Fiche 5 – M1 ingé math
Estimateurs efficaces

Exercice 1 : Estimateur du maximum de vraisemblance
On observe n variables i.i.d. $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Pour chacune des lois suivantes, calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance et dire s'il est biaisé.

1. une loi exponentielle de paramètre λ.
2. une loi de Bernouilli de paramètre $p \in]0, 1/3[$.
3. Une loi exponentielle translatée $e^{-(x-\theta)}\mathbf{1}_{x\geq\theta}$.
4. $f(x) = \theta x^{\theta-1}\mathbf{1}_{0<x<1}$, $\theta > 0$.
5. Une loi Laplace : $f(x,\theta) = \frac{1}{2}e^{-|x-\theta|}$

Exercice 2 : Loi de Poisson
Soit X une variable aléatoire de loi de Poisson $\mathcal{P}(\theta)$, $0 < \theta < \infty$

1. Montrer que $(-1)^X$ est l'estimateur sans biais de variance minimale de $e^{-2\theta}$.
2. Calculer l'EMV de $e^{-2\theta}$.
3. Commenter la différence entre les deux estimateurs

Exercice 3 : Loi exponentielle

1. Soient $X_1, \ldots, X_n$ un échantillon de loi $f(x;\theta) = (1/\theta)e^{-x/\theta}$. Calculer l'EMV de $\mathbb{P}(X \leq 2)$.
2. Est-ce que cet estimateur est convergent ?
3. Quelle est sa loi asymptotique ?

On considère maintenant l'estimateur $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{1}_{X_i\leq 2}$

4. Calculer son biais et sa variance.
5. Cet estimateur est-il meilleur que l'estimateur précédent ?