

# Fiche 8 - Statistiques - M1 ingé math

## Tests

**Emeline Schmisser**, [emeline.schmisser@math.univ-lille1.fr](mailto:emeline.schmisser@math.univ-lille1.fr), bureau 314 (bâtiment M3).

### Exercice 1 : Loi binomiale

Soit  $X$  une loi binomiale  $\mathcal{B}(10, p)$  avec  $p$  ayant pour valeurs possibles  $1/4$  ou  $1/2$ . On observe une variable  $X_1$ . On décide que l'hypothèse  $H_0 : p = 1/2$  est rejetée et que l'hypothèse  $H_1 : p = 1/4$  est acceptée si la valeur observée  $X_1 \leq 3$ .

1. Les hypothèses sont-elles simples ou composites ?
2. Quelle est la zone de rejet ?
3. Calculer le niveau de ce test.
4. Calculer la puissance de ce test.
5. Quelles sont les erreurs de première et de seconde espèces ?

### Exercice 2 : loi uniforme

On considère des variables  $x_1, \dots, x_n$  iid suivant une loi uniforme  $\mathcal{U}([a, b])$  avec  $b > 0$  connu. On veut tester si  $a = 0$ .

1. Formuler  $H_0$  et  $H_1$ .
2. Les hypothèses sont-elles simples ou composites ?
3. Calculer la fonction de vraisemblance.
4. Quel est l'estimateur du maximum de vraisemblance de  $a$  ?
5. Donner la zone de rejet pour le test  $H_0 : a = 0$  contre  $H_1 : a = a_1 < 0$ .
6. Quelle est le niveau du test ?
7. Calculer la fonction puissance de ce test.

On considère maintenant le test  $H_0 : a = 0$  contre  $H_1 : a = a_1 > 0$ .

8. Donner la forme de la zone de rejet.
9. Calculer la zone de rejet pour un test de niveau  $\alpha = 0,5\%$ .
10. Quel est la puissance du test ?

### Exercice 3 : Loi de Poisson

Soit  $(X_1, \dots, X_8)$  un échantillon i.i.d. d'une loi de Poisson de moyenne  $\mu$ . On rejette l'hypothèse nulle  $H_0 : \mu = 0.5$  et on acceptera  $H_1 : \mu > 0.5$  si  $\sum_{i=1}^8 x_i > 8$ .

1. Donner le niveau du test.
2. Calculer la puissance de ce test pour les valeurs de  $\mu$  suivantes :  $\mu = 0.75$ ,  $\mu = 1$  et  $\mu = 1.25$ .

### Exercice 4 : loi normale

Soient  $X_1, \dots, X_{10}$  un échantillon d'une loi normale  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  où  $\mu$  est inconnue.

1. Donner la région critique de taille  $\alpha = 0.05$  pour tester pour tester  $H_0 : \sigma^2 = 1$  contre  $H_1 : \sigma^2 = 2$ .
2. Est-ce que cette région critique reste la même lorsqu'on change l'hypothèse alternative en
  - (a)  $H_1 : \sigma^2 = 4$  ?
  - (b)  $H_1 : \sigma^2 = \sigma_1^2 > 1$  ?
  - (c)  $H_1 : \sigma^2 = 1/2$  ?
3. On considère les hypothèses  $H_0 : \sigma^2 \leq 1$  et  $H_1 : \sigma^2 > 1$ . Quelle est la région critique ?