

Fiche 7 - Statistiques - M1 ingé math

Intervalles de confiance

Emeline Schmisser, `emeline.schmisser@math.univ-lille1.fr`, bureau 314 (bâtiment M3).

Exercice 1 : Loi gaussienne

On observe des variables (X_1, \dots, X_9) i.i.d de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. On a mesuré $\bar{x} = 11$ et on suppose dans un premier temps que $\sigma^2 = 4$.

1. Donner une borne supérieure au niveau $1 - \alpha$ sur μ , avec $\alpha = 0,1$.
2. Quelle taille d'échantillon faut-il pour approcher μ à 0,5 près dans un intervalle de confiance bilatéral de niveau 90% ?
3. On suppose maintenant que l'écart-type est inconnu et que la valeur de S_n^{*2} mesurée pour d'échantillon est 4.
 - (a) Donner une borne supérieure au niveau 90% pour μ . Comparer avec la borne obtenue à la première question.
 - (b) Quelle taille d'échantillon faut-il pour approcher μ à 0,5 près dans un intervalle de confiance bilatéral de niveau 90% ?
 - (c) Donner un intervalle de confiance bilatéral au niveau 0,90 sur σ^2 .

Exercice 2 : Poids d'un nouveau-né

Le poids moyen d'un nouveau né est une variable d'écart-type égal à 0.5 kg. Le poids moyen des 49 nouveau-nés en un mois dans un hôpital a été de 3.6kg.

1. Déterminer un intervalle de confiance approché de niveau 95% pour le poids moyen d'un nouveau né dans la population desservie par cet hôpital. Quelle est la validité de cette approximation ?
2. Quel serait le degré de confiance d'un intervalle de longueur 0,1kg centré à 3.6kg pour ce poids moyen ?

Exercice 3.

Soient (X_1, \dots, X_n) des variables i.i.d de loi de densité $f(x; \theta) = \theta x^{\theta-1} \mathbf{1}_{0 < x < 1}$, $\theta > 0$.

1. Écrire le modèle statistique. Le modèle est-il exponentiel ?
2. Calculer l'EMV de θ .
3. Calculer l'information de Fisher.
4. $\hat{\theta}$ est-il asymptotiquement optimal ?
5. Dédire un intervalle de confiance asymptotique pour θ au niveau $\alpha = 5\%$. L'intervalle dépend de $\hat{\theta}$ et de n .
6. Quelle est la loi de $-\ln(X_i)$?
7. En déduire celle de $W = -\sum_{i=1}^n \ln(X_i)$ puis celle de $2\theta W$.
8. Donner un intervalle de confiance exact pour θ au niveau $\alpha = 5\%$. Cet intervalle dépend de n et de $\hat{\theta}$.
9. Prenant $n = 10$ puis $n = 25$, comparer la longueur des intervalles de confiance pour $\alpha = 10\%$.