

Fiche 4 – M1 ingé math

Information de Fisher et borne de Cramer Rao

Exercice 1 : Information de Fisher

Pour chacune de lois suivantes, calculer l'information de Fisher si elle existe.

1. une exponentielle de paramètre $\lambda > 0$
2. une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$
3. une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$.
4. une loi exponentielle de paramètre 1 translatée de θ .
5. une loi normale de paramètre $\mathcal{N}(\mu, 1)$.
6. une loi normale de paramètre $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

Exercice 2 : Vitesse de convergence

1. Soient X_1, \dots, X_n des variables i.i.d suivant une loi de famille exponentielle régulière de paramètre θ .
Rappeler la vitesse de convergence maximale d'un estimateur sans biais de θ .
2. Est-ce que cette borne est vraie même si la famille de loi n'est pas exponentielle régulière? On donnera un contre-exemple.

Exercice 3 : loi normale et estimateur superefficace

Soient (X_1, \dots, X_n) des variables i.i.d. de loi $\mathcal{N}(\mu, 1)$ avec μ inconnue.

1. Montrer que \bar{X}_n est un estimateur efficace.

On suppose maintenant que $\mu = 0$.

2. Quelle est la loi de \bar{X}_n ?
3. Soit $U_n = \bar{X}_n \mathbf{1}_{|\bar{X}_n| \geq n^{-1/4}}$. Quel est le biais de U_n ?
4. Donner l'expression de la variance de U_n . Comparer cette variance à la variance de \bar{X}_n et à l'information de Fisher.
5. Est-ce que le théorème de la borne FDCR a été mise en défaut?

Exercice 4 : Loi gamma

Soit (X_1, \dots, X_n) un échantillon i.i.d de loi $\Gamma(\beta, \theta)$. On suppose que β est connu.

1. Donner une statistique exhaustive complète de θ puis en déduire l'estimateur SBVM.
3. Est-ce que cet estimateur est exhaustif? complet?
4. Est-ce que cet estimateur est efficace?