

# Fiche 6 - Master 1 Ingé maths

## Paramètre vectoriel

**Emeline Schmisser**, `emeline.schmisser@math.univ-lille1.fr`, bureau 314 (bâtiment M3).

### Exercice 1 : Loi normale

Soient  $(X_1, \dots, X_n)$  des variables i.i.d de loi  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ .

1. Rappeler les estimateurs du maximum de vraisemblance pour  $\mu$  et  $\sigma^2$ .
2. Est-ce que ces estimateurs sont non biaisés?
3. Calculer l'information de Fisher.
4. Quelle est la loi asymptotique de  $\hat{\mu}$  et  $\hat{\sigma}^2$ ? Ces lois sont-elles réellement asymptotiques?
5. On voudrait estimer la constante  $b$  définie par  $\mathbb{P}(X \leq b) = 0.9$ . Donner l'EMV de  $b$ . On sait que  $\phi^{-1}(0,9) = 1,28$ . Quelle est la loi asymptotique de  $\hat{b}_{EMV}$ ?
6. Si  $c$  est une constante, donner l'EMV de  $\mathbb{P}(X \leq c)$ .

### Exercice 2 : Loi Gamma

Soient  $(X_1, \dots, X_n)$  des variables aléatoires i.i.d suivant une loi Gamma  $\Gamma(\alpha, \beta)$ .

1. Calculer l'information de Fisher du modèle. On notera

$$A(x) = \frac{\Gamma''(x)}{\Gamma(x)} - \left( \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} \right)^2$$

2. Donner le système d'équations permettant de trouver les EMV  $\hat{\beta}$  et  $\hat{\alpha}$ . Résoudre l'équation pour  $\hat{\beta}$  (on ne demande pas d'explicitier  $\hat{\alpha}$ ).
3. Quelle est la vitesse de convergence asymptotique de l'EMV de l'espérance? On ne demande pas d'explicitier ces estimateurs. On rappelle que si

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

est une matrice inversible, alors

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

4. Que peut-on dire de l'estimateur  $\bar{x}$ ? Est-il efficace? Asymptotiquement efficace?