optimale avec $\alpha = 5\%$:

$$\begin{cases} H_0 & \mu = 1600 \\ H_1 & \mu \neq 1600 \end{cases}$$

   Solution:
   – on choisit la statistique de test $T = \bar{x}$.
   – on sait que
   $$\sqrt{n}\frac{\bar{x} - \mu}{150} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$
   .
   – On rejette H_0 si $\bar{x} - 1600 \leq -a$.
   – $a = 1.96 * 150/\sqrt{n} = 29, 4$.

2. Est-ce qu'on accepte H_0 ?
3. Déterminer et tracer la fonction puissance de ce test. Quelle est la probabilité de décider H_0 alors qu'en réalité $\mu = 1550$?

   Solution: Donner expression avec loi de $N(0, 1)$.
   pour $\mu = 1550$: $1 - \beta = 1 - \mathbb{P}(N \leq 1,96 - 50/15) = 1 - \mathbb{P}(N \geq 1,37) = 1 - 0,9147 = 8,53\%$.

4. Est-ce que ce test est uniformément plus puissant ?

Exercice 4 : Défectueux, test exact
Un industriel affirme que sa production a moins de 5% de défectueux. Après un contrôle de 20 pièces prises au hasard. une seule n'a pas fonctionné.

1. Préciser H_0 et H_1.

   Solution: $H_0 : p \leq 0.05$ contre $H_1 : p > 0.05$

2. En notant p la proportion de défecteueux, donner la zone de rejet pour le test avec $\alpha = 5\%$.

   Solution: $W = \{X > 3\}$.

3. Est-ce qu'on accepte ou on rejette H_0 ? Donner la p-valeur.

   Solution: La p-valeur vaut 0.26.

4. Calculer la probabilité d'accepter H_0 si la proportion de défecteux est de 10% et commenter ce résultat.

   Solution: $1 - \beta = 0.8670$. Le test n'est pas très précis.

5. Est-ce que ce test est UPP ?

   Solution: oui : rapport des vraisemblances :

   $$\left(\frac{p}{p'}\right)^x \left(\frac{1-p}{1-p'}\right)^{n-x}$$

   La zone de rejet est de la forme $X \geq A$: test UPP.

Exercice 5 : Défectueux, test asymptotique
On se propose d'établir un contrôle de réception pour la livraison d'un grand nombre de pièces de série. On disigne par p le pourcentage de pièces défectueuses dans le lot livré et l'on envisage deux hypothèses extrêmes :

$$\begin{cases} H_0 : & p = 5\% \\ H_1 : & p = 10\% \end{cases}$$

Si H_0 est vraie, l'acheteur accepte la fabrication. Sinon, la fabrication est refusée. On décide d'examiner 400 pièces et de fixer un pourcentage critique de 6% tel que, si $\hat{p}$ désigne le pourcentage de pièces défectueuses dans la livraison :

- si $\hat{p} < 7$, on accepte la livraison
- si $\hat{p} \geq 7$, on refuse la livraison.

1. Est-ce que ce test est uniformément plus puissant ?
2. Calculer les risques asymptotiques de première et de seconde espèce correspondant à cette règle de décision.

   Solution: risque 1ere espèce : $\mathbb{P}(N > 1.83) = 4\%$
   risque 2nde espèce : $\mathbb{P}(N < -2.66) = 0.05\%$